수능특강 핵심정리 미적분 배울거리 정리

#23p 유제 7번 수열의 극한은 나열과 관찰이 기본
#41p Level2 6번 한 각을 두 각의 합 또는 차로 표현하기
#42p Level3 2번 한 각을 두 각의 합 또는 차로 표현하기
#53p Level3 2번 삼각함수의 정의를 이용한 좌표 놓기
#72p Level3 2번 그래프 그릴 때 “점근선” 꼭 챙기기
#72p Level3 3번 역함수임을 눈치챌 수 있어야 함
#83p Level1 6번 외워둘 적분 $\sec^2 x \csc^2 x$
#84p Level2 3번 부정적분 눈썰미 $xf'(x)+f(x)$
#85p Level2 6번 외워둘 적분 $\sec^4 x$
#86p Level3 1번 여러 번 미분 시 반복 패턴($\sin$, $\cos$, e^x)
#86p Level3 2번 부정적분 눈썰미 $f'g-fg'$
#86p Level3 3번 부정적분 눈썰미 $\{f(x)\}^2-xf(x)f'(x)$

#23p 유제 7번 수열의 극한은 나열과 관찰이 기본

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n = \frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값은?

$a_1 = \frac{1}{2^1}$ $a_2 = 0$

$a_3 = \frac{-1}{2^3}$ $a_4 = 0$

$a_5 = \frac{1}{2^5}$

$r = -\frac{1}{4}$

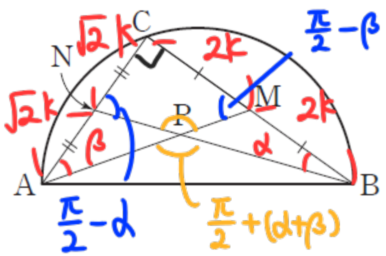
$\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{2}{5}$

$\boxed{\frac{2}{5}}$

#41p Level2 6번 한 각을 두 각의 합 또는 차로 표현하기

그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위의 점 C에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 선분 AC의 중점을 N, 선분 AM과 선분 BN의 교점을 P라 하자.

$\tan(\angle\mathrm{CBN}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$일 때, $\sin(\angle\mathrm{APB})$의 값은?



$\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ $\cos\alpha = \frac{4}{3\sqrt{2}}$ $\sin\alpha = \frac{1}{3}$

$\tan\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\sin(\angle APB) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+(\alpha+\beta)\right)$$

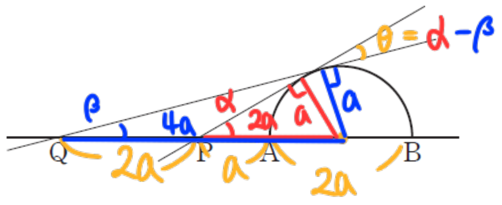
$$= \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

#42p Level3 2번 한 각을 두 각의 합 또는 차로 표현하기

그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB를 $1:3$으로 외분하는 점을 P, 선분 AB를 $3:5$로 외분하는 점을 Q라 하자. 점 P를 지나고 반원에 접하는 직선과 점 Q를 지나고 반원에 접하는 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{8}$이다. 두 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오.

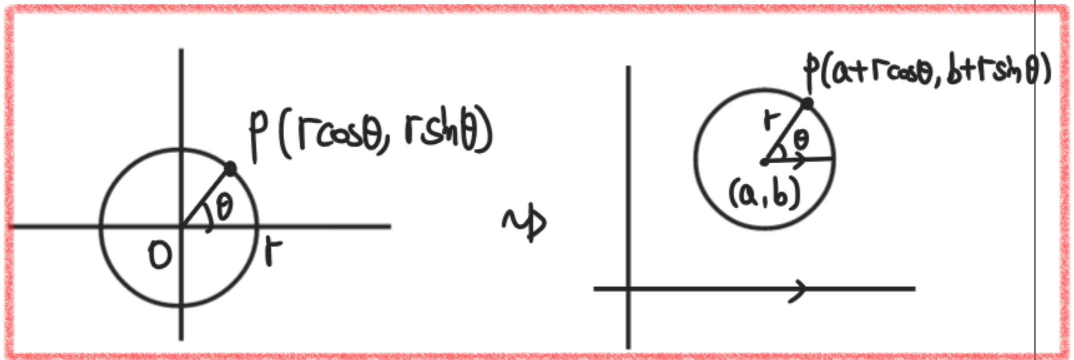


$\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\beta=\frac{1}{4}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{15}}{4}$

