수능특강 핵심정리 문제 리스트만 모음

모수_모두의수학
모수 | 모두의수학

1. 여러 가지 순열
#12p Level2 3번 대칭성을 이용한 풀이
#13p Level3 1번 결국 Case 분류가 중요
#13p Level3 2번 결국 Case 분류가 중요
#13p Level3 3번 결국 Case 분류가 중요

2. 중복조합과 이항정리
#26p Level2 2번 중복조합 홀수, 짝수 처리
#27p Level3 1번 결국 Case 분류가 중요
#27p Level3 2번 결국 Case 분류가 중요
#27p Level3 3번 중복조합 부호 바꾸어 치환이 편한 경우

3. 확률의 뜻과 활용
#41p Level3 1번 결국 Case 분류가 중요
#41p Level3 2번 영역 개수는 교점 개수에 따라 결정됨
#41p Level3 3번 결국 Case 분류가 중요

4. 조건부확률
#54p Level2 5번 실수하기 좋은 표현 “이상이 되면”
#54p Level2 6번 결국 Case 분류가 중요
#54p Level2 7번 결국 Case 분류가 중요
#54p Level2 8번 결국 Case 분류가 중요
#55p Level3 1번 역으로 생각하면 편한 경우
#55p Level3 2번 이산확률변수 두 개일 때는 표 그려보자
#55p Level3 3번 실수하기 좋은 표현 “처음으로”

5. 이산확률변수의 확률분포
#71p Level3 1번 결국 Case 분류가 중요
#71p Level3 2번 확률 합이 1임을 활용하기
#71p Level3 3번 각 자리 입장에서 생각해보기
#71p Level3 4번 이산확률변수 두 개일 때는 표 그려보자

6. 연속확률변수의 확률분포
#75p 예제 1번 일차식의 정적분은 넓이로 계산 가능
#82p Level1 2번 정규분포 확률밀도함수 Graph는 대칭성
#83p Level2 2번 $f(m+x)=f(m-x)$ 대칭성
#85p Level3 1번 정규분포 확률밀도함수는 평균에서 최댓값
#85p Level3 3번 이항분포의 정규분포 근사

7. 통계적 추정
#99p Level3 1번 σ값의 대소에 따른 그래프 개형
#99p Level3 2번 표본평균의 정의
#99p Level3 3번 추정마다 $\overline{x}$의 값 달라질 수 있다

1. 여러 가지 순열

#12p Level2 3번 대칭성을 이용한 풀이

#13p Level3 1번 결국 Case 분류가 중요

#13p Level3 2번 결국 Case 분류가 중요

#13p Level3 3번 결국 Case 분류가 중요

#12p Level2 3번 대칭성을 이용한 풀이

문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열할 때, 문자 a가 나오는 횟수가 문자 b가 나오는 횟수보다 큰 경우의 수는?

(전체) = $(a>b)+(a<b)+(a=b)$

개수 같다

(전체 경우) = $3^4 = 81$

(a=b 경우)

a	b	c	
0	0	4	→ 1
1	1	2	→ ${}_4C_2\times 2=12$
2	2	0	→ ${}_4C_2=6$

∴ 19

$\frac{1-19}{2}=31$

$\boxed{31}$

#13p Level3 1번 결국 Case 분류가 중요

1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공을 일정한 간격을 두고 원형의 탁자 위에 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 공에 적혀 있는 수는 반드시 서로소가 되도록 배열하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

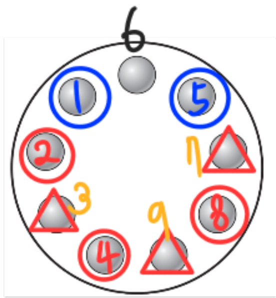
* 1과 2 서로소 O, 1과 1 서로소 O vs 1 소수 X

짝수 2, 4, 6, 8은 이웃 X

1 3 5 7 9 → 3, 6, 9는 이웃 X

가장 골치 아픈(조건 많은) 6을 고정 후 시작

Case ①

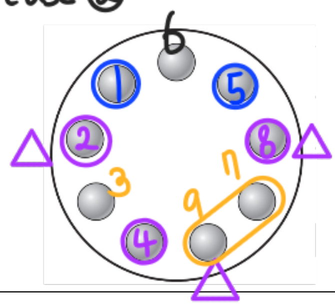


1,5,7중 2개 6 좌우 배열 → 3×2

2,4,8은 ○또는△에 배열 → 2×3!

1,5,7중 남은 1개 & 3,9 배열 → 3!

Case ②



1,5,7중 2개 6 좌우 배열 → 3×2

2,4,8은 ○또는△에 배열 → 2×3!

남은 수 3개 배열 − ⬭에 3,9 배열 → 3!−2=4

∴ $3\times2\times2\times3!\times(3!+4)=720$

$\boxed{720}$

#13p Level3 2번 결국 Case 분류가 중요

문자 a, b, b c, c, c, c중에서 다섯 개를 택해 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수는?

(가) 문자 c는 3번 이상 나온다.
(나) 문자 b가 2번 나오면 b는 서로 이웃한다.

$\boxed{34}$

1	2	4		
a	b	c		
1		4	→	${}_5C_1 = 5$
	1	4	→	${}_5C_1 = 5$
1	1	3	→	$\frac{5!}{3!} = 20$
(나)	2	3	$\boxed{bb}ccc$ →	4

