15. 첫째항이 0이 아닌 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{2n-1}=a_n+a_{n+1}$
> (나) $a_{2n}=a_{n+1}+a_{n+2}$

$\sum_{k=1}^{30} a_k=\sum_{k=1}^{14} a_{2k+1}$일 때, $\frac{a_{33}}{a_1}$의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{7}$ ② $-\frac{2}{7}$ ③ $-\frac{3}{7}$ ④ $-\frac{4}{7}$ ⑤ $-\frac{5}{7}$

1) $\sum_{k=1}^{30} a_k = \sum_{k=1}^{14} a_{2k+1} \Leftrightarrow a_1 + \sum_{k=1}^{15} a_{2k} = 0$

2) ① $n=1$: $\begin{cases} a_1 = a_1 + a_2 \Leftrightarrow a_2 = 0 \\ a_2 = a_2 + a_3 \Leftrightarrow a_3 = 0 \end{cases}$

$\therefore a_1 = -\sum_{k=2}^{15} a_{2k}$ $(\because a_2 = 0)$.

② $a_{2n+1} = a_{n+1} + a_{n+2} = a_{2n}$

$\Rightarrow \begin{cases} n=2k : a_{4k} = a_{2k+1} + a_{2k+2} = a_{2k} + a_{2k+2}. \\ n=2k+1 : a_{4k+2} = a_{2k+2} + a_{2k+3} = 2a_{2k+2}. \end{cases}$

$\therefore \sum_{k=2}^{15} a_{2k} = \sum_{k=1}^{7}(a_{4k}+a_{4k+2}) = \sum_{k=1}^{7}(a_{2k}+3a_{2k+2}) = 4\sum_{k=2}^{7} a_{2k} + 3a_{16}$

$\sum_{k=2}^{7} a_{2k} = \sum_{k=1}^{3}(a_{4k}+a_{4k+2}) = \sum_{k=1}^{3}(a_{2k}+3a_{2k+2}) = 4\sum_{k=2}^{3} a_{2k} + 3a_8$

$\sum_{k=2}^{3} a_{2k} = a_4 + a_6 = a_4 + (a_4 + a_5) = 3a_4.$

③ $a_8 = a_5 + a_6 = a_4 + 2a_4 = 3a_4$

$a_{16} = a_9 + a_{10} = (a_5+a_6) + (a_6+a_7) = 7a_4$

$\therefore a_1 = -\sum_{k=2}^{15} a_{2k} = -4(4\cdot 3a_4 + 3\cdot 3a_4) - 3\cdot 7a_4 = -15\cdot 7a_4$

3) $a_{33} = a_{17} + a_{18} = a_{16} + (a_{10}+a_{11}) = 7a_4 + 8a_4 = 15a_4$

$\therefore \frac{a_{33}}{a_1} = \frac{15a_4}{-15\cdot 7a_4} = -\frac{1}{7}$

단답형

16. $\sqrt[3]{4^k}=2^{k-2}$을 만족시키는 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

17. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여

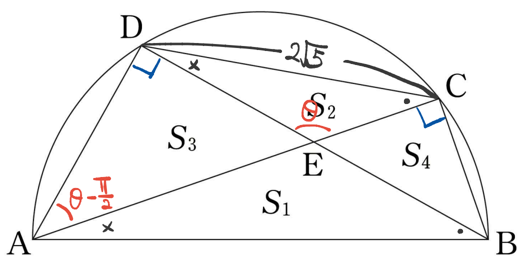
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2+x}=2$$

일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

21. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 두 점 C, D에 대하여 $\overline{\mathrm{CD}}=2\sqrt{5}$이고 사각형 ABCD의 대각선의 교점 E가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이는 3이다.
> (나) 네 삼각형 ABE, CDE, DAE, BCE의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4라 할 때, $S_1 : S_2 = S_3 : S_4$이다.

