수능특강 핵심정리 문제 리스트만 모음

모수_모두의수학
모수 | 모두의수학

1. 함수의 극한

#14p Level2 5번 $x \to -\infty$일 때 극한
#14p Level2 8번 좌표로 삼각형 넓이 구하는 3가지 방법
#15p Level3 3번 내접원 반지름 길이 구하기

2. 함수의 연속

#25p Level2 4번 지수/로그함수는 점근선/고정점 표시하기
#27p Level3 1번
#27p Level3 3번 곱해서 연속일 때

3. 미분계수와 도함수

#39p Level1 6번 미분가능할 때만 가능한 미분계수 변형
#41p Level2 5번 관계식이 주어진 함수의 도함수
#42p Level3 1번 이차함수의 평균변화율과 순간변화율
#42p Level3 2번 $f(x) \le g(x)$이면 $f'(x) \le g'(x)$일까?
#42p Level3 3번 절댓값과 미분가능성
#42p Level3 6번 홀/짝/자연수/정수 조건일 때 범위 이용

4. 도함수의 활용(1)

#56p Level2 5번 역함수를 나타내는 표현(정오표 확인)
#56p Level2 6번 극대, 극소의 정의는 미분과 관련 없음
#57p Level3 1번 교점 개수 세기
#57p Level3 3번 삼차함수 비율관계

5. 도함수의 활용(2)

#68p Level2 7번 삼차함수 비율관계
#69p Level3 1번 $[t, t+1]$에서 최댓값 함수 그리기
#69p Level3 2번 $y=q$에 대한 대칭을 나타내는 식
#69p Level3 3번 절댓값과 미분가능성

6. 부정적분과 정적분

#85p Level2 7번 우함수, 기함수의 미분과 적분
#86p Level3 1번 부정적분 눈썰미 $f(x)+xf'(x)$
#86p Level3 2번
#86p Level3 3번 부정적분끼리는 y축 방향 평행이동 관계

7. 정적분의 활용

#91p 유제 2번 이차/삼차함수의 넓이 공식
#101p Level2 5번 차함수의 넓이
#101p Level2 8번 시작할 때 위치 항상 확인하기
#102p Level3 2번
#102p Level3 3번 정적분으로 정의된 함수의 도함수

1. 함수의 극한

#14p Level2 5번 $x \to -\infty$일 때 극한

#14p Level2 8번 좌표로 삼각형 넓이 구하는 3가지 방법

#15p Level3 3번 내접원 반지름 길이 구하기

2. 함수의 연속

#25p Level2 4번 지수/로그함수는 점근선/고정점 표시하기

#27p Level3 1번

#27p Level3 3번 곱해서 연속일 때

*$\sqrt{9}$ 를 $\ominus 2$로 나누면 $\ominus\sqrt{\frac{9}{2^2}}$

#14p Level2 5번 $x\to-\infty$일 때 극한

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}+ax}{\sqrt{9x^2+4x+1}-3x}=\frac{1}{2}$$ 일 때, 상수 a의 값은?

풀이1

$$\frac{\ominus\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+a}{\ominus\sqrt{9+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-3}\to\frac{a-1}{-6}=\frac{1}{2},\ \boxed{a=-2}$$

($\frac{3}{x^2}\to 0$, $\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\to 0$)

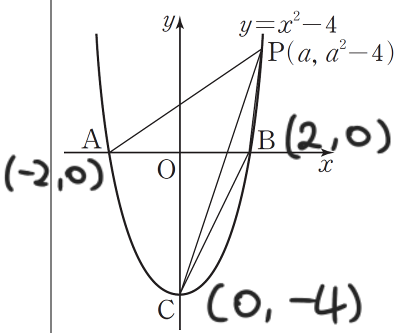
풀이2

$-x=t$ 치환 $(t\to\infty)$

$$\frac{\sqrt{t^2+3}-at}{\sqrt{9t^2-4t+1}+3t}=\frac{\sqrt{1+\frac{3}{t^2}}-a}{\sqrt{9-\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}}+3}\to\frac{1-a}{6}=\frac{1}{2}$$

#14p Level2 8번 좌표로 삼각형 넓이 구하는 3가지 방법

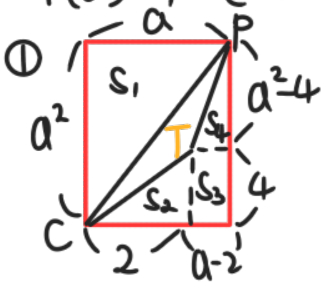
곡선 $y=x^2-4$ 위의 점 $P(a,\ a^2-4)\ (a>2)$에 대하여 삼각형 PAB와 삼각형 PCB의 넓이를 각각 $S(a)$, $T(a)$라 할 때, $\lim_{a\to2+}\frac{S(a)}{T(a)}$의 값은?



$$S(a)=\frac{1}{2}\times4\times(a^2-4)$$
$$=2(a-2)(a+2)$$

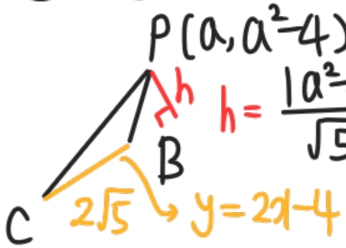
T(a) 구하는 3가지 방법

①



$$T=a^3-\frac{a^3}{2}-4$$
$$-4(a-2)-\frac{1}{2}(a-2)(a^2-4)$$
$$=a(a-2)$$

② 직선~점



$$h=\frac{|a^2-2a|}{\sqrt{5}}$$

$$T=|a^2-2a|$$
$$=a(a-2)\ (a>0)$$

③ 사선 공식, 신발끈 공식 (다각형)

$P(a, a^2-4)$, $C(0,-4)$, $B(2,0)$

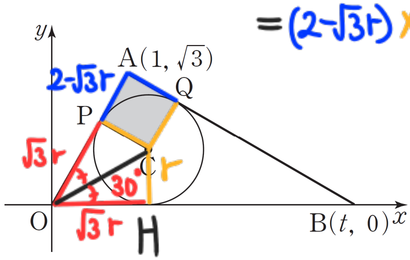
$$T=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}0 & 2 & a & 0\\ -4 & 0 & a^2-4 & -4\end{matrix}\right|$$
$$=\frac{1}{2}|(0+2(a^2-4)-4a)-(-8+0+0)|$$
$$=|a^2-2a|=a(a-2)$$

$$\lim_{a\to2+}\frac{S(a)}{T(a)}=\lim_{a\to2+}\frac{2(a+2)}{a}=4\quad\boxed{4}$$

#15p Level3 3번 내접원 반지름 길이 구하기

사각형 APCQ의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}S(t)$의 값은? (단, $t>0$, O는 원점)