34

#13p Level3 3번 결국 Case 분류가 중요

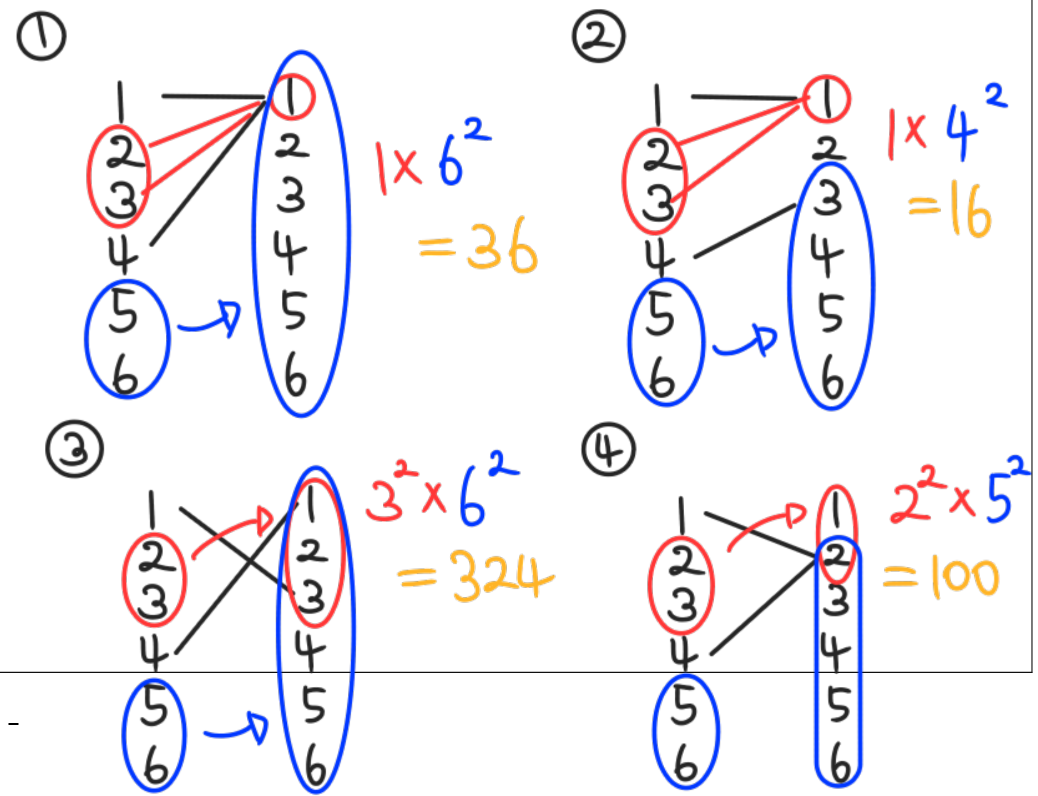
집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는?

(가) $f(1)+f(4)$는 4의 약수이다.
(나) $x \le 3$이면 $f(x) \le f(1)$이다.
(다) $x > 3$이면 $f(x) \ge f(4)$이다.

$\boxed{476}$

$f(1), f(4)$

$f(1)+f(4) = $ ~~1~~ ×
- 2 − 1 1 ①
- 4 − 1 3 ②
- 4 − 3 1 ③
- 4 − 2 2 ④



2. 중복조합과 이항정리

#26p Level2 2번 중복조합 홀수, 짝수 처리

#27p Level3 1번 결국 Case 분류가 중요

#27p Level3 2번 결국 Case 분류가 중요

#27p Level3 3번 중복조합 부호 바꾸어 치환이 편한 경우

#26p Level2 2번 중복조합 홀수, 짝수 처리

다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오.

(가) $a+b+c+d=16$
(나) a, b, c, d 중에서 적어도 하나는 홀수이다.

$n(가)-n(가\cap 나^c)$ $\boxed{420}$

$=455-35$

$=420$

$n(가)=455$

$a=a'+1, b=b'+1, c=c'+1, d=d'+1$

$a'+b'+c'+d'=12\ (a', b', c', d' \geq 0)$

${}_4H_{12}={}_{15}C_3=\dfrac{15\times 14\times 13}{3\times 2}=5\times 7\times 13$

$=455$

→ 전부 짝수

$n(가\cap 나^c)=35$ ($a=2a'$라 하면 $a'\geq 1$, $a=2a'+2$라 하면 $a'\geq 0$ → 기본꼴)

$a=2a'+2, b=2b'+2, c=2c'+2, d=2d'+2$

$a'+b'+c'+d'=4\ (a', b', c', d' \geq 0)$

${}_4H_4={}_7C_3=7\times 5=35$

#27p Level3 1번 결국 Case 분류가 중요

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e, f의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e, f)의 개수는?

$\boxed{223}$

(가) $a+b+c+d+e+f=20$
(나) x에 대한 이차방정식 $x^2-cx+4=0$의 두 근은 a, b이다.

$ab=4$

$a+b=c$

a	b	c			
1	4	5	→ $d+e+f=10$	${}_3H_{10}={}_{12}C_2$	$=66$
2	2	4	→ $d+e+f=12$	${}_3H_{12}={}_{14}C_2$	$=91$
4	1	5	→ $d+e+f=10$	${}_3H_{10}$	$=66$

$66+91+66=223$

#27p Level3 2번 결국 Case 분류가 중요

집합 $X=\{0, 1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f 중 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는?

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이다.
(나) 함수 f의 치역의 모든 원소의 합은 6이다.

$6=\cancel{5+1}=\cancel{1+1+1+1+1+1}$
$=4+2=\cancel{4+1+1}$
$=\cancel{3+3}=3+2+1=\cancel{3+1+1+1}$
$=\cancel{2+2+2}=\cancel{2+2+1+1}=\cancel{2+1+1+1+1}=\cancel{1+1+1+1+1+1}$

$\boxed{20}$

① 치역 $\{0, 2, 4\}$ 없어도 ok

0 — 0 a
1 — ×
2 — 2 b
3 — ×
4 — 4 c

$a+b+c=5\ (a\ge 0,\ b, c\ge 1)$

${}_3H_3={}_5C_3=10$

② 치역 $\{0, 1, 2, 3\}$ 없어도 ok

0 — 0 a
1 — 1 b
2 — 2 c
3 — 3 d
4 — ×

$a+b+c+d=5\ (a\ge 0,\ b, c, d\ge 1)$

${}_4H_2={}_5C_2=10$

#27p Level3 3번 중복조합 부호 바꾸어 치환이 편한 경우

다섯 명의 학생 A, B, C, D, E에게 같은 종류의 컴퓨터용 사인펜 11자루와 같은 종류의 수정 테이프 9개를 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 수정 테이프를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

(가) 다섯 명의 학생 A, B, C, D, E가 받는 컴퓨터용 사인펜의 개수는 각각 1 이상이고, 학생 A가 받는 컴퓨터용 사인펜의 개수는 학생 B가 받는 컴퓨터용 사인펜의 개수의 2배이다.
(나) 다섯 명의 학생 A, B, C, D, E가 받는 수정 테이프의 개수는 각각 3 이하이고, 학생 E는 학생 D보다 수정 테이프를 2개 더 받는다.