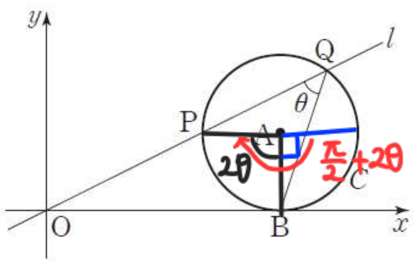
$\sin\theta=\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{15}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}$

$\boxed{18}$



#53p Level3 2번 삼각함수의 정의를 이용한 좌표 놓기

그림과 같이 점 A(3, 1)을 중심으로 하고 점 B에서 x축과 접하는 원 C가 있다. 원점 O를 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 원 C와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 원점에서 가까운 점을 P, 원점에서 먼 점을 Q라 하고 $\angle BQO=\theta$라 하자. 선분 OP의 길이를 $f(\theta)$라 할 때, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은? (단, 직선 l의 기울기는 $\frac{3}{4}$보다 작다.)



$P\left(3+1\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{2}-2\theta\right), 1+1\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right)$

$P(3-\sin2\theta, 1-\cos2\theta)$

$\overline{OP}^2=(3-\sin2\theta)^2+(1-\cos2\theta)^2$

$=11-6\sin2\theta-2\cos2\theta$

$f(\theta)=(11-6\sin2\theta-2\cos2\theta)^{\frac{1}{2}}$

$f'(\theta)=\frac{1}{2}(11-6\sin2\theta-2\cos2\theta)^{-\frac{1}{2}}(-12\cos2\theta+4\sin2\theta)$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\times5^{-\frac{1}{2}}\times4=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

#72p Level3 2번 그래프 그릴 때 "점근선" 꼭 챙기기

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{a(x+1)^2}{x^2+1} & (x\le 1) \\ x^3+bx^2+cx+d & (x>1) \end{cases} \quad (a>0\text{이고, } a,\ b,\ c,\ d\text{는 상수})$$

일 때, 실수 t에 대하여 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-a)\times f(a)$의 값은?

(가) $g(0)=2$

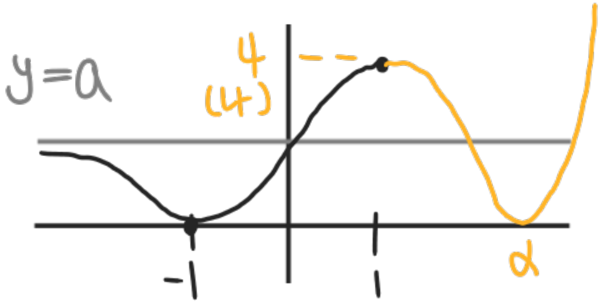
(나) $\lim_{t\to 4-}g(t)-\lim_{t\to 4+}g(t)=2$ *1 이었다면?

$\boxed{\dfrac{4}{5}}$

$x=-1$ 극소 $x=1$ 극대

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{a(x+1)^2}{x^2+1}=a$ $f(-1)=0,\ f(1)=2a$

(가) $f(x)=0$ 서로 다른 실근 2개 $x=-1,\ \alpha$



$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2a(1-x^2)}{(x^2+1)^2} & (x\le 1) \\ 3x^2+2bx+c & (x>1) \end{cases}$$

