수학 영역(A형)

10. $3 \le a \le b \le c \le d \le 10$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [3점]

① 240 ② 270 ③ 300 ④ 330 ⑤ 360

$a, b, c, d \in \{3.4.5.6.7.8.9.10\}$

$\therefore {}_8H_4 = {}_{11}C_4 = 330.$

11. 어느 전화 상담원 A가 지난해 받은 상담 전화의 상담 시간은 평균이 20분, 표준편차가 5분인 정규분포를 따른다고 한다. 전화 상담원 A가 지난해 받은 상담 전화를 대상으로 크기가 16인 표본을 임의추출할 때, 상담 시간의 표본평균이 19분 이상이고 22분 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.8	0.2881
1.2	0.3849
1.6	0.4452
2.0	0.4772

① 0.6730 ② 0.7333 ③ 0.7653 ④ 0.8301 ⑤ 0.9224

상담 전화의 상담시간 $= X \sim N(20, 5^2)$

$n=16$, $\bar{X} \sim N(20, (\frac{5}{4})^2)$

$P(19 \le \bar{X} \le 22) = P(-\frac{4}{5} \le Z \le \frac{8}{5})$

$= P(-0.8 \le Z \le 1.6)$

$= P(0 \le Z \le 1.6) + P(0 \le Z \le 0.8)$

$= 0.7333$

12. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 3$이고

$$na_{n+1} - 2na_n + \frac{n+2}{n+1} = 0 \quad (n \ge 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n이

$$a_n = 2^n + \frac{1}{n} \quad \cdots\cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, (좌변)$=a_1=3$, (우변)$=2^1+\frac{1}{1}=3$이므로 $(*)$이 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면
> $a_k = 2^k + \frac{1}{k}$이므로
> $ka_{k+1} = 2ka_k - \frac{k+2}{k+1}$
> $= \boxed{(가)} - \frac{k+2}{k+1}$
> $= k2^{k+1} + \boxed{(나)}$
> 이다. 따라서 $a_{k+1} = 2^{k+1} + \frac{1}{k+1}$이므로
> $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
> $a_n = 2^n + \frac{1}{n}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(3) \times g(4)$의 값은? [3점]

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

(가) $= k \cdot 2^{k+1} + 2 = f(k)$

(나) $= 1 - \frac{1}{k+1} = g(k)$

$\therefore f(3) \times g(4) = 50 \times \frac{4}{5} = 40.$

17. 질량 a(g)의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 c(%)인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량 b(g)는 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$$\log\frac{b}{a} = -1 + k\log c \text{ (단, } k\text{는 상수이다.)}$$

10g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 8%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량은 4g이다. 20g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 27%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량(g)은? (단, 각 용액의 양은 충분하다.) [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

B형 10번

18. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$2A - A^2B = E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A^{-1} = 2E - AB$

ㄴ. $AB = BA$

ㄷ. $A = \frac{1}{2}(E + BA^2)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

B형 17번

21. 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$$

이다. 함수 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty, 0)$에서 감소하고 구간 $(2, \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여, a^2+b^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값은? [4점]

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{43}{8}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{45}{8}$ ⑤ $\frac{23}{4}$

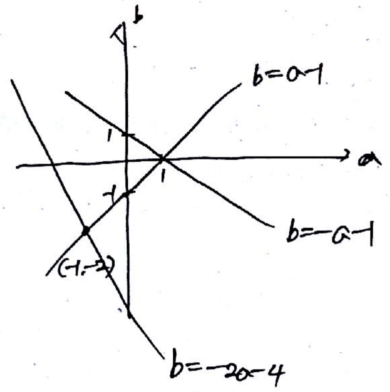
$g(x) = x^2 + ax + b.$

$g(-1) = 1 - a + b = 0 \quad \therefore b = a - 1$

$g(0) = b \le 0$

$g(1) = 1 + a + b \le 0 \quad \therefore b \le -a - 1.$

$g(2) = 4 + 2a + b \ge 0 \quad \therefore b \ge -2a - 4$



$a^2+b^2=r^2$ 이라 할 때

이 원이 $b=a-1$에 접할 때

최솟값 $m = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

이 원이 $(-1,-2)$를 지날 때

최댓값 $M = 5$

$\therefore M+m = \frac{11}{2}$

단답형

22. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+28n}-n\right)$의 값을 구하시오. [3점]

