2014학년도 9월 평가원(B형) 해설지

1) 정답 : ①

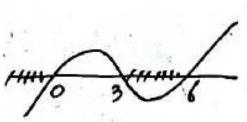
2) 정답 : ②

3) 정답 : ④

4) 정답 : ③

$\frac{2x-6}{x(x-6)} \le 0,\ x \neq 0, 6$

$2(x-3)\cdot x\cdot(x-6) \le 0$



자연수 $x=3, 4, 5$

5) 정답 : ③

$\sin x\cdot(2\cos x-1)=2(2\cos x-1)$

$(2\cos x-1)(\sin x-2)=0$

$\therefore \cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$이므로 모든 해의 합은 2π

6) 정답 : ⑤

$(a, b)=(3, 3), (4, 2)$이므로

$(a, b)=(3, 3)$일 때 ${}_4C_3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{3^7}$

$(a, b)=(4, 2)$일 때 $\left(\frac{1}{3}\right)^4\times{}_3C_2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{6}{3^7}$

$\therefore \frac{8+6}{3^7}=\frac{14}{3^7}$

7) 정답 : ①

$f(x)-9=\sqrt{f(x)-3},\ f(x) \ge 9$

$f(x)=t$ 치환하면 $(t \ge 9)$

$t^2-18t+81=t-3$

$t^2-19t+84=0$

$(t-12)(t-7)=0$

$\therefore t=12$

따라서 $f(x)=12$의 서로 다른 실근의 개수는 3개

2014학년도 9월 평가원(B형) 해설지

8) 정답 : ③

$X=x+1 \geq 0,\ Y=y+1 \geq 0,\ Z=z+1 \geq 0$

$\therefore (X-1)+(Y-1)+(Z-1)=4$

$\therefore X+Y+Z=7$

음이 아닌 정수해의 개수는 ${}_3H_7=36$

9) 정답 : ④

$a^2-b^2=c^2$에서 $a^2=b^2+c^2=\overline{BF}^2 \quad \therefore \overline{BF}=a$

$\triangle BFF'$은 정삼각형이므로 $a=2c$

$6\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot(a+c)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$에서 $c=2,\ a=4,\ b^2=12$

$\therefore a^2+b^2=16+12=28$

10) 정답 : ⑤

$\log\dfrac{4}{10}=-1+k\cdot\log 8$

$\therefore k=\dfrac{2}{3}$

$$\begin{aligned}\log\frac{b}{20}&=-1+k\cdot\log 27\\&=-1+2\cdot\log 3\\&=\log\frac{9}{10}\end{aligned}$$

$\therefore b=18$

11) 정답 : ③

좌표축을 도입하자. ($\overline{BC}$의 중점을 원점으로 설정)

$A\left(0,\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right),\ B\left(-\dfrac{3}{2},0\right),\ C\left(\dfrac{3}{2},0\right),\ D\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ F\left(\dfrac{3}{8},\ \dfrac{9\sqrt{3}}{8}\right),\ E\left(\dfrac{9}{8},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}&=(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD})\\&=\left(\frac{15}{8},\ \frac{9\sqrt{3}}{8}\right)+\left(\frac{17}{8},\ -\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\\&=(4,\ \sqrt{3})\end{aligned}$$

$\therefore |\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}|^2=16+3=19$

12) 정답 : ②

$n=100,\ \hat{p}=0.9$이므로

$c=1.96\times\sqrt{\dfrac{0.9\times0.1}{100}}=0.0588$

2014학년도 9월 평가원(B형) 해설지

13) 정답 : ⑤

$F(4,16)$이므로 $E(4,2)$

따라서 $\overline{AD}$를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표는 $(2^n,2)$이다.

이때 $A(2^n,0)$, $D(2^n,n)$이므로 $(2^n,2)=\left(2^n,\frac{2n}{5}\right)$

$\therefore n=5$이므로 $D(32,5)$

$\overline{DF}$의 기울기는 $-\frac{11}{28}$이다.