$\boxed{486}$

(가) $a+b+c+d+e=11$ ($a=2b$, ≥ 1)

a b
① 2, 1 → $c+d+e=8$: ${}_3H_5$
② 4, 2 → $c+d+e=5$: ${}_3H_2$
③ 6, 3 → $c+d+e=2$ ×

${}_3H_5+{}_3H_2={}_7C_2+{}_4C_2=27$

(나) $a+b+c+d+e=9$ ($e=d+2$, $0\le$, ≤ 3)

d e
① 0 2 → $a+b+c=7$ ($3-a'$, $3-b'$, $3-c'$)
$\Leftrightarrow a'+b'+c'=2\ (0\le a', b', c'\le 3)$
${}_3H_2={}_4C_2=6$

② 1 3 → $a+b+c=5$ ($3-a'$, $3-b'$, $3-c'$)
$\Leftrightarrow a'+b'+c'=4\ (0\le a', b', c'\le 3)$
${}_3H_4-3={}_6C_2-3=12$
하나가 4

$\therefore 27\times 18=486$

3. 확률의 뜻과 활용

#41p Level3 1번 결국 Case 분류가 중요

#41p Level3 2번 영역 개수는 교점 개수에 따라 결정됨

#41p Level3 3번 결국 Case 분류가 중요

#41p Level3 1번 결국 Case 분류가 중요

$2^7 = 128$

집합 $X=\{x|x$는 7 이하의 자연수$\}$의 모든 부분집합 중에서 임의로 선택한 한 집합을 A라 할 때, 집합 A가 다음 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

(가) 집합 A의 원소의 개수는 2 이상이다.
(나) 집합 A와 집합 $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$는 서로소가 아니다.

$\boxed{247}$

$n(A)=0$, $n(A)=1$

$n(가) = 2^7 - 1 - 7 = 120$

(나) A는 1,2,3,4,5 중 적어도 하나 포함

$(나)^c$ A는 〃 중 아무것도 없다.

$n(가 \cap 나^c) = 1$ ← ~~1 2 3 4 5~~ 6 7

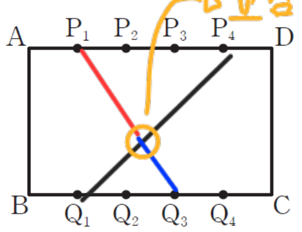
$\therefore n(가 \cap 나) = 120 - 1 = 119$ $\quad \frac{119}{128}$ $\quad \therefore 247$

#41p Level3 2번 영역 개수는 교점 개수에 따라 결정됨

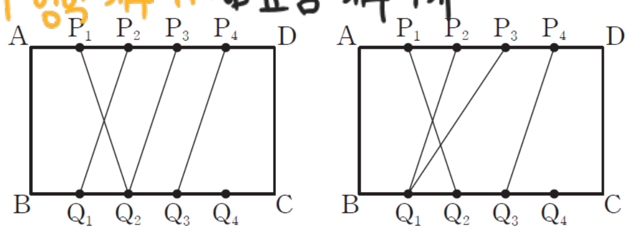
4^4

[그림 1]과 같이 직사각형 ABCD에서 선분 AD를 5등분하는 4개의 점 P_1, P_2, P_3, P_4와 선분 BC를 5등분하는 4개의 점 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4가 있다. 각 점 $P_i(i=1, 2, 3, 4)$에 대하여 점 P_i와 4개의 점 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 중에서 임의로 선택한 한 점을 선분으로 연결한다. [그림 2]는 이러한 방법에 따라 4개의 선분을 그린 2가지 예이다. 직사각형 ABCD가 추가된 4개의 선분에 의하여 나누어진 영역의 개수가 6일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

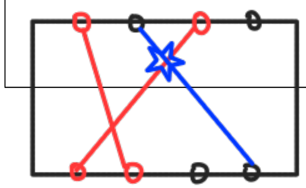
→ 교점 생길때 영역 개수 +1 ⇒ 교점 개수 1개



[그림 1]



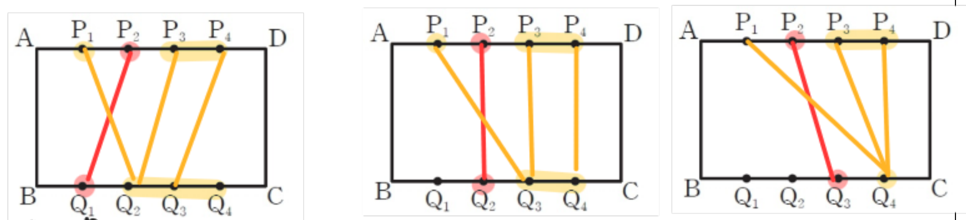
[그림 2]



⇒ 떨어진 P점 두개가 꼬이면 그 사이의
P 때문에 교점 수 많아진다
∴ 이웃한 두 P점이 교점 생성

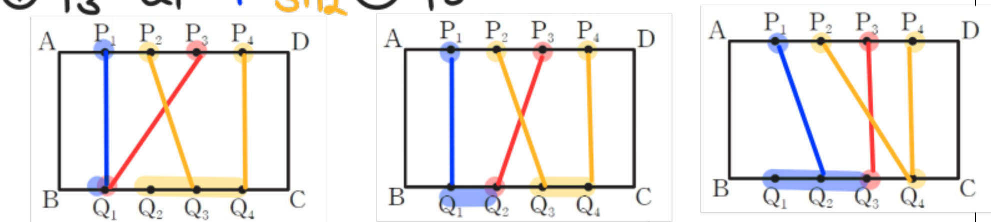
1) P_1, P_2가 Cross : 15가지

① $P_2 - Q_1 \rightarrow {}_3H_3$ ② $P_2 - Q_2 \rightarrow {}_2H_3$ ③ $P_2 - Q_3 \rightarrow 1$



2) P_2, P_3가 Cross : 15가지

① $P_3 - Q_1 \rightarrow 1 \times {}_3H_2$ ② $P_3 - Q_2 \rightarrow 2 \times {}_2H_2$ ③ $P_3 - Q_3 \rightarrow 3 \times 1$



3) P_3, P_4가 Cross 인 경우는 1)과 대칭으로 같다, 15가지

$\therefore \frac{45}{4^4} = \frac{45}{256}$ $\quad \boxed{301}$

#41p Level3 3번 결국 Case 분류가 중요

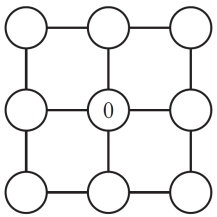
[그림 1]의 도형에 다음과 같은 [실행 1], [실행 2]의 순서로 숫자를 써넣는다.

[실행 1] 내부가 비어 있는 8개의 원에 1부터 8까지의 자연수를 모두 한 번씩 사용하여 임의로 써넣는다.