$=(2-\sqrt{3}r)\times r$



$\overline{AO}=2$

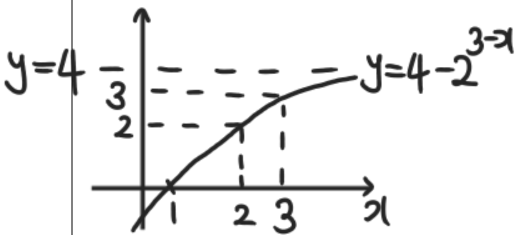
$\overline{OB}=t$

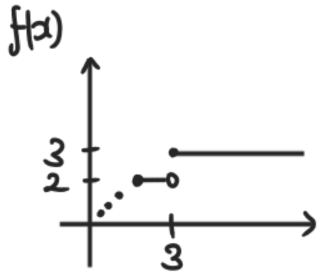
$\overline{BA}=\sqrt{(t-1)^2+3}$

$$\triangle AOB=\triangle AOC+\triangle OBC+\triangle BAC$$
$$\frac{1}{2}\times t\times\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times\overline{AO}\times r+\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times r+\frac{1}{2}\times\overline{BA}\times r$$
$$\frac{\sqrt{3}t}{2}=\frac{r}{2}\left(2+t+\sqrt{(t-1)^2+3}\right)$$
$$r=\frac{\sqrt{3}t}{t+2+\sqrt{(t-1)^2+3}}\to\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\lim_{t\to\infty}S(t)=\lim_{t\to\infty}(2-\sqrt{3}r)\times r=\left(2-\frac{3}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

#25p Level2 4번 지수/로그함수는 점근선/정점 표시하기

실수 x에 대하여 부등식 $m \le 4-2^{3-x} < m+1$을 만족시키는 정수 m의 값을 $f(x)$라 하자. 함수 $f(x)$가 구간 (a, ∞)에서 연속이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오.





$a=3$

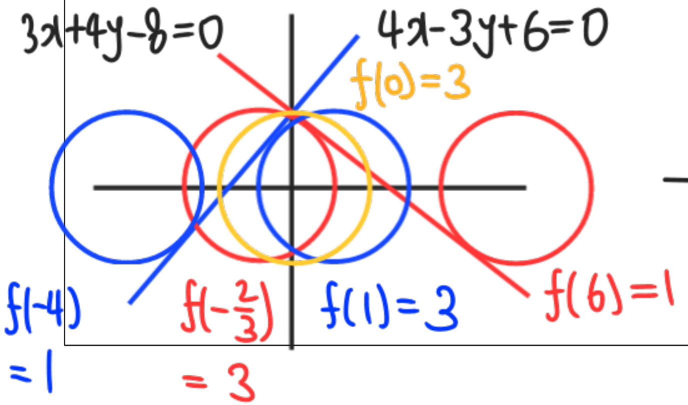
$\boxed{3}$

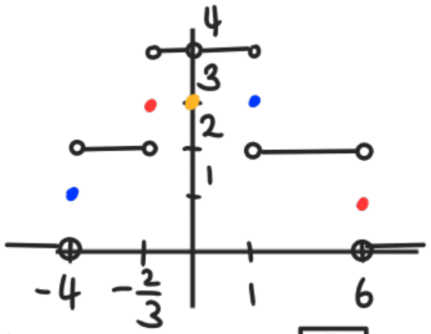
#27p Level3 1번

실수 t에 대하여 원 $(x-t)^2+y^2=4$가 두 직선 ① $3x+4y-8=0$, ② $4x-3y+6=0$과 만나는 서로 다른 점의 개수를 $f(t)$라 하자. 함수 $f(t)$가 $t=a$에서 불연속인 모든 실수 a의 개수는?

① 과 접할 때 $\dfrac{|3t-8|}{5}=2$, $t=6$ OR $t=-\dfrac{2}{3}$

② 와 접할 때 $\dfrac{|4t+6|}{5}=2$, $t=1$ OR $t=-4$





$\boxed{5}$

#27p Level3 3번 곱해서 연속일 때

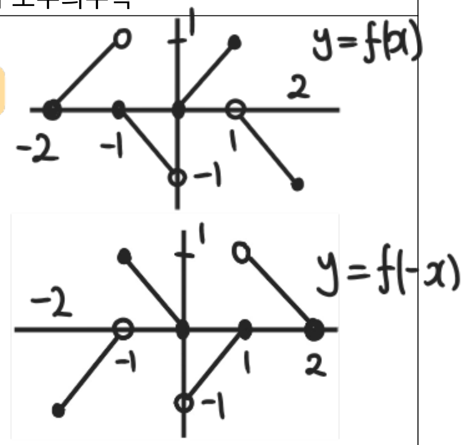
닫힌구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (-2 \le x < -1) \\ -x-1 & (-1 \le x < 0) \\ x & (0 \le x \le 1) \\ -x+1 & (1 < x \le 2) \end{cases}$$

에 대하여 두 함수 $g(x)$와 $h(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

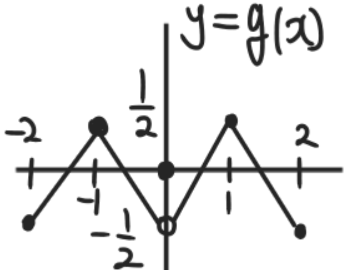


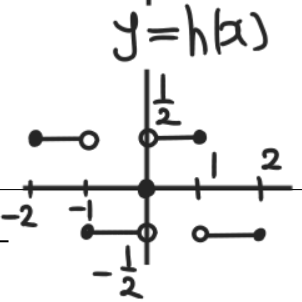
< 보 기 >

~~ㄱ~~. 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $-2<a<0$인 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x \to a+} h(x)=h(a)$이다.

~~ㄷ~~. 함수 $\{g(x)+k\}h(x)$가 $x=b(-2<b<2)$에서 불연속인 실수 b의 개수가 1이 되도록 하는 양수 k의 값이 존재한다. $(g(x)+k) \times h(x)$





~~ㄷ~~

$x \to -1-$ $\left(\frac{1}{2}+k\right) \times \frac{1}{2}$

$x=-1$ $\left(\frac{1}{2}+k\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$ $k=-\frac{1}{2}$ → $x=0$ 불연속

$x=-1+$ $\left(\frac{1}{2}+k\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x=0-$ $\left(-\frac{1}{2}+k\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x=0$ $(0+k) \times 0$ $k=\frac{1}{2}$ → $x=\pm1$ 불연속

$x=0+$ $\left(-\frac{1}{2}+k\right) \times \frac{1}{2}$

$x=1-$ $\left(\frac{1}{2}+k\right) \times \frac{1}{2}$

$x=1$ $\left(\frac{1}{2}+k\right) \times \frac{1}{2}$ $k=-\frac{1}{2}$ → $x=0$ 불연속

$x=1+$ $\left(\frac{1}{2}+k\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

3. 미분계수와 도함수

#39p Level1 6번 미분가능할 때만 가능한 미분계수 변형

#41p Level2 5번 관계식이 주어진 함수의 도함수

#42p Level3 1번 이차함수의 평균변화율과 순간변화율

#42p Level3 2번 $f(x) \leq g(x)$ 이면 $f'(x) \leq g'(x)$ 일까?