삼각형 ABD의 넓이가 $\frac{q}{p}\sqrt{5}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



1) $\frac{2\sqrt{5}}{\sin\theta}=2\times3 \quad \therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$

2) $\frac{2\sqrt{5}}{\sin(\theta-\frac{\pi}{2})}=\overline{AB} \quad \therefore \overline{AB}=3\sqrt{5} \quad (\because \sin(\theta-\frac{\pi}{2})=-\cos\theta)$

$\Rightarrow S_1 : S_2 = \overline{AB}^2 : \overline{CD}^2 = 9:4 = S_3 : S_4$

$\Rightarrow \overline{AE}:\overline{DE}=3:2, \quad \overline{AE}:\overline{BE}=3:2$

따라서 $\overline{AE}=3t$라 하면 $\overline{DE}=\overline{BE}=2t$.

3) $\overline{AD}^2=(3t)^2-(2t)^2=5t^2 \quad \therefore \overline{AD}=\sqrt{5}t$

$\overline{AB}^2=5t^2+16t^2=21t^2 \quad \therefore t^2=\frac{9\times5}{21}=\frac{15}{7}$

4) $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}t\times4t=2\sqrt{5}t^2=\frac{30}{7}\sqrt{5} \quad \therefore p+q=37$

22. 일차항의 계수가 0인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_{-3}^{x} f(|t|)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

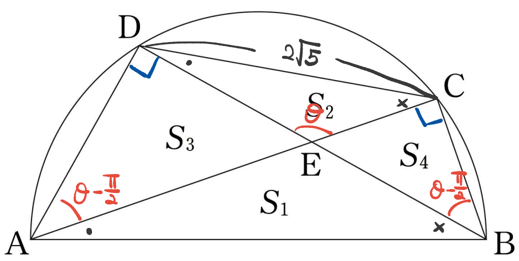
> 서로 다른 두 상수 a, b에 대하여 함수 $|g(x)-9|$는 $x=a$, $x=b$에서만 미분가능하지 않다.

$ab=-16$일 때, $f(-3)$의 값을 구하시오. [4점]

21. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 두 점 C, D에 대하여 $\overline{CD}=2\sqrt{5}$이고 사각형 ABCD의 대각선의 교점 E가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이는 3이다.
> (나) 네 삼각형 ABE, CDE, DAE, BCE의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4라 할 때, $S_1 : S_2 = S_3 : S_4$이다.

삼각형 ABD의 넓이가 $\frac{q}{p}\sqrt{5}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



1) $\frac{2\sqrt{5}}{\sin\theta}=6 \quad \therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$

2) $S_1 : S_2 = S_3 : S_4 \Leftrightarrow \overline{AE}^2 : \overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 : \overline{EB}^2$
$\Leftrightarrow \overline{DE}=\overline{EB}$

3) $\overline{DE}=t \Rightarrow \begin{cases} \overline{AD}=\frac{t}{\tan(\theta-\frac{\pi}{2})}=-t\tan\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}t \\ \overline{AE}=\frac{t}{\sin(\theta-\frac{\pi}{2})}=-\frac{t}{\cos\theta}=\frac{3}{2}t \end{cases}$

$\hookrightarrow \overline{AE}:\overline{DE}=3:2$
$\Rightarrow \overline{AB}:\overline{DC}=3:2$
$\therefore \overline{AB}=3\sqrt{5}$

$\therefore \overline{AB}^2=\frac{5}{4}t^2+4t^2=\frac{21}{4}t^2 \Leftrightarrow t^2=\frac{4}{21}\times 9\times 5=\frac{60}{7}$

4) $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}t\times 2t=\frac{\sqrt{5}}{2}t^2=\frac{30}{7}\sqrt{5} \quad \therefore p+q=37$

22. 일차항의 계수가 0인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_{-3}^{x} f(|t|)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

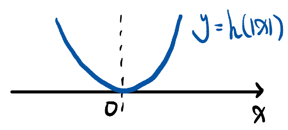
> 서로 다른 두 상수 a, b에 대하여 함수 $|g(x)-9|$는 $x=a$, $x=b$에서만 미분가능하지 않다.