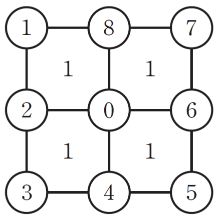
홀수 1, 짝수 3 OR 홀수 3, 짝수 1

[실행 2] 내부가 비어 있는 4개의 ⬡ 모양의 도형에 이 도형과 원주의 일부를 공유하는 4개의 원에 적혀 있는 모든 수의 합이 홀수이면 1, 짝수이면 0을 써넣는다.

[그림 2]는 [실행 1], [실행 2]의 순서로 숫자를 써넣은 한 예이다. [실행 1], [실행 2]의 순서로 숫자를 써넣을 때, 4개의 모양의 ⬡ 도형에 적혀 있는 1의 개수가 4일 확률은? (단, 주어진 도형을 회전시키지 않는다.)



[그림 1]



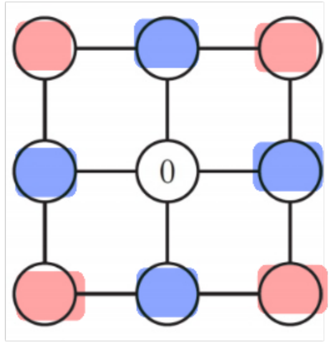
[그림 2]

$\boxed{\frac{1}{14}}$

홀수 1 3 5 7

짝수 2 4 6 8

① (홀수 1, 짝수 3) × 4개



홀수

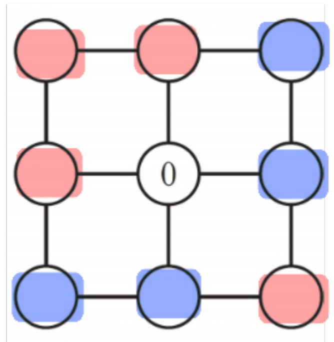
짝수

$4! \times 4!$

② (홀수 1, 짝수 3) × 3개, (홀수 3, 짝수 1) × 1개

회전

홀수



짝수

$4! \times 4! \times 4$

$$\frac{4! \times 4! \times (1+4)}{8!} = \frac{4 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{5}}{8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5}} = \frac{1}{14}$$

4. 조건부확률

#54p Level2 5번 실수하기 좋은 표현 “이상이 되면”

#54p Level2 6번 결국 Case 분류가 중요

#54p Level2 7번 결국 Case 분류가 중요

#54p Level2 8번 결국 Case 분류가 중요

#55p Level3 1번 역으로 생각하면 편한 경우

#55p Level3 2번 이산확률변수 두 개일 때는 표 그려보자

#55p Level3 3번 실수하기 좋은 표현 “처음으로”

#54p Level2 5번 실수하기 좋은 표현 "이상이 되면"

* 여사건 풀이도 좋다

수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3의 약수이면 점 P를 양의 방향으로 1만큼, 3의 약수가 아니면 점 P를 양의 방향으로 2만큼 이동시키는 시행을 한다. 이 시행을 반복하여 점 P의 좌표가 처음으로 6 이상이 되면 이 시행을 멈춘다. 4번 이하의 시행을 하여 멈출 확률은?

→ 이 표현은 밑줄, 실수하기 좋음

○ +1 $\frac{1}{3}$

X +2 $\frac{2}{3}$

① ② ③ ④

X X X → $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

X X ○ ○ → $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times {}_4C_2$ X, X, O, O 배열

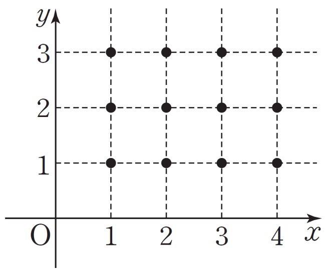
☆(X X ○) X → $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times {}_3C_1 \times 1$ ← X는 고정 X, X, O 배열

빠트리기 쉽다

$$\frac{8+8+8}{27} = \frac{8}{9} \qquad \boxed{\frac{8}{9}}$$

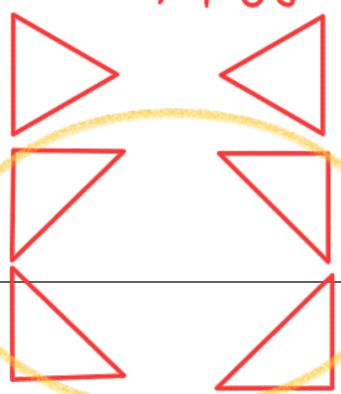
#54p Level2 6번 결국 Case 분류가 중요

좌표평면의 12개의 점 (a, b) $(a=1, 2, 3, 4,\ b=1, 2, 3)$에서 서로 다른 세 점을 꼭짓점으로 하는 모든 삼각형의 집합을 S라 하자. 집합 S의 원소 중에서 임의로 선택한 한 삼각형이 넓이가 2이고 적어도 한 변이 좌표축에 평행한 삼각형일 때, 이 삼각형이 직각삼각형일 확률은? → $\frac{1}{2} \times 2 \times 2$



$$\frac{4\times 2}{6\times 2 + 2\times 2 + 4\times 1} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \qquad \boxed{\frac{2}{5}}$$

① y축에 평행

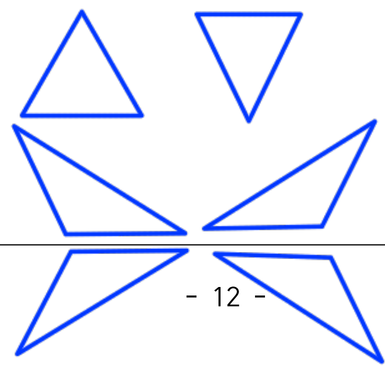


각 2개씩

직각 각 2개씩

각 2개씩

② x축에 평행 & y축 평행 X



각 2개씩

각 1개씩

각 1개씩

#54p Level2 7번 결국 Case 분류가 중요

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 4 이하의 눈이 나오는 사건을 A, 6 이하의 자연수 n에 대하여 n의 배수의 눈이 나오는 사건을 B라 하자. 두 사건 A, B가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오.

> (가) $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6}$ $=\frac{2}{3}+P(B)-P(A\cap B)$ $\Leftrightarrow P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{6}$
>
> (나) 두 사건 A와 B는 서로 종속이다.