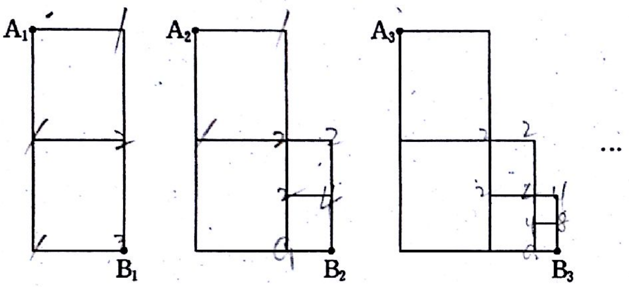
14

23. 함수 $f(x)=7x^3-ax+3$에 대하여 $f'(1)=2$를 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

19

29. 그림과 같이 직사각형에서 세로를 각각 이등분하는 점 2개를 연결하는 선분을 그린 그림을 [그림 1]이라 하자.
[그림 1]을 $\frac{1}{2}$만큼 축소시킨 도형을 [그림 1]의 오른쪽 맨 아래 꼭짓점을 하나의 꼭짓점으로 하여 오른쪽에 이어 붙인 그림을 [그림 2]라 하자.
이와 같이 3 이상의 자연수 k에 대하여 [그림 1]을 $\frac{1}{2^{k-1}}$만큼 축소시킨 도형을 [그림 $k-1$]의 오른쪽 맨 아래 꼭짓점을 하나의 꼭짓점으로 하여 오른쪽에 이어 붙인 그림을 [그림 k]라 하자.
자연수 n에 대하여 [그림 n]에서 왼쪽 맨 위 꼭짓점을 A_n, 오른쪽 맨 아래 꼭짓점을 B_n이라 할 때, 점 A_n에서 점 B_n까지 선을 따라 최단거리로 가는 경로의 수를 a_n이라 하자.
a_7의 값을 구하시오. [4점]

255



[그림 1] [그림 2] [그림 3] …

$a_1 = 3$

$a_2 = a_1 + 2^2$

$a_3 = a_2 + 2^3$

$a_4 = a_3 + 2^4$

$\vdots$

$+)\ a_7 = a_6 + 2^7$

$a_7 = 1 + (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^7)$

$= 1 + \frac{2(2^7-1)}{2-1}$

$= 2^8 - 1 = 255$

30. 자연수 n에 대하여 부등식 $4^k-(2^n+4^n)2^k+8^n \le 1$을 만족시키는 모든 자연수 k의 합을 a_n이라 하자.
$\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

103

$(2^k - 4^n)(2^k - 2^n) \le 1$

$(4^n - 2^k)(2^n - 2^k) \le 1$

$(2^{2n} - 2^k)(2^n - 2^k) \le 1$

$n=1;\ (2^2-2^k)(2^1-2^k) \le 1 \quad \therefore k=1, 2$

$a_1 = 3$

$n=2;\ (2^4-2^k)(2^2-2^k) \le 1 \quad \therefore k=2, 3, 4$

$\therefore a_2 = 9$

$n=3;\ (2^6-2^k)(2^3-2^k) \le 1 \quad \therefore k=3, 4, 5, 6$

$\therefore a_3 = 18$

a_n은 초항이 n, 끝항이 $2n$, 항의 개수가 $n+1$개인 등차수열의 합이다.

$\therefore a_n = \frac{(n+1)\cdot 3n}{2}$

$\therefore \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n} = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n(n+1)}$

$= \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{21}\right) = \frac{40}{63}$

$\therefore p+q = 103$

* 확인 사항