$ab=-16$일 때, $f(-3)$의 값을 구하시오. [4점]

1) $f(x)=px^3+qx^2+r=\underbrace{px^2(x+\frac{q}{p})}_{=h(x).}+\underbrace{r}_{평행이동.}$

2) $g(x)=\int_{-3}^{x} f(|t|)dt \Rightarrow \begin{cases} g(-3)=0 \\ g'(x)=f(|x|)=h(|x|)+C \end{cases}$

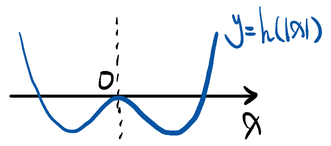
① $x=-\frac{q}{p}\le 0$



$\Rightarrow$ $g(x)$는 삼차함수와 유사한 개형

$\Rightarrow$ $y=9$의 위치가 어디든 미분가능하지 않는 x의 개수가 2개일 수 없음. $\otimes$

② $x=-\frac{q}{p}>0$

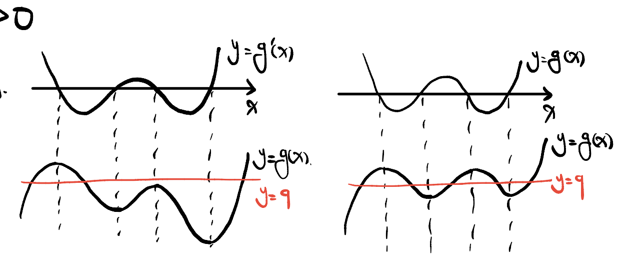


3) $\int^{x} f(t)dt=\frac{p}{4}x^3(x-4)+9$

i) $r<0 \Rightarrow$ $g'(x)$의 부호변화가 2번 $\otimes$

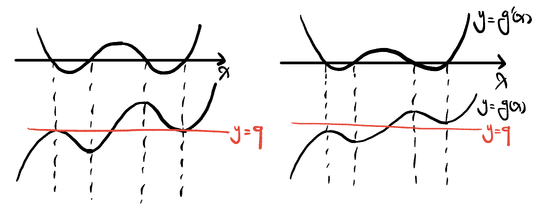
ii) $r>0$

A.



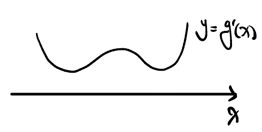
$\otimes$

B.



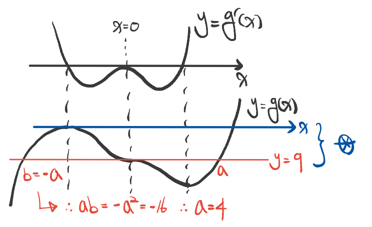
$\otimes$

C.

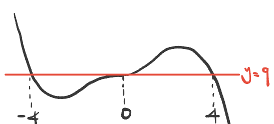


$\Rightarrow$ $g'(x)$의 부호변화가 0번 $\otimes$

iii) $r=0$



$\otimes$ $\therefore p<0 \Rightarrow$



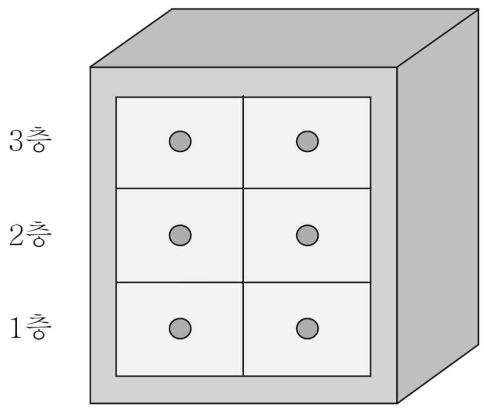
3) $\int_{-3}^{x} f(-t)dt=\frac{p}{4}x^3(x+4)+9 \Rightarrow \begin{cases} 0=-\frac{27}{4}p+9 \\ f(-x)=\frac{3}{4}px^2(x+4)+\frac{p}{4}x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=\frac{4}{3} \\ f(-3)=\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\times 3^2\times 7+\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}\times 3^3=72. \end{cases}$

단답형

29. 그림과 같이 1층, 2층, 3층에 각각 2개씩 모두 6개의 서랍이 있다. 6개의 서랍에 서로 같은 종류의 연필 4자루와 서로 다른 종류의 지우개 4개를 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 넣는 모든 경우 중에서 임의로 한 경우를 선택한다.