$\Leftrightarrow P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

$P(A)=\frac{2}{3}$

$A=\{1,2,3,4\}$

$\boxed{14}$

① $n=1$, $B=\{1,2,3,4,5,6\}$
$P(B)=1$, $P(A\cap B)=\frac{2}{3}$
$1-\frac{2}{3}\neq\frac{1}{6}$ (가)X

② $n=2$, $B=\{2,4,6\}$
$P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ (가)O
$\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$ (나)X

③ $n=3$, $B=\{3,6\}$
$P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$
$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$ (가)O
$\frac{1}{6}\neq\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$ (나)O

④ $n=4$, $B=\{4\}$
$P(B)=\frac{1}{6}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\neq\frac{1}{6}$ (가)X

⑤ $n=5$, $B=\{5\}$
$P(B)=\frac{1}{6}$, $P(A\cap B)=0$
$\frac{1}{6}-0=\frac{1}{6}$ (가)O
$0\neq\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}$ (나)O

⑥ $n=6$, $B=\{6\}$
$P(B)=\frac{1}{6}$, $P(A\cap B)=0$
$\frac{1}{6}-0=\frac{1}{6}$ (가)O
$0\neq\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}$ (나)O

#54p Level2 8번 결국 Case 분류가 중요

흰 공 3개와 검은 공 3개가 들어 있는 상자 A와 비어 있는 상자 B를 사용하여 다음 시행을 두 번 반복한다.

> 상자 A에서 임의로 두 개의 공을 동시에 꺼내어,
> 서로 같은 색의 공이 나오면 꺼낸 2개의 공 중 1개를 상자 A에, 나머지 1개를 상자 B에 넣고,
> 서로 다른 색의 공이 나오면 꺼낸 2개의 공을 모두 상자 B에 넣는다.

두 번째 시행 후 상자 A에 들어 있는 흰 공의 개수와 검은 공의 개수가 서로 같을 때, 첫 번째 시행 후 상자 A에 들어 있는 흰 공의 개수와 검은 공의 개수가 서로 다를 확률은?

$\boxed{\frac{3}{13}}$

$\frac{②}{①+②}=\frac{\frac{3}{25}}{\frac{2}{5}+\frac{3}{25}}=\frac{3}{13}$

① (흰1 검1) ×2회

$\left(\frac{{}_3C_1\times{}_3C_1}{{}_6C_2}\right)\times\left(\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}\right)=\frac{2}{5}$

② (흰2)+(검2)

흰→검, 검→흰

$\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\times2=\frac{3}{25}$

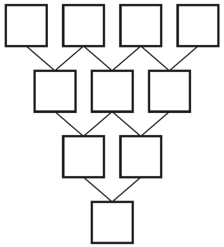
#55p Level3 1번 역으로 생각하면 편한 경우

[그림 1]의 10개의 빈칸에 다음과 같은 [실행 1], [실행 2]의 순서로 수를 써넣는다.

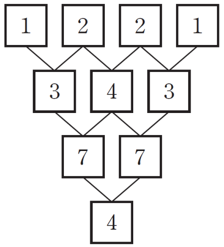
[실행 1] 맨 윗줄의 빈칸에는 한 개의 동전을 두 번 던져서 앞면이 1번 이상 나오면 그 칸에 1을, 모두 뒷면이 나오면 그 칸에 2를 써넣는 것을 4번 반복하여 왼쪽 칸부터 차례로 수를 써넣는다.

[실행 2] 위에서 n번째 줄($n=2, 3, 4$)의 빈칸에는 이 빈칸과 선으로 연결된 $(n-1)$번째 줄의 두 칸에 적혀 있는 두 수에 대하여 두 수의 합이 10 미만이면 그 합을, 10 이상이면 두 수의 합의 일의 자리의 수만 써넣는 것을 6번 반복하여 윗줄부터 차례로 수를 써넣어 빈칸을 모두 채운다.

[그림 2]는 [실행 1], [실행 2]의 순서로 수를 써넣은 한 예이다. [실행 1], [실행 2]의 순서로 수를 써넣을 때, 가장 아랫줄에 있는 1개의 칸에 적혀 있는 수가 1일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[그림 1]

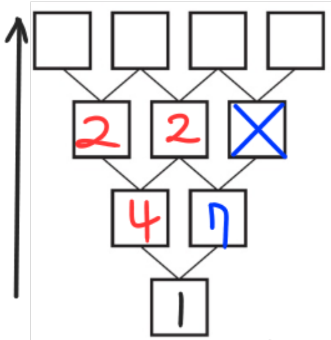


[그림 2]

1번줄 후보 1,2
2번줄 후보 2,3,4
3번줄 후보 4, 5, 6, 7, 8
→ 4+7 또는 5+6

① 4+7인 경우 → 불가

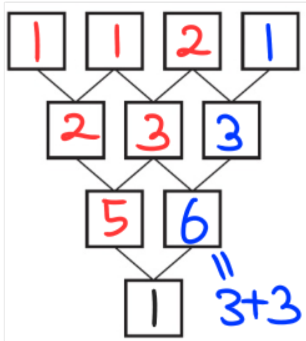
역순 채우기



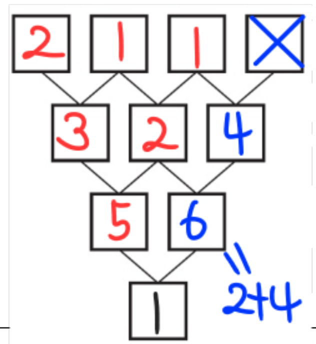
2번줄 후보 2,3,4

4 = 2+2 만 가능, 7=3+4만 가능

② 5+6=11 인 경우



5 = 2+3만 가능, 6 = 3+3
= 2+4



1번줄 1 1 2 1
1 2 1 1 대칭

$\therefore 2\times\left(\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{128}$

$\boxed{155}$

#55p Level3 2번 이산확률변수 두 개일 때는 표 그려보자

1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드에서 임의로 2장의 카드를 동시에 선택한다. 선택한 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 6인 사건을 A, 3 이상 20 이하의 자연수 m에 대하여 선택한 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 곱이 m 이상인 사건을 B라 하자. 두 사건 A와 B가 서로 독립이 되도록 하는 모든 m의 값의 합은?

합	1	2	3	4	5
1		3	4	5	6
2			5	6	7
3				7	8
4					9
5					

곱	1	2	3	4	5
1		2	3	4	5
2			6	8	10
3				12	15
4					20
5					

$P(A)=\frac{1}{5}$

$\boxed{15}$

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{5}P(B)$

$P(A\cap B)=\frac{1}{10}$ 또는 $\frac{1}{5}$ $(n(S)=10,\ n(A\cap B)\le n(A)=2)$

$P(A\cap B)=\frac{1}{10},\ P(B)=\frac{1}{2}$ → 8부터 포함, $m=7, 8$

$P(A\cap B)=\frac{1}{5},\ P(B)=1$ → 2부터 포함, $m=\cancel{1, 2}$

$(3\le m\le 20$ 조건$)$

#55p Level3 3번 실수하기 좋은 표현 "처음으로"

상자 A와 상자 B에 각각 9개씩 공이 들어 있고, 상자에 들어 있지 않은 공 14개가 있다. 주사위 한 개를 사용하여 다음 시행을 7번 반복한다.