14) 정답 : ②

$S=2\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot 2^n\cdot 2^n-\int_1^{2^n}\log_2 x\,dx\right\}$

$n=3$ 대입하면

$S=2\left\{32-\int_1^8\log_2 x\,dx\right\}$

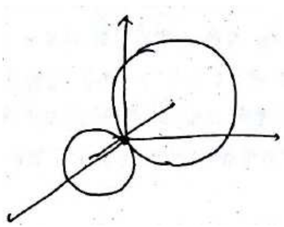
$=64-2\cdot\frac{1}{\ln 2}\int_1^8\ln x\,dx$

$=64-2\cdot\left(24-\frac{7}{\ln 2}\right)$

$=16+\frac{14}{\ln 2}$

15) 정답 : ④

$(x+3)^2+(y+a)^2+(z+b)^2=9+a^2+b^2$



$(-3,-a,-b)\mathbin{/\!/}(1,2,1)$

$\therefore -a=-b,\ -b=-3$이므로 $a=6,\ b=3$

16) 정답 : ①

㈎ $=\frac{2}{n(n-1)}=f(n)$

㈏ $=2^n+\frac{1}{n}=g(n)$

$\therefore g(6)-f(4)=2^6+\frac{1}{6}-\frac{2}{4\cdot 3}=64$

2014학년도 9월 평가원(B형) 해설지

17) 정답 : ⑤

ㄱ) $A(2E-AB)=E$이므로

$\therefore A^{-1}=2E-AB$ (참)

ㄴ) $A(2E-AB)=(2E-AB)A=E$이므로 $A^2B=ABA$

$\therefore AB=BA$ (참)

ㄷ) $2A=E+BA^2$과 동치이다. 조건에서 $2A=E+A^2B$이고 $AB=BA$이므로 $A^2B=ABA=BA^2$

따라서 $2A=E+BA^2$ (참)

18) 정답 : ①

$\overline{OA}=\overline{OB}=x$라 하면

$$1^2=x^2+x^2-2\cdot x\cdot x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=(2-\sqrt{2})x^2$$

$$\therefore x^2=\frac{1}{2-\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

한편, $\triangle OAB \backsim \triangle ABD$이므로 (닮음비 $x:1$)

$$\triangle ABD=\triangle OAB\times\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{x^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore S_1=8\times\triangle ABD=2\sqrt{2}$$

무한등비급수에서의 공비 r을 찾다.

$$\overline{OB}:\overline{OD}=x:\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore \text{공비 } r=\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{x}\right)^2=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2=(-1+\sqrt{2})^2=3-2\sqrt{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2\sqrt{2}}{1-(3-2\sqrt{2})}=2+\sqrt{2}$$

19) 정답 : ⑤

평면 α의 법선벡터를 $(1,0,a)$라 하면 $\alpha : x+az=0$

평면 α와 xy평면이 이루는 각도 θ_1은 두 법선벡터 $(1,0,a)$와 $(0,0,1)$이 이루는 각도이다.

$$\cos\theta_1=\frac{|a|}{\sqrt{1+a^2}} \qquad \therefore S=3\pi\times\frac{|a|}{\sqrt{1+a^2}} \quad \cdots\cdots ①$$

한편, 평면 α와 yz평면이 이루는 각도 θ_2는 두 법선벡터 $(1,0,a)$와 $(1,0,0)$이 이루는 각도이다.

$$\cos\theta_2=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \qquad \therefore S=\pi\times\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad \cdots\cdots ②$$

①=②이므로 $3|a|=1$ $\therefore |a|=\frac{1}{3}$

따라서 $S=\frac{3\sqrt{10}}{10}\pi$

20) 정답 : ③

$X \sim N\left(t, \left(\frac{1}{t^2}\right)^2\right),\ t>0$

$G(t) = P\left(X \le \frac{3}{2}\right)$

$= P\left(Z \le \frac{\frac{3}{2}-t}{\frac{1}{t^2}}\right)$

$= P\left(Z \le \frac{3}{2}t^2 - t^3\right)$

$g(t) = \frac{3}{2}t^2 - t^3$이 최대일 때 함수 $G(t)$도 최대가 된다.