#42p Level3 3번 절댓값과 미분가능성

#42p Level3 6번 홀/짝/자연수/정수 조건일 때 범위 이용

#39p Level1 6번 미분가능할 때만 가능한 미분계수 변형

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=x^2f'(2)-6$을 만족시킬 때, $f'(4)$의 값을 구하시오.

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+1\times\frac{f(x-h)-f(x)}{-1\times h}$$

$\to f'(x)$ 수렴

$f'(x)$ 수렴

$2f'(x)=x^2f'(2)-6$

$x=2 : f'(2)=3$

$x=4 : f'(4)=21$

$\boxed{21}$

#41p Level2 5번 관계식이 주어진 함수의 도함수

미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x, y에 대하여

$f(x+y)=f(x)+f(y)+x^2y+xy^2-xy$

를 만족시키고 $f'(2)=3$일 때, 함수 $f'(x)$의 최솟값은?

$x+y=x=y$ 인 값 우선순위로 대입

$x=0, y=0 :\ f(0)=0$

y 대신 h 대입 후 변화율 꼴 정리

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(h)-f(0)}{h-0}+x^2+xh-x$$

0 빼나 마나

$h\to 0$ 일 때 $f'(x)=f'(0)+x^2-x$

$x=2 :\ f'(0)=1$

$f'(x)=x^2-x+1$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

최솟값 $\frac{3}{4}$ $\boxed{\frac{3}{4}}$

* 미분 불가일 때 ?

$f(x)=|x|$

① 오개념

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)-f(0)}{h}+\frac{f(-h)-f(0)}{-h}\right)$$

오류

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(-h)-f(0)}{-h}$$

$=f'(0)+f'(0)$

$=2f'(0)$ ∴ 존재하지 않음

② 옳은 방법

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|-h|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

#42p Level3 1번 이차함수의 평균변화율과 순간변화율

함수 $f(x)=x^2-2x+2$와 a가 아닌 실수 t에 대하여 $g(t)$를 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 t까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율이라 하고, $g(a)=2a-2$라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 상수이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $t>2-a$이면 $g(t)>0$이다.

ㄴ. $b>a$이고 $g(b)=0$이면 $b>1$이다.

ㄷ. $b\neq a$이고 $g(b)=f'(c)$이면 $c=\frac{a+b}{2}$이다.

$\boxed{ㄱ, ㄴ, ㄷ}$

$g(t)=f'\left(\frac{a+t}{2}\right)$

$=a+t-2$

* 참고

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ 의

$[x_1, x_2]$에서 평균 변화율은

$\frac{x_1+x_2}{2}$ 에서 순간 변화율과 같다.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{a(x_2^2-x_1^2)+b(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=a(x_2+x_1)+b$$

$$=f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

ㄱ $t>2-a$

$\Rightarrow a+t-2>0$

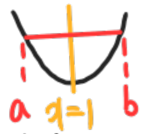
$\Rightarrow g(t)>0$

ㄴ $g(b)=a+b-2=0$

$\Rightarrow b+b-2>0$

$\Rightarrow b>1$

* ㄴ 그래프 풀이



∴ $b>1$

ㄷ 왼쪽 참고에 의해 참.

직접 계산한다면 $f'(x)=2x-2$

이므로 $a+b-2=2c-2$

$\Rightarrow c=\frac{a+b}{2}$

→ 거짓! $f(x)=2x-1$, $g(x)=x^2$

#42p Level3 2번 $f(x) \le g(x)$ 이면 $f'(x) \le g'(x)$일까?

실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x \neq 0$일 때, $f(x) > 0$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x) - f(x) \le 2x + 3$이다.

$g(0)$

$f(0)=0$, $g(0)=3$일 때, $g'(0)$의 값은?

$f'(0)$

$= \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \ge 0$

$= \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \le 0$

$=0$ $\therefore f'(0)=0$

$g(x)-g(0)-(f(x)-f(0)) \le 2x$

$x>0$: $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} - \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \le 2 \xrightarrow{x\to 0+} g'(0)-f'(0) \le 2$

$x<0$: $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} - \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \ge 2 \xrightarrow{x\to 0-} g'(0)-f'(0) \ge 2$

$\to g'(0)=f'(0)+2$
$=2$

$\boxed{2}$

#42p Level3 3번 절댓값과 미분가능성

두 함수 $f(x)=x-5$, $g(x)=x^3+(2-a)x^2+(1-2a)x-a$에 대하여 함수 $f(x)|g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은?

$g(-1) = -1+2-a-1+2a-a=0$

$g(x) = (x+1)(x^2+(1-a)x-a)$
$= (x+1)^2(x-a)$

$h(x) = f(x)|g(x)|$
$= (x-5)|(x+1)^2(x-a)|$

$x=a$ 가 중근이려면

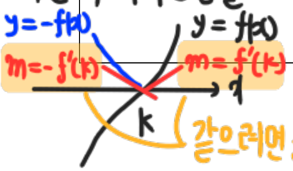
$a=5$ 또는 $a=-1$

$\boxed{4}$

* 참고

다항함수 $f(x)$,
$f(k)=0$,
$|f(x)|$는 $x=k$ 미분가능
$\Rightarrow f'(k)=0$, $x=k$ 중근
$(x-k)^2$인수

직관적 이해 (엄밀 X)



#42p Level3 6번 홀/짝/자연수/정수 조건일 때 범위 이용

최고차항의 계수와 상수항이 모두 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$\begin{cases} x^2-4 \le f(x) \le x-2 \ (2-t<x<2) & -① \\ x-2 \le f(x) \le x^2-4 \ (2<x<x+t) & -② \end{cases}$$

를 만족시키는 양의 실수 t가 존재한다. $\lim_{x\to 1}\{f'(0)-f'(x)\}$의 값이 짝수일 때, $f(1)$의 값은?