$g(x)=(x-1)^2(x-\beta)+4$

$g'(x)=2(x-1)(x-\beta)+(x-1)^2$

$=(x-1)(3x-2\beta-1) \to \alpha=\dfrac{2\beta+1}{3}$

$f(1)=2a=b+c+d+1$

$f'(1)=0=2b+c+3$

$g(\alpha)=-4\left(\left(\dfrac{\beta-1}{3}\right)^3-1\right)=0,\ \beta=4.$

$g(x)=x^3-6x^2+9x$

$b=-6,\ c=9,\ d=0,\ a=2$ $f(-2)\times f(2)=\dfrac{2}{5}\times 2=\dfrac{4}{5}$

#72p Level3 3번 역함수임을 눈치챌 수 있어야 함

$f(\alpha(t))=t,\ f(\beta(t))=t$

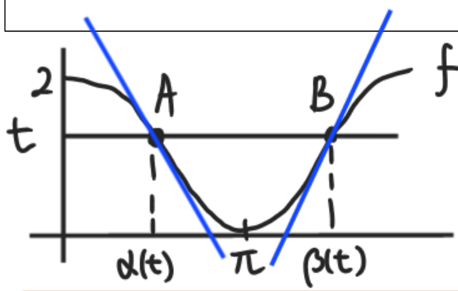
$0<x<2\pi$에서 정의된 함수 $f(x)=\cos x+1$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=t\ (0<t<2)$와 만나는 두 점을 각각 $A(\alpha(t),\ t),\ B(\beta(t),\ t)$ $(\alpha(t)<\beta(t))$라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 A, B에서의 접선이 y축과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 선분 CD의 길이를 $g(t)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $f'(\alpha(t))+f'(\beta(t))=0$

ㄴ. $\alpha'(t)\times\beta'(t)=-\csc^2(\alpha(t))$

ㄷ. $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$



$f(x)=\cos x+1$

ㄱ $\alpha(t)+\beta(t)=2\pi$

$f'(x)=-\sin x$

$f'(\alpha(t))+f'(\beta(t))$

$=-\sin\alpha(t)-\sin(2\pi-\alpha(t))$

$=-\sin\alpha(t)+\sin\alpha(t)$

$=0$

ㄴ $f'(\alpha(t))\alpha'(t)=1$

$\alpha'(t)\beta'(t)$

$=\frac{1}{f'(\alpha(t))}\times\frac{1}{f'(\beta(t))}$

$=\frac{1}{-\sin\alpha(t)}\times\frac{1}{-\sin\beta(t)}$

$=\frac{1}{\sin\alpha(t)}\times\frac{1}{\sin(2\pi-\alpha(t))}$

$=-\csc^2\alpha(t)$

ㄷ $y=f'(\alpha(t))(x-\alpha(t))+t$

y절편 $-\alpha(t)f'(\alpha(t))+t$

$-\beta(t)f'(\beta(t))+t$

$g(t)=-\alpha(t)f'(\alpha(t))+\beta(t)f'(\beta(t))$

$=-\alpha(t)f'(\alpha(t))+(2\pi-\alpha(t))f'(\beta(t))$

$=2\pi f'(\beta(t))$ (∵ ㄱ)

$=2\pi\times-\sin(2\pi-\alpha(t))$

$=2\pi\sin\alpha(t)$

$g'(t)=2\pi\cos\alpha(t)\cdot\alpha'(t)$

$t=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow\alpha'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(\alpha\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$

$=\frac{1}{-\sin\frac{2\pi}{3}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$

$g'\left(\frac{1}{2}\right)=2\pi\cos\frac{2\pi}{3}\times\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

#83p Level1 6번 외워둘 적분 $\sec^2x\csc^2x$

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}$이고 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값은?

$f'(x)=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}=\sec^2x+\csc^2x$,

$f(x)=\tan x-\cot x+C$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-1+C=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$f(x)=\tan x-\cot x+\frac{\sqrt{3}}{3}$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

$\boxed{\sqrt{3}}$

#84p Level2 3번 부정적분 눈썰미 $xf'(x)+f(x)$

정의역이 $\{x|x>0\}$인 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여

$xf'(x)+f(x)=4x^3\ln x$를 만족시킨다. $f(1)=-\frac{1}{4}$일 때, $f(e)$의 값은?

$$(xf(x))'=4x^3\ln x$$

$$xf(x)=x^4\ln x-\frac{1}{4}x^4+C$$

$$x=1,\quad -\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}+C,\quad C=0.$$

$$xf(x)=x^4\ln x-\frac{1}{4}x^4$$

$$x=e,\quad ef(e)=\frac{3}{4}e^4,$$

$$f(e)=\frac{3}{4}e^3,$$

$$\boxed{\frac{3}{4}e^3}$$

#85p Level2 6번 외워둘 적분 $\sec^4 x$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^4 x}dx=k$일 때, k^2의 값을 구하시오.

$$1+\tan^2 x=\sec^2 x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^4 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^2 x\times(1+\tan^2 x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^2 x+\sec^2 x\tan^2 x\,dx$$

$$=\left[\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{3}$$

$$=2\sqrt{3}$$

$$\boxed{2\sqrt{3}}$$

#86p Level3 1번 여러 번 미분 시 반복 패턴(sin, cos, e^x)

실수 전체의 집합에서 이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = \cos x - 2\int_0^x f(t)\sin(x-t)dt$$