> 한 개의 주사위를 한 번 던져
> (가) 4 이하의 눈이 나오면 상자 A에서 공 1개를 꺼내어 상자 B에 넣고,
> (나) 5 이상의 눈이 나오면 상자에 들어 있지 않은 공 2개를 두 상자 A, B에 각각 1개씩 넣는다.
>
> 이 표현은 밑줄, 실수 조심

상자 B에 들어 있는 공의 개수가 7번째 시행 후 처음으로 상자 A에 들어 있는 공의 개수의 2배가 될 확률은 p이다. $3^7\times p$의 값을 구하시오.

먼저 양극단 관찰하여 공 개수의 범위 알아보자.

(가)만 7번 : A 2개 B 16개
(나)만 7번 : A 16개 B 16개

B는 무조건 +1 씩
A는 +1 또는 −1.
(나) (가)

7번 후 : A 8개 B 16개

① (가) a번 이라면 (나) $(7-a)$번

A에는 $9-1\times a+1\times(7-a)=16-2a=8,\ a=4$

② (가) 4번 (나) 3번 → ${}_7C_3\times\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{7\times5\times2^4}{3^7}$ 전체

③ 7번 이전에 2배 제외

A	B	
5	10	→ 1번 만에 불가
6	12	→ (가) 3번, 고정 (가)(가)(가) 배열 (가)(나)(나)(나)
7	14	→ 불가

→ $4\times\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2^6}{3^7}$ 여사건

→ 불가 $(9+\underbrace{1\times a}_{가}-\underbrace{1\times(5-a)}_{나}=7,\ a=\frac{3}{2})$ 자연수X

A가 적으려면 (가)를 많이

(B 개수 −9)가 시행횟수

④ $p=7\times5\times2^4-2^6=(35-4)\times16=496$ $\boxed{496}$

5. 이산확률변수의 확률분포

#71p Level3 1번 결국 Case 분류가 중요

#71p Level3 2번 확률 합이 1임을 활용하기

#71p Level3 3번 각 자리 입장에서 생각해보기

#71p Level3 4번 이산확률변수 두 개일 때는 표 그려보자

#71p Level3 1번 결국 Case 분류가 중요

숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 한 개의 동전을 한 번 던져서 앞면이 나오면 이 주머니에서 임의로 3장의 카드를 동시에 꺼내고, 뒷면이 나오면 이 주머니에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼낸다. 주머니에서 꺼낸 카드에 적힌 수가 홀수인 카드의 개수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(12X+3)$의 값은?

$X=0$ $\quad \frac{1}{2}\times{}_3C_3\div{}_6C_3+\frac{1}{2}\times{}_3C_2\div{}_6C_2$

$X=1$ $\quad \frac{1}{2}\times{}_3C_1\,{}_3C_2\div{}_6C_3+\frac{1}{2}\times{}_3C_1\,{}_3C_1\div{}_6C_2$

$X=2$ $\quad \frac{1}{2}\times{}_3C_2\,{}_3C_1\div{}_6C_3+\frac{1}{2}\times{}_3C_2\div{}_6C_2$

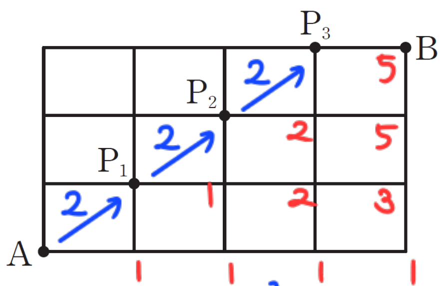
$X=3$ $\quad \frac{1}{2}\times{}_3C_3\div{}_6C_3+\frac{1}{2}\times 0$

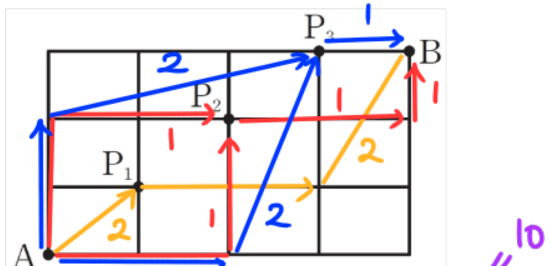
$$E(X)=\frac{1\cdot{}_3C_1\,{}_3C_2+2\cdot{}_3C_2\,{}_3C_1+3\cdot{}_3C_3}{2\times{}_6C_3}+\frac{1\cdot{}_3C_1\,{}_3C_1+2\cdot{}_3C_2}{2\times{}_6C_2}$$

$$\hookrightarrow E(X)=\frac{5}{4}\quad E(12X+3)=12E(X)+3=18\quad \boxed{18}$$

#71p Level3 2번 확률 합이 1임을 활용하기

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망에서 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 35이다. 이 35가지의 경우에서 임의로 한 가지를 선택할 때, 선택한 경로에서 세 지점 P_1, P_2, P_3 중 지나는 지점의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은?





$$E(X)=\frac{0\times5+1\times10+2\times12+3\times8}{35}$$

$$=\frac{58}{35}\qquad \boxed{\frac{58}{35}}$$

① $X=3$, $P(X=3)=\frac{2^3\times1}{35}=\frac{8}{35}$

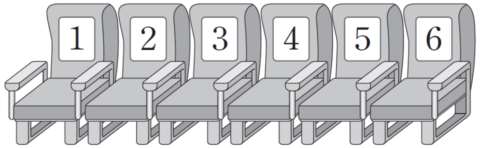
② $X=0$, $P(X=0)=\frac{5}{35}$

③ $P(X=1)=\frac{2\times2+2\times1+2+2}{35}=\frac{10}{35}$

④ $P(X=2)$ 직접구하지 말고 $1-\frac{8+5+10}{35}=\frac{12}{35}$

#71p Level3 3번 각 자리 입장에서 생각해보기

그림과 같이 1번부터 6번까지의 좌석번호가 있는 자리에 남학생 2명과 여학생 4명을 앉히려고 한다. 이 6명의 학생 중에서 임의로 한 명씩을 택하여 좌석번호가 작은 수부터 차례로 모든 학생을 자리에 앉힐 때, 남학생이 처음으로 앉는 자리의 좌석번호를 확률변수 X라 하자. 예를 들어, 1번 자리부터 차례로 여, 여, 남, 남, 여, 여 순으로 앉으면 $X=3$이다. $V(6X+4)$의 값은?