$f'(0)-f'(1)$

예민하게 반응 (범위만 알아도 구할수 있겠다)

① 에서 $x\to 2-$ $0 \le \lim_{x\to 2-} f(x) = f(2) \le 0$ (연속)

$\therefore f(2)=0$

① $x-2<0$ 이므로

$\frac{x^2-4}{x-2} \ge \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \ge \frac{x-2}{x-2}$

$x+2 \ge \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \ge 1$

$x\to 2-$ 일때 $1 \le f'(2) \le 4$

② $x-2>0$ 이므로

$\frac{x-2}{x-2} \le \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \le \frac{x^2-4}{x-2}$

$1 \le \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \le x+2$

$x\to 2+$ 일때 $1 \le f'(2) \le 4$

$\therefore 1 \le f'(2) \le 4$

$f(x) = x^3+ax^2+bx+1$

$f(2) = 4a+2b+9=0$

$f(x) = x^3+ax^2-\frac{4a+9}{2}x+1$

$f'(x) = 3x^2+2ax-\frac{4a+9}{2}$

$1 \le f'(2) = \frac{4a+15}{2} \le 4$

$\Rightarrow -\frac{13}{4} \le a \le -\frac{7}{4}$

$f'(0)-f'(1) = -2a-3$

$\frac{1}{2} \le -2a-3 \le \frac{7}{2}$

짝수 $=2$

$a=-\frac{5}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

$f(1) = a+b+2=0$

$\boxed{0}$

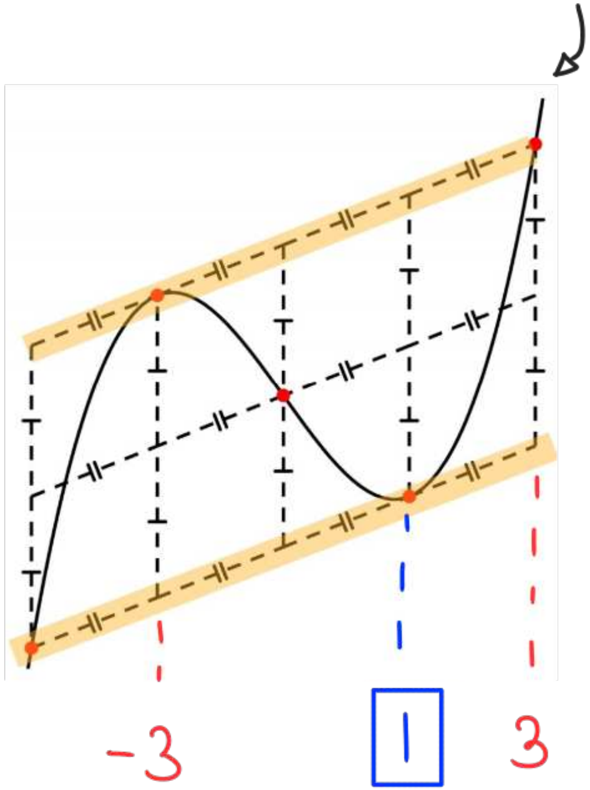
4. 도함수의 활용

#56p Level2 5번 역함수를 나타내는 표현(정오표 확인)

#56p Level2 6번 극대, 극소의 정의는 미분과 관련 없음

#57p Level3 1번 교점 개수 세기

#57p Level3 3번 삼차함수 비율관계



#56p Level2 5번 역함수를 나타내는 표현(정오표 확인)

함수 $f(x)=x^3+ax^2+(a^2-1)x+3$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

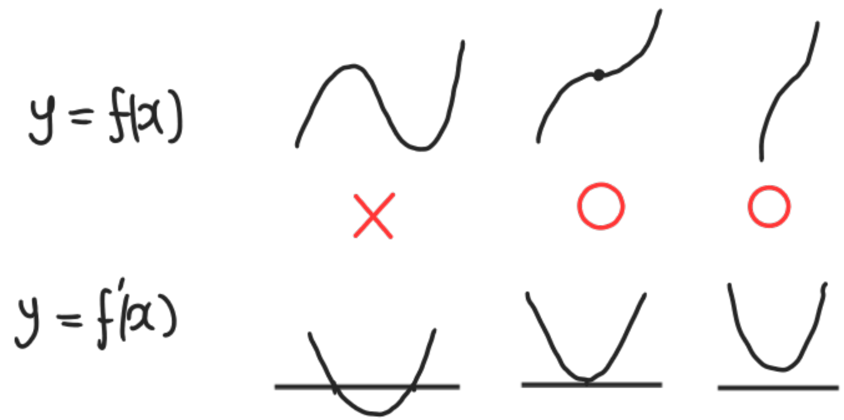
f의 역함수 g

(가) 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x$인 함수 $g(x)$가 존재한다.
(나) $f(1)=5$

이거 없으면 역함수 보장 X

$$f(1)=a^2+a+3=5$$
$$(a+2)(a-1)=0$$
$$a=-2 \text{ 또는 } a=1$$

삼차함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다 ⇝ $f'(x)\geq 0$.



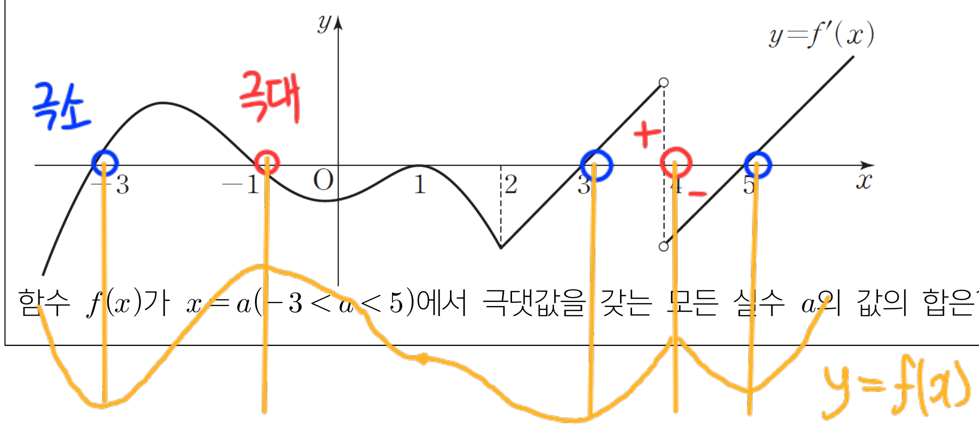
$\boxed{21}$

$$f'(x)=3x^2+2ax+a^2-1\geq 0$$
$$D/4=a^2-3(a^2-1)=-2a^2+3\leq 0 \quad \therefore a=-2,\ f(3)=21$$

근방 최대/최소

#56p Level2 6번 극대, 극소의 정의는 미분과 관련 없음

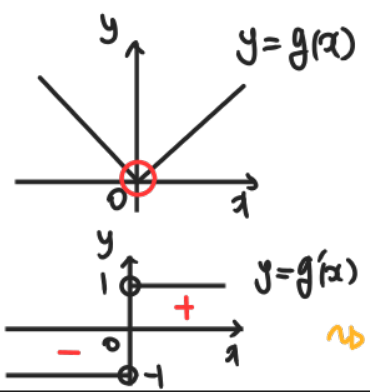
실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$가 $x=a(-3<a<5)$에서 극댓값을 갖는 모든 실수 a의 값의 합은?