(가) 같은 층에 넣는 연필과 지우개의 개수는 서로 같다.
(나) 빈 서랍이 있을 수 있다.

2층 서랍에 넣은 연필의 개수가 2일 때, 3층 서랍에 넣은 연필의 개수가 2일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



1) 2층 서랍에 넣은 연필의 개수가 2 ⇒ 2층 서랍에 넣은 지우개의 개수가 2.

↳ 경우의수 3. ⇒ ${}_4C_2 \times 2^2 \times 3 = 12$.

① (1층 연필, 3층 연필) = (2, 0) 또는 (0, 2) = (1층 지우개, 3층 지우개)

⇒ $2^2 \times 3 \times 2 = 24$

② (1층 연필, 3층 연필) = (1, 1) = (1층 지우개, 3층 지우개)

⇒ ${}_2C_1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

∴ (1)의 경우의 수) = $12 \times (24+32)$

2) 1) 이면서 3층 서랍에 넣은 연필의 개수가 2 ⇒ $12 \times 2^2 \times 3 = 12 \times 12$.

3) By 1), 2), $\frac{q}{p} = \frac{12 \times 12}{12(24+32)} = \frac{3}{14}$ ∴ $p+q = 17$.

30. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to Y$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(1) \neq f(2)$
(나) $1 \leq \frac{f(n+1)}{f(n)} \leq 2$ $(n=1, 2, 3)$

1) $f(1) < f(2) \leq 2f(1)$

$f(2) \leq f(3) \leq 2f(2)$

$f(3) \leq f(4) \leq 2f(3)$

2) ① $f(1) = 2$

n	1	2	3	4
$f(n)$	2	3	3	3~6
			4~6	△
		4		$\boxed{4 \sim 8}$

3 — 3 — 3~6 ⇒ 4개

3 — 4~6 — △ ⇒ ${}_5H_2 - {}_2H_2 = 12$개

$7 \leq f(3) \leq 8$ 인 경우의수

4 — $\boxed{4 \sim 8}$ ⇒ ${}_5H_2 = {}_6C_2 = 15$개

② $f(1) = 3$

n	1	2	3	4
$f(n)$	3	4~6	○	△

⇒ ${}_5H_3 - {}_2H_3 = {}_7C_3 - {}_4C_3 = 31$개

$7 \leq f(2) \leq 8$인 경우의 수.

③ $f(1) \geq 4$ ⇒ ${}_5H_4 - {}_5H_3 = {}_8C_4 - {}_7C_3 = 35$개

3) By ①, ②, ③, $4+12+15+31+35 = 97$.

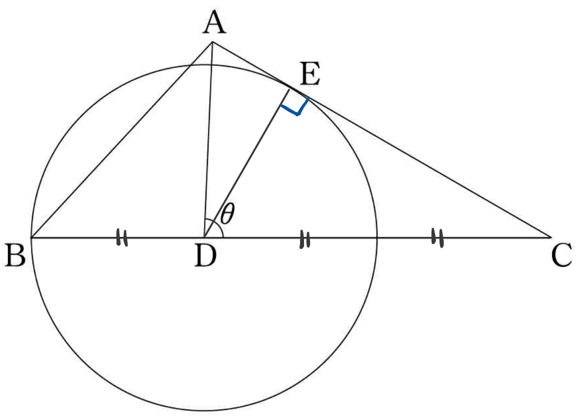
※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

단답형

29. 그림과 같이 $\overline{BC}=6$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC의 삼등분점 중 점 B에 가까운 점을 D라 할 때, 점 D를 중심으로 하고 점 B를 지나는 원이 선분 AC와 점 E에서 접한다. $\angle ADC=\theta$일 때, 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{3}+} \dfrac{f(\theta)g(\theta)-a}{\theta-\frac{\pi}{3}}=b$일 때, $\dfrac{a^2}{b}$의 값을 구하시오.