$g'(t) = -3t^2 + 3t$

$= -3t(t-1)$

$t=1$에서 최댓값 $g(1) = \frac{1}{2}$

$\therefore G(t) \le P\left(Z \le \frac{1}{2}\right) = 0.6915$

21) 정답 : ②

$\frac{dx}{dt} = e^t$

$\frac{dy}{dt} = (4t+n)e^t + \left(2t^2+nt+n\right)e^t$

$= e^t\left\{2t^2 + (4+n)t + 2n\right\}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2t^2 + (4+n)t + 2n$

$= (2t+n)(t+2)$

n	t	nt
3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{2}$
4	-2	-8
5	-2	-10
6	-2	-12

이때 $\frac{y}{x} = 2t^2 + nt + n$이므로

$\frac{b_3}{a_3} + \frac{b}{a_4} + \frac{b_5}{a_5} + \frac{b_6}{a_6} = 2\left\{\frac{9}{4} + 12\right\} - \frac{9}{2} - 8 - 10 - 12 + 18$

$= 12$

2014학년도 9월 평가원(B형) 해설지

22) 정답 : 6

23) 정답 : 20

24) 정답 : 250

25) 정답 : 10

$a+b=60$

$\frac{2}{3}=\frac{50}{50+b}$

$\therefore b=25, a=35$이므로 $a-b=10$

26) 정답 : 15

$a^2+b^2=9$

점선 $\frac{4x}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=1$

$y=0,\ x=\frac{a^2}{4}\quad \therefore x$절편 $Q\left(\frac{a^2}{4},0\right)$

$\frac{a^2}{4}+3:3-\frac{a^2}{4}=2:1\quad \therefore a^2=4,\ b^2=5$

$\therefore \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 위의 점 $P(4,k)$이므로 $k^2=15$

27) 정답 : 16

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$이므로 $g(0)=\frac{\pi}{4}$

$\lim_{h\to 0}4\times\frac{g(8h)-g(0)}{h}=32\cdot g'(0)$

$f'(x)=\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)'=2$이므로 $g'(0)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}$

따라서 준 식의 값은 16이다.

28) 정답 : 7

평면 $\alpha : (x-1)+2\cdot y-1\cdot(z-1)=0$

$x+2y-z=0$

$B(-1,a,a)$대입하면

$-1+2a-a=0\quad \therefore a=1$

$\overline{AB}=\sqrt{5}$ 이다.
점 $C(t+1, 2t, 1-t)$라 하면
$\overline{AC}^2 = t^2+4t^2+t^2 = 6t^2 = 5$

$$\therefore t^2 = \frac{5}{6}$$

$d^2 = (t+1)^2+4t^2+(1-t)^2 \;= 6t^2+2 = 7$

29) 정답 : 100

$\triangle ACD$에서 $\dfrac{\overline{CD}}{\sin 2\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2\theta\right)}$

$$\therefore \overline{CD} = \frac{\cos\theta\cdot\sin 2\theta}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2\theta\right)}$$

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\cdot\sin\theta\cdot\overline{CD}\cdot\sin\frac{5\pi}{6} \quad = \frac{1}{4}\cdot\sin\theta\cdot\frac{\cos\theta\cdot\sin 2\theta}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2\theta\right)}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to+0}\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\cdot\frac{2\cdot\cos\theta}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2\theta\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sin\dfrac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = p$$

$\therefore 300p^2 = 100$

30) 정답 : 17

$e^x = t$로 치환하면

$$g(t) = \begin{cases} f(\ln t) & (0 \le t \le e) \\ g\left(\dfrac{t}{e}\right)+5 & (e \le x \le e^2) \end{cases}$$

$$\int_1^{e^2} g(x)dx = \int_1^{e} g(x)dx + \int_e^{e^2} g(x)dx$$

$$= \int_1^{e} f(\ln x)dx + \int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right)+5\right\}dx \;\cdots\cdots ①$$

한편, $\displaystyle\int_e^{e^2} g\left(\frac{x}{e}\right)dx = \int_1^{e} g(u)\cdot e\cdot du = e\int_1^{2} f(\ln u)du$

$$\left(\frac{x}{e} = u\text{로 치환}\right)$$

①식 : $6e^2+4 = (1+e)\displaystyle\int_1^{e} f(\ln x)dx + 5(e^2-e)$

$\therefore (1+e)\displaystyle\int_1^{e} f(\ln x)dx = e^2+5e+4 \;= (e+1)(e+4)$

$\therefore \int_{1}^{e} f(\ln x)dx = e+4$

$a^2+b^2=1+16=17$