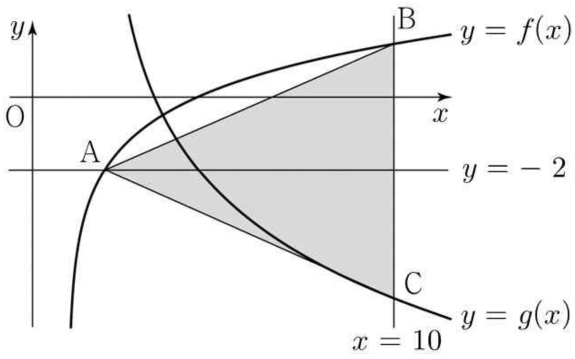
아드레날린 ex
공통

1. $a>1$인 실수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=\frac{1}{2}\log_a(x-1)-2,\ \ g(x)=\log_{\frac{1}{a}}(x-2)+1$$

이 있다. 직선 $y=-2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점을 A라 하고, 직선 $x=10$과 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ACB의 넓이가 28일 때, a^{10}의 값은?
〔2021년 7월 11〕

① 15　② 18　③ 21　④ 24　⑤ 27



1. 정답 ④ 〔2021년 7월 11〕

1) 그림 있으면 그림 보면서,

$a>1$인데 $f(x)=\frac{1}{2}\log_a(x-1)-2$, $g(x)=\log_{\frac{1}{a}}(x-2)+1$랍니다. 그리고 그림이 주어져 있네요. 여기에 $y=-2$와 $y=f(x)$가 만나는 점이 A, $x=10$과 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점이 각각 B, C이라고 합니다. 그림에 다 표시되어 있네요. 그리고 삼각형 ACB의 넓이가 28이라네요.

일단 좌표부터 확인해봐야겠죠? 먼저 A는 $y=-2$와 $y=f(x)$가 만나는 점이니까 $\frac{1}{2}\log_a(x-1)-2=-2$라 하면 $\log_a(x-1)=0$이고 $0=\log_a 1$이니까 $x-1=1$입니다. $x=2$이네요.

다음으로 $x=10$과 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점이 각각 B, C이니까 $x=10$을 각각 넣어보면 되겠죠?

$\text{B}=\left(10,\ \frac{1}{2}\log_a 9-2\right)=(10,\ \log_a 3-2)$이구요, $\text{C}=\left(10,\ \log_{\frac{1}{a}}8+1\right)=(10,\ -3\log_a 2+1)$입니다.

삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times$(B(또는 C)의 x좌표 $-$ A의 x좌표)$\times$(B의 y좌표 - C의 y좌표)

$=\frac{1}{2}\times(10-2)\times(\log_a 3-2+3\log_a 2-1)=4(\log_a 24-3)$입니다. 이게 28이니까 $\log_a 24=10$이고

$a^{10}=24$이네요. 답은 ④번입니다.

2. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$(n+1)S_{n+1} = \log_2(n+2) + \sum_{k=1}^{n} S_k \ \cdots \ (*)$$

가 성립할 때, $\sum_{k=1}^{n} ka_k$를 구하는 과정이다.

> 주어진 식 $(*)$에 의하여
>
> $$nS_n = \log_2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \ (n \geq 2) \ \cdots \ ㉠$$
>
> 이다. $(*)$에서 ㉠을 빼서 정리하면
>
> $$(n+1)S_{n+1} - nS_n$$
> $$= \log_2(n+2) - \log_2(n+1) + \sum_{k=1}^{n} S_k - \sum_{k=1}^{n-1} S_k \ (n \geq 2)$$
>
> 이므로
>
> $$(\boxed{\text{(가)}}) \times a_{n+1} = \log_2\frac{n+2}{n+1} \ (n \geq 2)$$
>
> 이다.
>
> $a_1 = 1 = \log_2 2$이고,
>
> $2S_2 = \log_2 3 + S_1 = \log_2 3 + a_1$이므로
>
> 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$na_n = \boxed{\text{(나)}}$$
>
> 이다. 따라서
>
> $$\sum_{k=1}^{n} ka_k = \boxed{\text{(다)}}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $f(8) - g(8) + h(8)$의 값은?

① 12　② 13　③ 14　④ 15　⑤ 16

2. 정답 ① 〔2021년 7월 13〕

1) 문제해석, 조건해석

$a_1 = 1$인 수열이 있는데 $(n+1)S_{n+1} = \log_2(n+2) + \sum_{k=1}^{n} S_k$ ⋯ $(\ast)$이랍니다. 이때 $\sum_{k=1}^{n} ka_k$를 구하라네요.