$\boxed{3}$

* $g(x)=|x|$: $x=0$ 에서 극소 O 미분 X



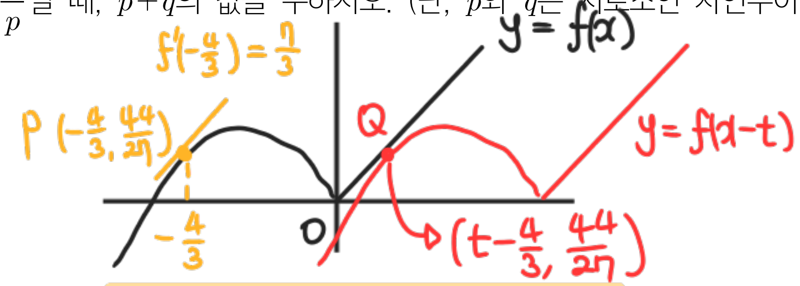
⇝ $g'(0)$ 값은 없지만 극소가 맞다.

#57p Level3 1번 교점 개수 세기

함수 $f(x)=\begin{cases} x^3-3x & (x<0) \\ \frac{7}{3}x & (x\ge 0)\end{cases}$과 양의 실수 t에 대하여

함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ f(x-t) & (x\ge a)\end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 실수 α의 값이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-3 & (x<0) \\ \frac{7}{3} & (x>0)\end{cases}$



Ⓟ $3x^2-3=\frac{7}{3}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}$, $f(-\frac{4}{3})=\frac{44}{27}$

Ⓠ $y=\frac{7}{3}x$에 $(t-\frac{4}{3}, \frac{44}{27})$ 대입

$\frac{44}{27}=\frac{7}{3}t-\frac{28}{9}$, $\frac{7}{3}t=\frac{128}{27}$, $t=\frac{128}{63}$

$\boxed{191}$

#57p Level3 3번 삼차함수 비율관계

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a는 상수이다.)

$f(0)=3$, $f'(0)=-1$

(가) 어떤 다항함수 $g(x)$와 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=(x^2-a)^3$이다.
(나) 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 3)$에서 직선 $y=-x+3$에 접한다.

일단 $a=0$ 이면 $f(x)=kx^3$, (나)조건 만족 X

$a<0$ 이면 $f(x)$는 삼차가 될 수 없다

$a=-1$ 라면 $f(x)\times g(x)=(x^2+1)^3$

$f(x)=(x^2+1)\cdot(x^2+1)^2$,

또는 $(x^2+1)(x+i)$???

따라서 $a>0$

Graph로도 ①~③ 제외 가능!

$f(x)g(x)=(x-\sqrt{a})^3(x+\sqrt{a})^3$, $(k>0)$

① $f(x)=k(x-\sqrt{a})^3$, $f(0)=-ka\sqrt{a}=3$ 부호모순

② $f(x)=k(x+\sqrt{a})^3$, $f(0)=ka\sqrt{a}=3$

$f'(x)=3k(x+\sqrt{a})^2$, $f'(0)=3ka=-1$ 부호모순

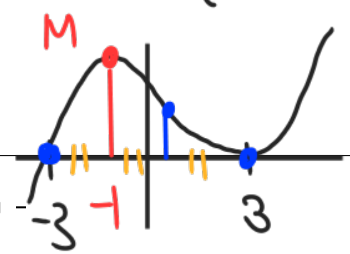
③ $f(x)=k(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})^2$, $f(0)=-ka\sqrt{a}=3$ 부호모순

④ $f(x)=k(x-\sqrt{a})^2(x+\sqrt{a})$, $f(0)=ka\sqrt{a}=3$

$f(x)=k((x^2-a)+2x(x-\sqrt{a}))$, $f(0)=-ka=-1$

$a=9, k=\frac{1}{9}$

$f(x)=\frac{1}{9}(x-3)^2(x+3)$



$M=f(-1)=\frac{1}{9}\times 16\times 2=\frac{32}{9}$

$\boxed{\frac{32}{9}}$

5. 도함수의 활용

#68p Level2 7번 삼차함수 비율관계

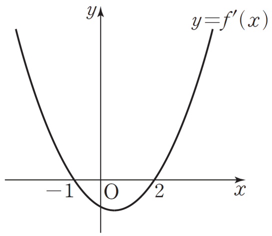
#69p Level3 1번 $[t, t+1]$에서 최댓값 함수 그리기

#69p Level3 2번 $y=q$에 대한 대칭을 나타내는 식

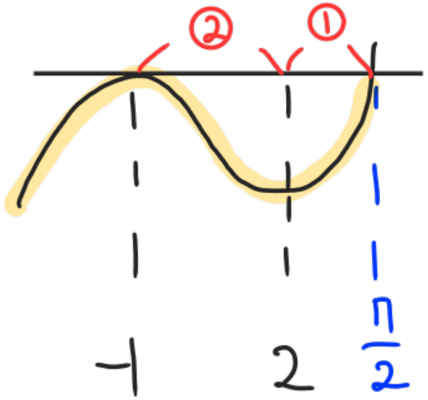
#69p Level3 3번 절댓값과 미분가능성

#68p Level2 7번 삼차함수 비율관계

삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다. $x \le a$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \le f(-1)$이 성립하도록 하는 실수 a의 최댓값은?



$\boxed{\frac{\pi}{2}}$

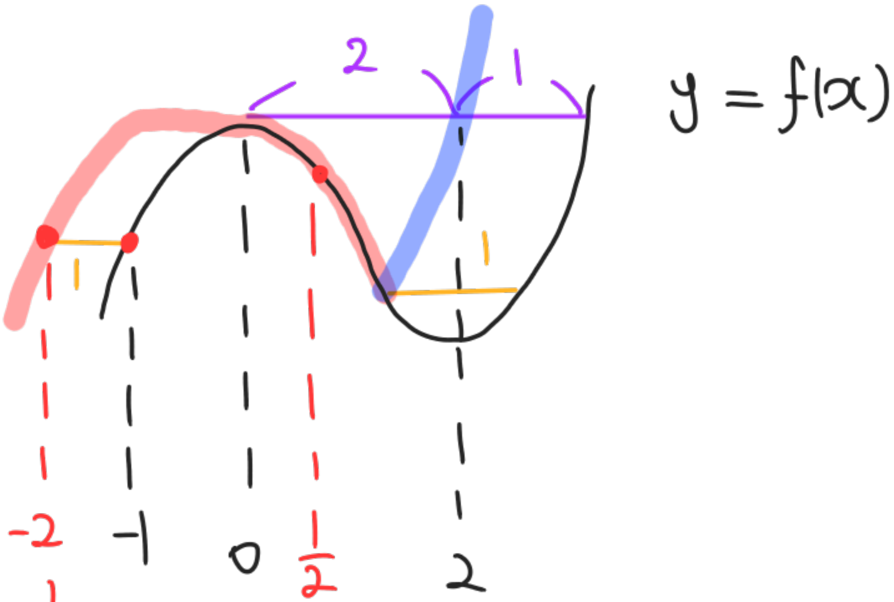


#69p Level3 1번 $[t,\ t+1]$에서 최댓값 함수 그리기

실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t,\ t+1]$에서 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, $g'(-2)+g'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은?