(단, $\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{5}{6}\pi$) [4점]



1) $\overline{BC}=6 \Rightarrow \overline{BD}=\overline{DE}=2,\ \overline{DC}=4$

$\Rightarrow \angle CDE=\frac{\pi}{3},\ \overline{EC}=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow \angle ADE=\theta-\frac{\pi}{3} \quad \therefore \overline{AE}=\overline{DE}\tan\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=2\tan\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

2) $f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AC}\times\sin(\angle DCE)$

$=\frac{1}{2}\times6\times\left\{2\tan\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+2\sqrt{3}\right\}\times\sin\frac{\pi}{6}$

$=3\left\{\tan\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\right\} \Rightarrow f'(\theta)=3\sec^2\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=\frac{\tan\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}}{\sin\theta}$

$\Rightarrow g'(\theta)=\frac{\sec^2\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\sin\theta-\left\{\tan\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\right\}\cos\theta}{\sin^2\theta}$

$\therefore \begin{cases} f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\sqrt{3},\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=3 \\ g\left(\frac{\pi}{3}\right)=2,\ g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{4}}=0 \end{cases}$

3) ① $a=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}+} f(\theta)g(\theta)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)g\left(\frac{\pi}{3}\right)=6\sqrt{3}$

② $b=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)g\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)g'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

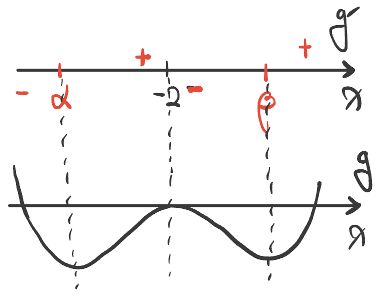
$=3\times2+3\sqrt{3}\times0$

$=6.$

30. 함수 $f(x)=\frac{1}{x}\times e^{\frac{x^2-1}{2}}$이 있다. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 사차함수 $g(x)$에 대하여 $g(1)$의 최솟값을 k라 하자. $16k^2$의 값을 구하시오. [4점]

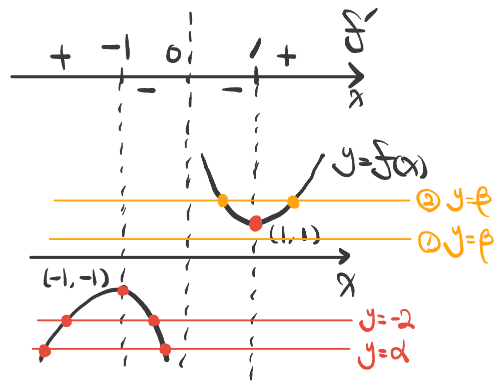
> (가) 함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 0을 갖는다.
> (나) 함수 $g(x)$의 서로 다른 극값의 개수는 함수 $(g\circ f)(x)$의 서로 다른 극값의 개수보다 크다.

1)



$\Rightarrow$ ($g(x)$의 극값의 개수) = 2 또는 3.

2) $f(x)=\frac{1}{x}\times e^{\frac{x^2-1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{x^2e^{\frac{x^2-1}{2}}-e^{\frac{x^2-1}{2}}}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}e^{\frac{x^2-1}{2}}$



$\{g(f(x))\}'=g'(f(x))f'(x)$

① $-2<\beta\le1$

$\Rightarrow g(f(x))$의 극값은

$g(\alpha), g(-2), g(-1), g(1)$

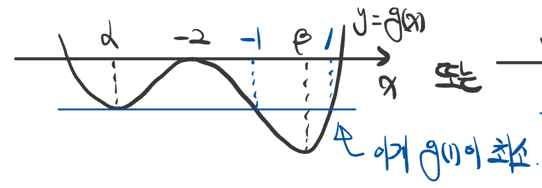
② $\beta>1$

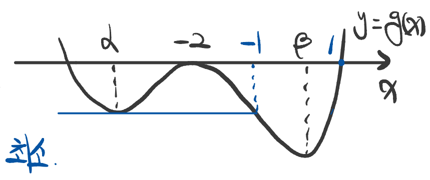
$\Rightarrow g(f(x))$의 극값은

$g(\alpha), g(-2), g(-1), g(1), g(\beta)$

3) ① i) $g(x)$의 극값의 개수가 2 $\Rightarrow$ $g(f(x))$의 극값의 개수는 1 ⊗

ii) $g(x)$의 극값의 개수가 3 $\Rightarrow$ $g(\alpha)\ne g(\beta)$, $g(f(x))$의 극값의 개수는 2