를 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $f(0) = 1$

ㄴ. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t dt = \dfrac{f'(\frac{\pi}{2}) - f'(-\frac{\pi}{2})}{2}$

ㄷ. $f''(0) = 3$

$$f(x) = \cos x - 2\int_0^x f(t)\{\sin x\cos t - \cos x\sin t\}dt$$

$$= \cos x - 2\sin x\int_0^x f(t)\cos t dt + 2\cos x\int_0^x f(t)\sin t dt$$

$$f'(x) = -\sin x - 2\cos x\int_0^x f(t)\cos t dt - 2\sin x\int_0^x f(t)\sin t dt$$

$$f'(\tfrac{\pi}{2}) = -1 - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\, dt$$

$$f'(-\tfrac{\pi}{2}) = 1 + 2\int_0^{-\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\, dt$$

$$-\frac{f'(\frac{\pi}{2}) + f'(-\frac{\pi}{2})}{2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\, dt$$

$-f(x)$

$//$

$$f''(x) = -\cos x + 2\sin x\int_0^x f(t)\cos t dt - 2\cos x\int_0^x f(t)\sin t dt$$

$$-2f(x)$$

$$f''(x) = -3f(x)$$

$$f''(0) = -3f(0) = -3$$

*TMI

ㄴ에서 $f'(\frac{\pi}{2}) \neq 0$ 임을 확인해야 정확한 풀이.
하지만 문제 조건을 만족하는 함수 $f(x)$는 존재하지 않아서 확인할 수 없습니다.

#86p Level3 2번 부정적분 눈썰미 $f'g-fg'$

실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$, $g(x)>0$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=f(x)g(x)$이다.

$f(1)=g(1)$일 때, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g(n)}{f(n)}$의 값은? (단, n은 자연수이다.)

$$\frac{f'g-fg'}{g^2}=\frac{f}{g},\quad \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f}{g}=h$$

$$h'(x)=h(x) \Rightarrow \frac{h'(x)}{h(x)}=1,\quad \ln h(x)=x+C$$

$$\ln\frac{f(x)}{g(x)}=x+C,\quad \frac{f(x)}{g(x)}=e^{x+C},\quad C=-1\left(\because \frac{f(1)}{g(1)}=1\right)$$

$$\frac{g(x)}{f(x)}=e^{-x+1}$$

$$\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}=\frac{1}{(e-1)}\qquad \boxed{\frac{1}{e-1}}$$

#86p Level3 3번 부정적분 눈썰미 $\{f(x)\}^2-xf(x)f'(x)$

정의역이 $\{x|x>0\}$인 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여

$f(x)>0$, $\{f(x)\}^2-xf(x)f'(x)=x^4e^{-x}$을 만족시킨다.

$$\int_1^2\frac{e^{2x}\{f(2x)\}^3}{x^3}dx-12\int_2^4 f(x)dx=\frac{e^4}{m}\{f(4)\}^3-\frac{e^2}{2}\{f(2)\}^3$$

일 때, 자연수 m의 값을 구하시오.

① 적분구간 통일

$$2x=t,\ \int_1^2\frac{e^{2x}f(2x)^3}{x^3}dx$$

$$=\int_2^4\frac{e^t f(t)^3}{t^3}\times 4dt$$

$$=4\int_2^4\frac{e^t f(t)^3}{t^3}dt$$

② $\int_2^4\frac{e^x f(x)^3}{x^3}dx$

$$=\left[e^x\cdot\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3\right]_2^4-\int_2^4 e^x\cdot 3\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2\times\frac{f'(x)x-f(x)\cdot 1}{x^2}dx$$

$$=\frac{e^4}{64}f(4)^3-\frac{e^2}{8}f(2)^3-\int_2^4 3e^x f(x)\frac{xf(x)f'(x)-f(x)^2}{x^4}dx \quad // -x^4e^{-x}$$

$$=\frac{e^4}{64}f(4)^3-\frac{e^2}{8}f(2)^3-3\int_2^4 f(x)dx$$

③ $$\int_1^2\frac{e^{2x}f(2x)^3}{x^3}dx=4\int_2^4\frac{e^t f(t)^3}{t^3}dt=\frac{e^4}{16}f(4)^3-\frac{e^2}{2}f(2)^3+12\int_2^4 f(x)dx$$

$\therefore m=16$, $\boxed{16}$