$$f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$$

$\boxed{\frac{9}{4}}$



$g'(-2)=f'(-1)=3$

$g'\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}$

#69p Level3 2번 $y=q$에 대한 대칭을 나타내는 식

함수 $f(x)=x^4+ax^3+b$와 양수 c에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<c) \\ 8-f(x) & (x \geq c) \end{cases}$$ ⤳ $y=4$ 대칭

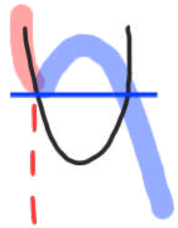
가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

$\boxed{\dfrac{29}{3}}$

> 실수 k에 대하여 집합 S를
>
> $S=\{k \mid$ 함수 $|g(x)-k|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.$\}$
>
> 라 하면 집합 S의 원소의 개수는 2이고, 집합 S의 모든 원소의 합은 $\dfrac{25}{3}$이다.

$f'(x)=x^2(4x+3a) \rightarrow x=0,\ -\frac{3}{4}a$

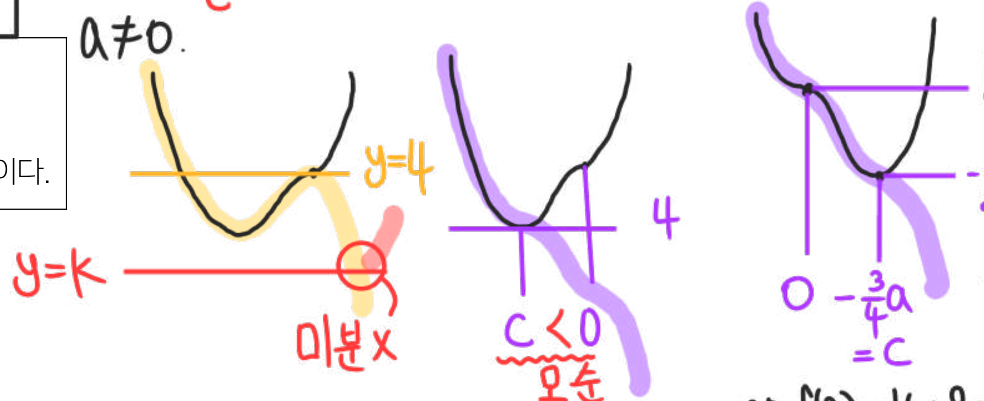
$a=0$



⤳ $g(x)$는 $x=c$ 에서 미분불가

→ $|g(x)-k|$는 $g(x)$보다 미분불가점 적지 않다

$a \neq 0$.



합 $\frac{25}{3}$

$b=\frac{13}{3}$

$-\frac{27}{256}a^4+b=4$

$\therefore a=-\frac{4}{3}$

⤳ $f(2)=16+8a+b=\frac{29}{3}$

#69p Level3 3번 절댓값과 미분가능성

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 양수 a에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=|(x+a)f(x)|$

라 할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$\boxed{75}$

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서만 미분가능하지 않다. → $(x+a)^2$, $(x-1)$ 인수
>
> (나) $x>k$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $g(x)>27$이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은 2이다.

$f(4)$의 값을 구하시오.

$*\ h(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2$

⤳ $|h(x)|$는 $x=\alpha$ 미분가능 X

$x=\beta$ 미분가능 O

$f(x)=(x+a)(x-1)(x-k)$

→ $x=k$ 에서 미분가능하려면

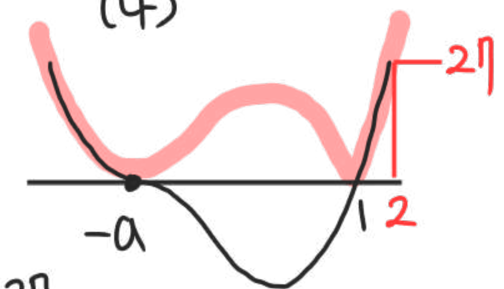
$f(x)=(x+a)^2(x-1)$

$g(x)=|(x+a)^3(x-1)|$

(나)에 의해 $g(2)=(a+2)^3=27$

$a=1$. $\therefore f(4)=75$

(나)



6. 부정적분과 정적분

#85p Level2 7번 우함수, 기함수의 미분과 적분

#86p Level3 1번 부정적분 눈썰미 $f(x)+xf'(x)$

#86p Level3 2번

#86p Level3 3번 부정적분끼리는 y축 방향 평행이동 관계

#85p Level2 7번 우함수, 기함수의 미분과 적분

$f(0)=1$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는대로 고른 것은?

ㄱ, ㄴ

< 보 기 >

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=-g(x)$이다.

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$이면 $g(1)=2$이다.

ㄷ. $g(1)=0$이면 $\int_0^1 g(x)dx=1$이다.

* 참고 (우함수)' = (기함수), (기함수)' = (우함수),
∫(우함수) = (0, c) 대칭 ∫(기함수) = (우함수)

ㄱ $g(-x)=\int_x^{-x} f(t)dt$
$= -\int_{-x}^{x} f(t)dt = -g(x)$

ㄴ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$
$2b=0$
$g(1)=\int_{-1}^{1} \cancel{ax^3}+\cancel{cx}+1\,dx$
$=2$

ㄷ $g(1)=0$
$=\int_{-1}^{1} \cancel{ax^3}+bx^2+\cancel{cx}+1\,dx$
$=2\times\left(\frac{b}{3}+1\right)$ $\therefore b=-3$
$g(x)=\int_{-x}^{x} \cancel{ax^3}-3x^2+\cancel{cx}+1\,dx$
$=2\times(-x^3+x)$
$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 -2x^3+2x\,dx$
$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_0^1$
$=\frac{1}{3}$

#86p Level3 1번 부정적분 눈썰미 $f(x)+xf'(x)$

다항함수 $f(x)$와 삼차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

5

(가) $f(1)=3$, $g(0)=0$ $(xf(x))'$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+xf'(x)=3x^2-6x+4+g'(x)$이다.