$\therefore$ 

또는


② i) $g(x)$의 극값의 개수가 2 $\Rightarrow$ $g(f(x))$의 극값의 개수는 1 ⊗

ii) $g(x)$의 극값의 개수가 3 $\Rightarrow$ $g(f(x))$의 극값의 개수는 1 또는 2 ⊗

4) $\begin{cases} g(x)=(x-\alpha)^2(x+1)(x-1)+m_{g(1)} \\ g(-2)=g'(-2)=0 \end{cases}$

$\therefore \alpha=-\frac{7}{2},\ m_{g(1)}=-\frac{27}{4}=k \Rightarrow 16k^2=27^2=729.$

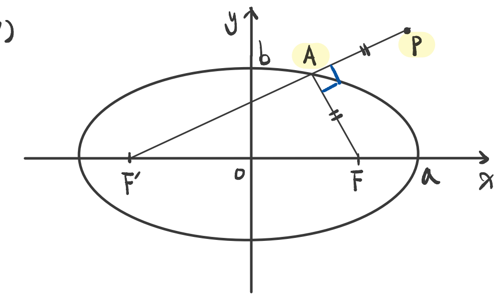
단답형

29. 두 양수 a, b에 대하여 두 초점이 F$(2,\ 0)$, F$'(-2,\ 0)$인 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 이 타원의 제1사분면 위의 점 A에 대하여 선분 F$'$A의 연장선 위에 $\overline{\text{F}'\text{P}}=2a$를 만족시키는 점 P가 있고, 타원 위의 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

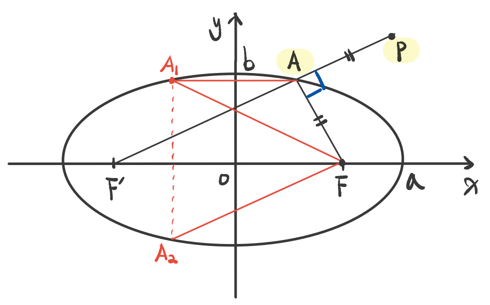
> (가) $\overline{\text{AF}}+\overline{\text{FQ}}=2a$
>
> (나) $\angle\text{PAF}=2\angle\text{PQF}=\dfrac{\pi}{2}$

사각형 AFF$'$Q의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. [4점]

1)

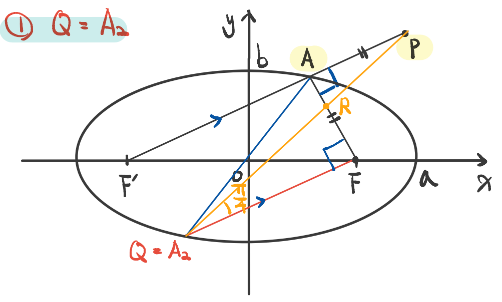


2) $\overline{AF}+\overline{FQ}=2a \iff \overline{FQ}=\overline{F'A} \iff \overline{FQ}=\overline{FA_1}=\overline{FA_2}$



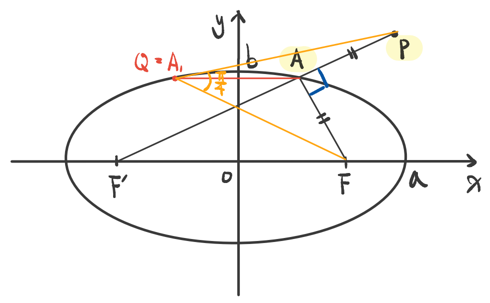
$\therefore$ $Q=A_1$ 또는 $Q=A_2$.