가봅시다.

그리고 갑자기 $nS_n = \log_2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} S_k$ $(n \geq 2)$ ⋯ ㉠가 나오네요. 위 식이랑 비교해서 잘 보면 n 대신 $n-1$이 들어간 식 같아요. 이걸 빼서 정리하면

$(n+1)S_{n+1} - nS_n = \log_2(n+2) - \log_2(n+1) + \sum_{k=1}^{n} S_k - \sum_{k=1}^{n-1} S_k$ $(n \geq 2)$이 나옵니다. 그리고 갑자기

$(\boxed{(가)}) \times a_{n+1} = \log_2 \dfrac{n+2}{n+1}$ $(n \geq 2)$가 나오네요. 위 식을 잘 정리해서 아래 식을 만들어보라는 거겠죠?

가봅시다.

2) 시그마 펼치기

일단 $(n+1)S_{n+1} - nS_n$을 정리하기 위해서 펼쳐볼게요.

$(n+1)S_{n+1} = (n+1)a_1 + (n+1)a_2 + \cdots + (n+1)a_n + (n+1)a_{n+1}$이고

$nS_n = na_1 + na_2 + \cdots + na_n$입니다. 따라서

$(n+1)S_{n+1} - nS_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + (n+1)a_{n+1} = S_n + (n+1)a_{n+1}$입니다.

그리고 오른쪽을 정리해볼게요. 일단 로그는 빼는 거니까 $n+1$을 나눠서 $\log_2 \dfrac{n+2}{n+1}$로 해주구요, 오른쪽의 시그마는 그냥 펼치면 되겠죠? $(S_1 + \cdots + S_{n-1} + S_n) - (S_1 + \cdots + S_{n-1}) = S_n$입니다.

정리하면 $S_n + (n+1)a_{n+1} = \log_2 \dfrac{n+2}{n+1} + S_n$이네요. 양변에 S_n을 없애면 $(n+1)a_{n+1} = \log_2 \dfrac{n+2}{n+1}$입니다.

구했네요! (가)$= f(n) = n+1$입니다.

그리고 내려가보면 모든 자연수 n에 대하여 $na_n = \boxed{(나)}$라고 합니다. 어? 방금 $(n+1)a_{n+1} = \log_2 \dfrac{n+2}{n+1}$을 구했으니까 n 대신 $n-1$을 넣어서 정리하면 되는 거 아닌가? 라고 생각하실 수 있겠지만 지금 $(n+1)a_{n+1} = \log_2 \dfrac{n+2}{n+1}$는 $n \geq 2$에서만 사용할 수 있어요. 다시 말하면 $a_1 = \log_2 \dfrac{2}{1}$, $2a_2 = \log_2 \dfrac{3}{2}$인지 확인해야만 $(n+1)a_{n+1} = \log_2 \dfrac{n+2}{n+1}$에 n 대신 $n-1$을 넣어서 모든 자연수 n에 대하여 성립한다고 할 수

있다는 거죠.

그래서 $a_1 = 1 = \log_2 2$라고 하면서 확인하고 있네요. 그러면 $2a_2 = \log_2 \frac{3}{2}$을 확인해야겠어요. 아래에 $2S_2 = \log_2 3 + S_1 = \log_2 3 + a_1$가 있네요. 가봅시다. 시그마를 펼치면 $2a_1 + 2a_2 = \log_2 3 + a_1$인데 $a_1 = 1$이니까 $2a_2 = \log_2 3 - 1 = \log_2 \frac{3}{2}$입니다. 맞네요! 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $na_n = \log_2 \frac{n+1}{n}$입니다. (나)$= g(n) = \log_2 \frac{n+1}{n}$입니다.

그리고는 마지막으로 $\sum_{k=1}^{n} ka_k$를 구하랍니다. 아까 $na_n = \log_2 \frac{n+1}{n}$랬으니까 넣어보면

$\sum_{k=1}^{n} \log_2 \frac{k+1}{k} = \log_2 \frac{2}{1} + \log_2 \frac{3}{2} + \cdots + \log_2 \frac{n+1}{n} = \log_2 \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = \log_2 (n+1)$이네요.

(다)$= h(n) = \log_2 (n+1)$입니다.

이제 숫자를 넣어볼까요? $f(8) - g(8) + h(8) = 9 - \log_2 \frac{9}{8} + \log_2 9 = 9 - \log_2 9 + \log_2 8 + \log_2 9 = 9 + 3 = 12$ 입니다. 답은 ①번이네요.

3. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $b(t)$가

$$v(t)=3t^2-6t$$

일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
〔2021년 7월 14〕

<보 기>

ㄱ. 시각 $t=2$에서 점 P의 움직이는 방향이 바뀐다.
ㄴ. 점 P가 출발한 후 움직이는 방향이 바뀔 때 점 P의 위치는 -4이다.
ㄷ. 점 P가 시각 $t=0$일 때부터 가속도가 12가 될 때까지 움직인 거리는 8이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 정답 ⑤ 〔2021년 7월 14〕

1) 문제해석, 위치, 속도, 가속도는 수직선 위를 움직인다

$t=0$일 때 원점을 출발하는데 속도가 $v(t)=3t^2-6t$랍니다.

ㄱ에서 $t=2$에서 점 P의 움직이는 방향이 바뀌냐고 물어보네요. 움직이는 방향이 바뀐다는 건? $t=2$에서 극점을 가져야 한다는 거죠. 위로 가다가 아래로 가거나 아래로 가다가 위로 가는 건 극점이잖아요. 지금 속도 함수를 보면 $v(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$이잖아요. $t=2$에서 감소하다가 증가하게 되네요. ㄱ은 맞습니다.

ㄴ에서 점 P가 출발한 후 움직이는 방향이 바뀔 때의 위치가 -4냐고 물어보네요. 이거는 위치 그래프를 알아야겠죠? 위치는 속도를 적분한 거니까 $v(t)=3t^2-6t$를 적분해봅시다. 위치를 $x(t)$라 하면 $x(t)=t^3-3t^2+a$인데 원점을 출발하죠? 따라서 $t=0$일 때 위치도 0이어야 합니다. $x(t)=t^3-3t^2$이네요. $t=2$일 때 위치는 -4맞습니다. ㄴ도 맞네요.

ㄷ에서 점 P가 시각 $t=0$일 때부터 가속도가 12가 될 때까지 움직인 거리가 8이냐고 하네요. 가속도는 속도를 미분한 거죠? 따라서 미분하면 $v'(t)=6t-6$입니다. 이게 12가 되는 점은 $6t-6=12$라 하고 정리하면 $t=3$이네요.

그럼 결국 $t=0$부터 $t=3$까지 움직인 거리를 구해야 하는 거네요.

2) 거리는 절댓값이다, 이차함수와 x축으로 둘러싸인 넓이

움직인 거리는 속도를 적분해서 구해야 합니다. 그런데 단순히 구하는 게 아니라 절댓값을 씌운 뒤 적분해야 해요. 거리는 음수가 나올 수 없으니까요. 따라서 $\int_0^3 \left|3t^2-6t\right|dt$입니다.

$v(t)$의 그래프를 그려보면 0부터 2까지는 음수, 2부터 3까지는 양수잖아요? 그런데 여기에 0부터 2까지 적분한 건 이차함수와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 공식을 사용하면 되죠. $\frac{3}{6}(2-0)^3=4$입니다.

$\int_2^3 (3t^2-6t)dt=\left[t^3-3t^2\right]_2^3=4$입니다. 둘을 더하면 $4+4=8$입니다. ㄷ도 맞네요! 따라서 맞는 건 ㄱ, ㄴ, ㄷ이고 답은 ⑤번입니다.

4. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근 α, 0, $\beta\,(\alpha<0<\beta)$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=9$는 서로 다른 세 실근을 가진다. (나) $f(\alpha)=-16$

함수 $g(x)=|f'(x)|-f'(x)$에 대하여 $\displaystyle\int_0^{10} g(x)dx$의 값은?

〔2021년 7월 15〕

① 48 ② 50 ③ 52 ④ 54 ⑤ 56

4. 정답 ② 〔2021년 7월 15〕

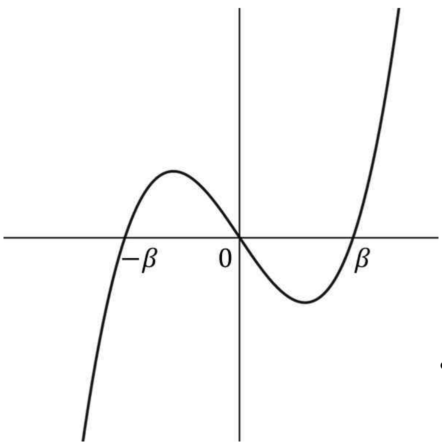
1) 문제해석

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있는데 도함수 $f'(x)$에 대하여 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근이 α, 0, $\beta\,(\alpha<0<\beta)$이고 이 순서대로 등차수열을 이룬답니다. 등차수열을 이루니까 등차중항에 의하여 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=0$이고 $\beta=-\alpha$가 되어야겠죠? 그래야 $-\beta$, 0, β로 공차가 β인 등차수열을 이룰 테니까요.