$$E(X)=\frac{5+8+9+8+5}{15}=\frac{7}{3}$$

$$E(X^2)=\frac{5+16+27+32+25}{15}=7$$

$$V(X)=7-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{14}{9}$$

① $P(X=1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$

② $P(X=2)=\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$

③ $P(X=3)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$

④ $P(X=4)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$

⑤ $P(X=5)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{15}$

$V(6X+4)=36V(X)=56$ $\boxed{56}$

#71p Level3 4번 이산확률변수 두 개일 때는 표 그려보자

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, $(a-4)(b-2)>0$인 사건을 A라 하자. 한 개의 주사위를 두 번 던지는 24회의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 할 때, $V(3X)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

$X \sim B\left(24, \frac{11}{36}\right)$

$V(3X)=9V(X)=9\times 24\times\frac{11}{36}\times\frac{25}{36}$

$=\frac{275}{6}$ $\boxed{281}$

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	O					
2	O					
3	O					
4						
5			O	O	O	O
6			O	O	O	O

$P(A)=\frac{11}{36}$

6. 연속확률변수의 확률분포

#75p 예제 1번 일차식의 정적분과 넓이

#82p Level1 2번 정규분포 확률밀도함수 Graph는 대칭성

#83p Level2 2번 $f(m+x)=f(m-x)$ 대칭성

#85p Level3 1번 정규분포 확률밀도함수는 평균에서 최댓값

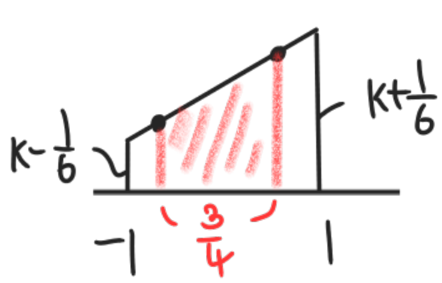
#85p Level3 3번 이항분포임을 이용하자

수능특강 핵심정리 6. 연속확률변수의 확률분포

모수_모두의수학
모수 | 모두의수학

#75p 예제 1번 일차식의 정적분과 넓이

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $-1 \le X \le 1$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 $f(x)=\frac{1}{6}x+k$일 때, $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{4} \le X \le k\right)$의 값은? (단, k는 상수이다.)



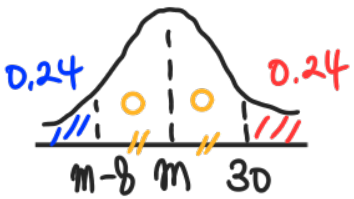
$\frac{1}{2}\times 2\times 2k=1,\quad k=\frac{1}{2}$

$f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{11}{24},\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{12}$

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{25}{24}=\frac{25}{64}\quad \boxed{\frac{25}{64}}$

#82p Level1 2번 정규분포 확률밀도함수 Graph는 대칭성

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르고
$\mathrm{P}(X \le 30)=0.76$, $\mathrm{P}(m-8 \le X \le 30)=0.52$일 때, m의 값은?



$m+8=30$

$m=22$

$\boxed{22}$

#83p Level2 2번 $f(m+x)=f(m-x)$ 대칭성

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(20-x)=f(x+40)$을 만족시킨다. $\mathrm{P}(X \le 36)=0.8413$일 때, $\mathrm{P}(27 \le X \le 39)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

$\boxed{0.6247}$

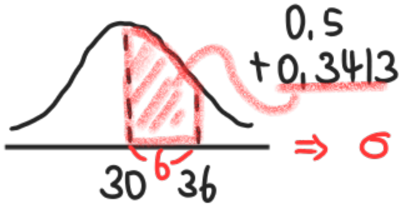
$f(20-x)=f(x+40)$

x 대신 $x-10$ 대입

$f(30-x)=f(30+x)$

$\rightarrow$ $x=30$ 에 대칭.

$\therefore m=30$



$\Rightarrow \sigma=6 \quad \left(\mathrm{P}\left(Z \le \frac{36-30}{\sigma}\right)=0.8413=\mathrm{P}(Z \le 1)\right)$

$\mathrm{P}(27 \le X \le 39)=\mathrm{P}\left(\frac{27-30}{6} \le Z \le \frac{39-30}{6}\right)=\mathrm{P}(-0.5 \le Z \le 1.5)$

$=0.1915+0.4332$

$=0.6247$

#85p Level3 1번 정규분포 확률밀도함수는 평균에서 최댓값

정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=20$에서 최댓값을 갖는다. → $m_X=20$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f(x+5)$ → $m_Y=15$, $\sigma_X=\sigma_Y$

$\mathrm{P}(16 \le X \le 24)=0.3830$일 때, $\mathrm{P}(Y \ge k)=0.0228$을 만족시키는 상수 k의 값을 그림의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

$P(16 \le X \le 24) = P\left(-\frac{4}{\sigma_X} \le Z \le \frac{4}{\sigma_X}\right) = 0.3830$ $\quad \frac{4}{\sigma_X}=0.5$

$= 2 \times 0.1915$

$\sigma_X = 8$.

$P(Y \ge k) = P\left(Z \ge \frac{k-15}{\sigma_Y}\right) = 0.0228 = 0.5 - 0.4772$ $\quad \frac{k-15}{\sigma_Y}=2$

$k-15 = 2\sigma_Y = 16$, $k=31$

$\boxed{31}$

#85p Level3 3번 이항분포임을 이용하자

어느 도시에서는 공원 조성을 위하여 A, B, C, D 네 가지 계획안을 발표하였다. 이 도시의 시민을 대상으로 네 가지 공원 조성 계획안에 대한 선호도를 조사한 결과는 다음과 같다.

계획안	A	B	C	D	합계
선호도(%)	a	b	22	8	100

임의로 뽑은 600명의 시민이 각각 한 가지씩의 계획안을 선택한다고 할 때, 계획안 A, 계획안 B를 선택할 시민의 수를 각각 확률변수 X, Y라 하자. $\mathrm{V}\left(\frac{1}{3}Y\right)=14$일 때, $\mathrm{P}(X \ge 252)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, a, b는 상수이고, $a>b$이다.)