3) ① $Q=A_2$



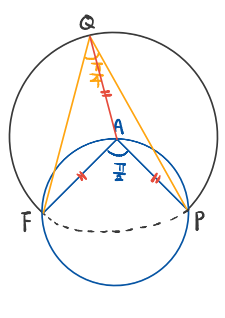
$\angle PQF=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \angle QRF=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \overline{FR}=\overline{FQ}$ ⊗

② $Q=A_1$

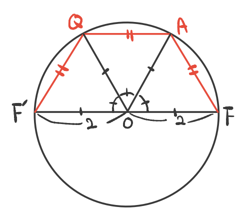


4) $\angle PQF=\frac{\pi}{4}$ ⇒ 각이 일정 ⇒ 원 위의 점

$\angle PAF=\frac{\pi}{2}$ ⇒ 각이 일정 ⇒ 원 위의 점



5) $\angle FAF'=\angle FQF'=\frac{\pi}{2}$ ⇒ 원 위의 점.



$\therefore \angle FOA=\angle AOQ=\angle QOF'=\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \overline{FA}=\overline{AQ}=\overline{QF'}=2$.

$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\times(4+2)\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

$\Rightarrow S^2=27$

30. 좌표평면에서 $\overline{\text{AB}}=4$인 선분 AB에 대하여

$$\overrightarrow{\text{AP}}\cdot\overrightarrow{\text{BP}}=\frac{1}{3}|\overrightarrow{\text{BP}}|^2$$

를 만족시키는 점 P 중 삼각형 ABP의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 X라 하자. 상수 k에 대하여 점 Q가 다음 조건을 만족시킬 때, $|2\overrightarrow{\text{QX}}+\overrightarrow{\text{QB}}|=a$이다. ka^2의 값을 구하시오. [4점]

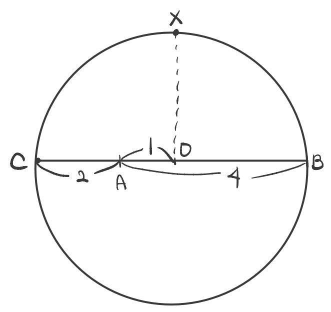
> (가) $|\overrightarrow{\text{AQ}}+\overrightarrow{\text{BQ}}|=\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AX}}$
>
> (나) $k\overrightarrow{\text{QB}}=\overrightarrow{\text{AX}}$

1) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BP}=0 \iff \left(\overrightarrow{AP}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BP}\right)\cdot\overrightarrow{BP}=0$

$\iff \dfrac{3\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{BP}}{3}\cdot\overrightarrow{BP}=0$

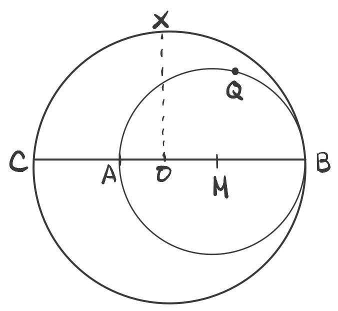
$\iff \dfrac{3\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{BP}}{2}\cdot\overrightarrow{BP}=0$

$\iff \overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$. (점 C는 선분 BA의 3:1 외분점).

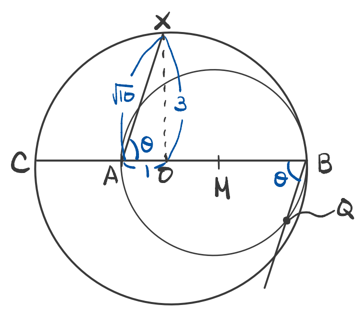


2) $|\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{BQ}|=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AX}=\overline{AO}\times\overline{AB}=4$.

$\iff |\overrightarrow{MQ}|=2$ (점 M은 선분 AB의 1:1 내분점)



3) $k\overrightarrow{QB}=\overrightarrow{AX}$: $\overrightarrow{AX}$와 $\overrightarrow{QB}$는 평행.



$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow \overline{QB}=2\overline{MB}\cos\theta=\frac{4}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow \frac{2}{5}k\sqrt{10}=\sqrt{10}$

$\therefore k=\frac{5}{2}$

4) $a^2=|2\overrightarrow{QX}+\overrightarrow{QB}|^2=|8\overrightarrow{QB}+2\overrightarrow{BA}|^2=64\times\frac{16}{10}-32\times\frac{2}{5}\times4+4\times16$

$=32\times\frac{8}{5}+32\times2$

$=32\times\frac{18}{5}$

$\therefore ka^2=\frac{5}{2}\times32\times\frac{18}{5}=32\times9=288$