(다) 함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(p, 0)$ $(p\neq 0)$에서 x축에 접한다.

(가),(다) → $g(x)=x(x-p)^2$

$(xf(x))'=3x^2-6x+4+g'(x)$
$xf(x)=x^3-3x^2+4x+g(x)+C$
$x=0$ $0=g(0)+C$, $C=0$
$x=1$ $3=2+g(1)$, $g(1)=1=(1-p)^2$, $\therefore p=2$
$xf(x)=x^3-3x^2+4x+x(x-2)^2$
$x=3$ $3f(3)=12+3=15$ $\therefore f(3)=5$

$\boxed{18}$

#86p Level3 2번

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(a+b)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x \{f(t)+f'(t)\}dt = xf(x)+\frac{3}{4}x^4+ax^3+3x^2$ 이다.

(나) 함수 $|f(x)|$는 서로 다른 두 개의 극솟값 $f(b)$, 16을 갖는다. (단, $b>0$)

(가) $\cancel{f(x)}+f'(x) = \cancel{f(x)}+xf'(x)+3x^3+3ax^2+6x$

$(1-x)f'(x) = 3x^3+3ax^2+6x$

$x=1 \rhd 0 = 9+3a,\ a=-3.$

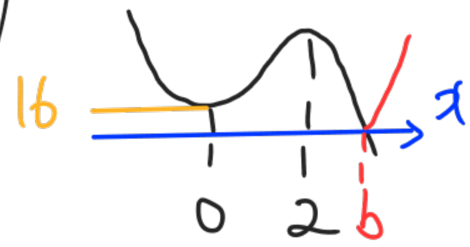
$(1-x)f'(x) = 3x(x-1)(x-2)$

$f'(x) = -3x(x-2) = -3x^2+6x$

$f(x) = -x^3+3x^2+16$

$= -(x-4)(x^2+x+4)$

$\hookrightarrow b=4$

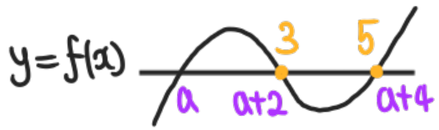


$f(a+b) = f(1) = 18$

#86p Level3 3번 부정적분끼리는 y축 방향 평행이동 관계

삼차함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 함수 $F(x)$의 사차항의 계수는 1이고, 함수 $y=F(x)$의 그래프는 그림과 같이 두 점 $(a, 0), (b, 0)$에서 x축에 접한다. $F(p)=32$일 때, 두 함수

$$S(x)=\int_p^x f(t)dt,\ T(x)=\int_p^x |f(t)|dt$$

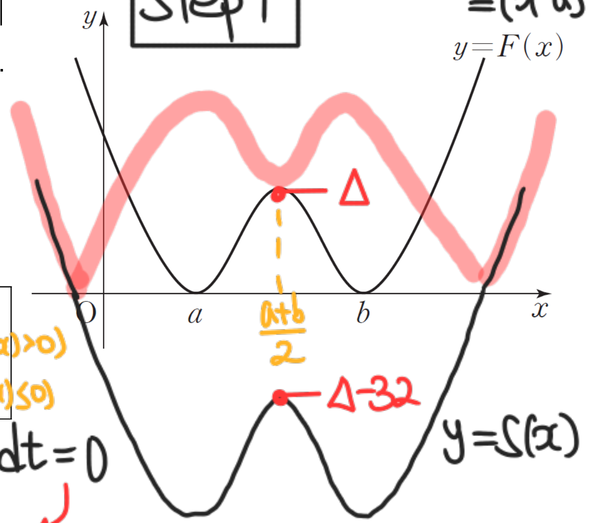


가 다음 조건을 만족시킨다. $f(2)$의 값은? (단, p는 상수이고, $0<a<3<b$이다.)

(가) 두 함수 $y=F(x), y=|S(x)|$의 그래프의 한 교점 $(k, F(k))$에서의 접선의 기울기가 서로 같다.

(나) $S(3)+T(3)=S(5)+T(5)$

Step 1



$=(x-a)^2(x-b)^2$

$F'(x) = S'(x) = f(x)$

$\rightsquigarrow S(x) = F(x)+C$

$x=p,\quad 0 = 32+C$

$S(x) = F(x)-32$

$\Delta+(\Delta-32)=0$

$\Delta=16$

$F\left(\frac{a+b}{2}\right)=16=\left(\frac{a-b}{2}\right)^4$

$\therefore b-a=4$

Step2 $\hookrightarrow T(5)-T(3)+S(5)-S(3)=0$

$\int_p^5|f(t)|dt-\int_p^3|f(t)|dt+\int_p^5 f(t)dt-\int_p^3 f(t)dt=0$

$\int_3^5|f(t)|dt+\int_3^5 f(t)dt=0.$

$\rhd \int_3^5 \{|f(t)|+f(t)\}dt=0$

$\begin{cases} 2f(x) & (f(x)>0) \\ 0 & (f(x)\le 0) \end{cases}$

≥ 0

$|f(t)|+f(t)=0$

$3\le t\le 5$에서 $f(t)\le 0$

$a+2=3,\ a+4=5$

$\therefore a=1,\ b=5$

Step3 $F(x) = (x-1)^2(x-5)^2$

$f(x) = F'(x) = 2(x-1)(x-5)(2x-6)$

$f(2) = 12$

$\boxed{12}$

7. 정적분의 활용

#91p 유제 2번 이차/삼차함수의 넓이 공식

#101p Level2 5번 차함수의 넓이

#101p Level2 8번 시작할 때 위치 항상 확인하기

#102p Level3 2번

#102p Level3 3번 정적분으로 정의된 함수의 도함수

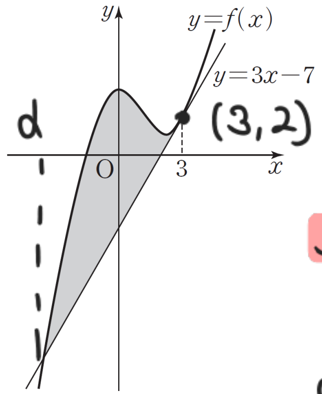
#91p 유제 2번 이차/삼차함수의 넓이 공식

$\boxed{36}$

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+b$에 대하여 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x-7$이 점 $(3, 2)$에서 접한다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x-7$로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a, b는 상수이다.)