$a+b=70$

$Y \sim B\left(600, \frac{b}{100}\right)$,

$V\left(\frac{1}{3}Y\right) = \frac{1}{9}V(Y) = 14$

$V(Y) = 600 \times \frac{b}{100} \times \left(1-\frac{b}{100}\right) = 9 \times 14$

$b^2 - 100b + 2100 = 0$

$(b-30)(b-70) = 0$

$b=30$, $a=40$ (o)

$b=70$. $a=0$ (x)

$X \sim B\left(600, \frac{2}{5}\right)$ $\quad a=40$

$X \approx N(240, 12^2)$

$P(X \ge 252)$

$= P\left(Z \ge \frac{252-240}{12}\right)$

$= P(Z \ge 1)$

$= 0.1587$

$\boxed{0.1587}$

7. 통계적 추정

#99p Level3 1번 σ값의 대소에 따른 그래프 개형

#99p Level3 2번 표본평균의 정의

#99p Level3 3번 추정마다 $\overline{x}$의 값 달라질 수 있다

#99p Level3 1번 σ값의 대소에 따른 그래프 개형

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 9^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$, 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. 두 확률변수 $\overline{X}$와 $\overline{Y}$의 확률밀도함수가 각각 $f(x)$와 $g(x)$일 때, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) m은 $m<50$인 자연수이다.
(나) $f(46)>g(46)$, $f(50)<g(50)$

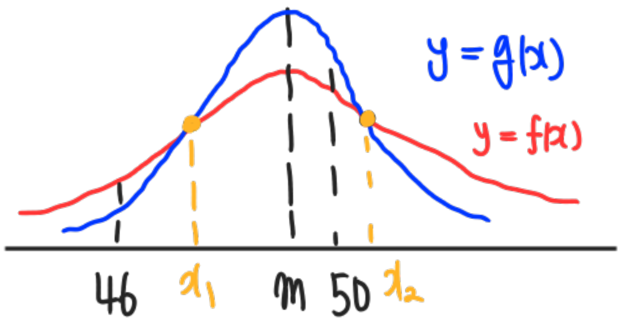
$\mathrm{P}(a \le \overline{X} \le m+4.5) = 0.1359$를 만족시키는 상수 a의 값을 표준정규분포 표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

$\boxed{\frac{205}{4}}$

$\overline{X} \sim N\left(m, \left(\frac{9}{4}\right)^2\right)$, $\overline{Y} \sim N\left(m, \left(\frac{9}{5}\right)^2\right)$

$f(x)$가 납작 ← $\sigma_{\overline{X}} = \frac{9}{4} > \sigma_{\overline{Y}} = \frac{9}{5}$



$\frac{x_1+x_2}{2} = m$

$46 < x_1$, $50 < x_2$ 이므로

$\frac{46+50}{2} = 48 < m$

$48 < m < 50 \Rightarrow m = 49$

$P(a \le \overline{X} \le m+4.5) = P\left(\frac{a-49}{\frac{9}{4}} \le Z \le \frac{4.5}{\frac{9}{4}}\right)$

$= P\left(\frac{a-49}{\frac{9}{4}} \le Z \le 2\right) = 0.1359 = 0.4772 - 0.3413$

$\frac{a-49}{\frac{9}{4}} = 1$, $a = \frac{205}{4}$

#99p Level3 2번 표본평균의 정의

자연수 n과 2보다 큰 상수 a에 대하여 숫자 0이 적혀 있는 카드 4장, 숫자 1이 적혀 있는 카드 2장, 숫자 2가 적혀 있는 카드 n장, 숫자 a가 적혀 있는 카드 2장이 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 2번 반복하여 확인한 2개의 수의 평균을 확률변수 $\overline{X}$, 2개의 수의 합을 확률변수 Y라 할 때, 두 확률변수 $\overline{X}$와 Y는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(\overline{X}=1) = \mathrm{P}(\overline{X}=2) + \mathrm{P}(\overline{X}=a)$
(나) $\mathrm{E}(Y) = 3$

$a \times n$의 값을 구하시오.

$\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{a}$
4개 2개 n개 2개

(가) $\overline{X}=1$: $(1,1)$, $(0,2)$ $\quad$ $\overline{X}=2$: $(2,2)$, $(1,3)$, $(0,4)$ $\quad$ $a=3$ $\quad$ $a=4$

$\overline{X}=a$: (a,a)

$P(\overline{X}=1) = \frac{2^2+2\times4n}{(n+8)^2}$ $\quad$ $P(\overline{X}=2) = \frac{n^2+(2\times2\times2)+(2\times4\times2)}{(n+8)^2}$

$P(\overline{X}=a) = \frac{2^2}{(n+8)^2}$

① $a\neq3,4$: $2^2+2\times4n = 2^2+n^2$, $n=8 \to a=3$ 모순

② $a=3$: $2^2+2\times4n = 2^2+n^2+2\times2\times2$, $n^2-8n+8=0$. 자연수X

③ $a=4$: $2^2+2\times4n = 2^2+n^2+2\times4\times2$, $n=4 \to a=4$

$\boxed{16}$

(나) $Y = X_1+X_2$, $E(Y)=E(2\overline{X})=2E(\overline{X})$

$2\times\frac{0\cdot4+1\cdot2+2\cdot n+a\cdot2}{n+8}=3$, $n=20-4a$

#99p Level3 3번 추정마다 $\bar{x}$의 값 달라질 수 있다

어느 고등학교 학생들의 하루 독서 시간은 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고등학교 학생 중에서 n명을 임의추출하여 구한 하루 독서 시간의 표본평균이 40일 때, 이 결과를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은 $36.08 \le m \le a$이었다. 이 고등학교 학생 중에서 다시 100명을 임의추출하여 구한 하루 독서 시간의 표본평균이 $\bar{x}$일 때, 이 결과를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은 $36.04 \le m \le a-3.96$이었다. $\bar{x}+\sigma+n$의 값은? (단, 독서 시간의 단위는 분이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

$$\underbrace{40-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{=36.08} \le m \le \underbrace{40+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{a=43.92}$$

$=3.92$

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2$

$$\underbrace{\bar{x}-1.96\times\frac{\sigma}{10}}_{=36.04} \le m \le \underbrace{\bar{x}+1.96\times\frac{\sigma}{10}}_{=a-3.96=39.96}$$

$39.96-36.04=3.92=2\times1.96\times\frac{\sigma}{10}$

$\therefore \sigma=10,\ \bar{x}=39.96-1.96$

$=38.$

$n=\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2=25$

$\boxed{73}$