$S=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$

$S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$



$f(x)-(3x-7)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-3x+b+7$

$=\frac{1}{3}(x-3)^2(x-\alpha)$

$3ax^2-9x+3(b+7)=-(6+\alpha)x^2+(9+6\alpha)x-9\alpha$

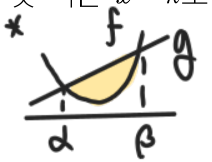
$\alpha=-3$ $a=-1$ $b=2$

$S=\int_{-2}^{3}\frac{1}{3}(x-3)^2(x+3)\,dx=\frac{1}{3}\int_{-5}^{0}x^2(x+6)\,dx=36$

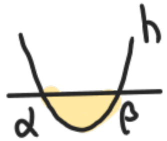
#101p Level2 5번 차함수의 넓이

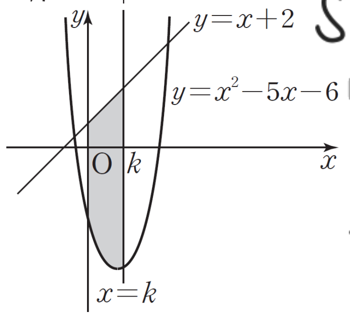
그림과 같이 곡선 $y=x^2-5x-6$과 직선 $y=x+2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분한다. 닫힌구간 $[0, k]$에서 곡선 $y=x^2-5x-6$, 직선 $y=x+2$, y축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, k는 상수이다.)

$\boxed{42}$

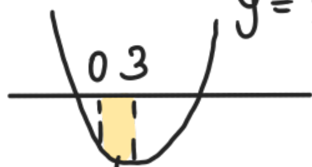


$\int f-\int g=\int f-g$





$y=x^2-6x-8=(x^2-5x-6)-(x+2)$



$\rightarrow K=3$

$\rightarrow S=-\int_0^3 x^2-6x-8\,dx=42$

#101p Level2 8번 시작할 때 위치 항상 확인하기

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 할 때,

$f(t)=6-2t$, $g(t)=4t-12$

Check

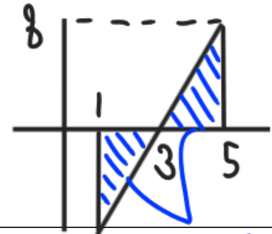
이다. 시각 $t=0$에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각 0, 15이고, $t>0$일 때 두 점 P, Q는 시각 $t=\alpha$와 $t=\beta$에서 서로 만난다. 시각 $t=\alpha$에서 $t=\beta$까지 두 점 P, Q가 움직인 거리를 각각 s_1, s_2라 할 때, s_1+s_2의 값은? (단, $\alpha<\beta$)

P Q

$0+\int_0^\alpha 6-2t\,dt=15+\int_0^\alpha 4t-12\,dt$ 의 해 α, β

$\int_0^\alpha 18-6t\,dt=15$, $18\alpha-3\alpha^2=15$, $(\alpha-1)(\alpha-5)=0$

$S_1=8$



$S_2=16$

$\boxed{24}$

#102p Level3 2번

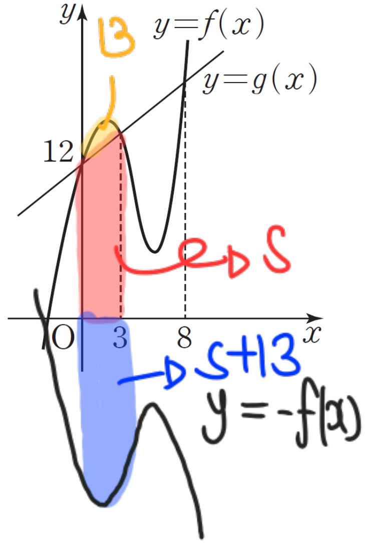
$\boxed{\dfrac{290}{9}}$

최고차항의 계수가 양수이고 $f(0)=12$인 삼차함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)+g(1)$의 값은? (단, $0 \le x \le 3$에서 $f(x) \ge g(x) \ge 0$이다.)

(가) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$는 서로 다른 세 점에서 만나고 이 세 점의 x좌표는 각각 0, 3, 8이다.

(나) 닫힌구간 $[0, 3]$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 13이다.

(다) 닫힌구간 $[0, 3]$에서 곡선 $y=-f(x)$와 직선 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 94이다.



$f(x)-g(x)=ax(x-3)(x-8)$

$\int_0^3 f(x)-g(x)\,dx = 13$, $a=\frac{4}{9}$

$S+(S+13)=94$, $S=\frac{81}{2}$

$S=\frac{81}{2}=\frac{1}{2}\times 3\times(12+g(3))$

$g(3)=15$, $g(x)=x+12$

$f(1)-g(1)=\frac{56}{9}$, $g(1)=13$.

#102p Level3 3번 정적분으로 정의된 함수의 도함수

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=-t^2+4t$이고, 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 원점이다. 음이 아닌 실수 a에 대하여 시각 $t=a$에서 $t=a+2$까지 점 P가 움직인 거리를 $f(a)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? $\boxed{ㄱ,ㄴ}$

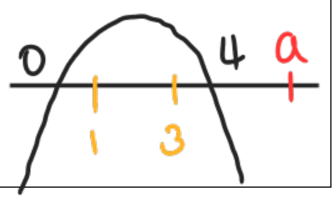
< 보 기 >

ㄱ. $f(1)=\dfrac{22}{3}$

ㄴ. $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{f(a)}{a^2}=2$

ㄷ. 함수 $f(a)$는 $a=2+2\sqrt{3}$에서 최솟값을 갖는다.

$V(t)=-t^2+4t$



ㄱ $f(1)=\int_1^3 -t^2+4t\,dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2\right]_1^3$

$=\frac{22}{3}$

ㄴ $a\to\infty$ 이므로 $a>4$

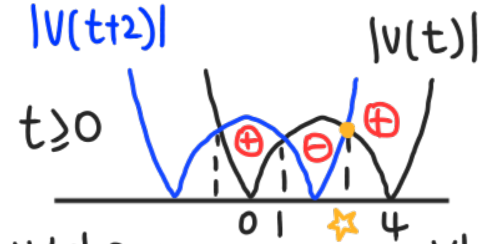
$f(a)=-\int_a^{a+2} -t^2+4t\,dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2\right]_a^{a+2}$

$=2a^2-4a-\frac{16}{3}$

$\cancel{ㄷ}$ $f(a)=\int_a^{a+2}|V(t)|\,dt$

$f'(a)=|V(a+2)|-|V(a)|$



최솟값은 $t=0$ 또는 $t=$☆ 에서 생김.

$-V(t+2)=V(t) \Leftrightarrow (t+2)^2-4(t+2)+(t^2-4t)=0$

$t^2-2t-2=0$, $t=1\pm\sqrt{3}$

☆ $=1+\sqrt{3}$ $(\because t\ge 0)$