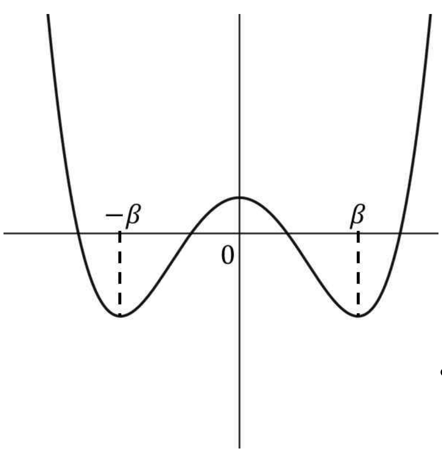
그러면 $f'(x)=0$의 실근이 $-\beta$, 0, β인 거니까 인수정리에 의하여 $f'(x)=4x(x-\beta)(x+\beta)$입니다. 도함수는 최고차항의 계수가 1인 사차함수를 미분한 거니까 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이죠?

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 조건해석

저거 식을 잘 보면 $f'(x)$는 기함수이죠? 그래프를 그려보면

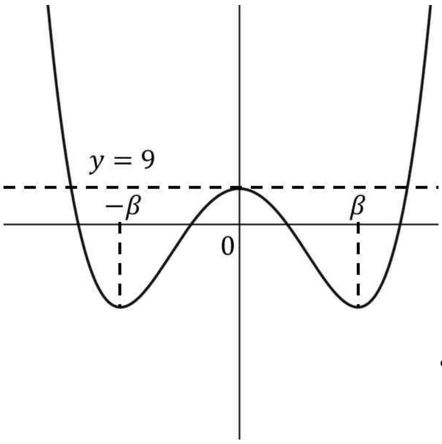


이렇게 됩니다. 이 상태에서 $f(x)$를 그려보면



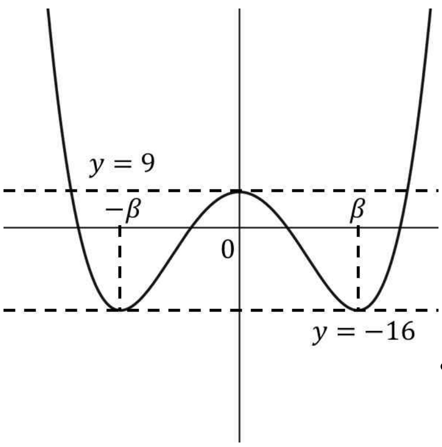
이렇게 되죠? 아직 확정은 아니에요. 위아래로 움직일 수는 있어요.

이때 (가)조건에서 $f(x)=9$가 서로 다른 세 실근을 갖는답니다. 이건 다시 말하면 $y=f(x)$와 $y=9$가 세 점에서 만난다는 거죠. 그래프 보세요. 세 점에서 만나는 x축에 평행한 직선은 딱 하나입니다.



이렇게 말이죠. $f(0)=9$입니다.

(나)조건에서는 $f(\alpha)=-16$라네요. 아까 $\beta=-\alpha$라 했으니까 $f(-\beta)=-16$이겠네요. 그럼



이렇게 됩니다.

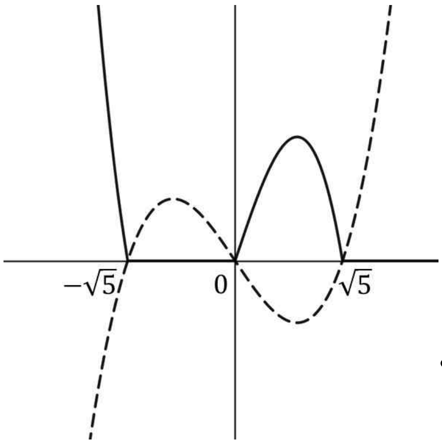
결국 $y=f(x)$는 $y=-16$과 $x=-\beta$, $x=\beta$에서 접해야 하죠? 따라서 $f(x)+16$은 $(x+\beta)$, $(x-\beta)$라는 인수를 각각 적어도 두 개는 가져야 합니다. 인수정리에 의하여 $f(x)+16=(x+\beta)^2(x-\beta)^2$이고 $f(x)=(x+\beta)^2(x-\beta)^2-16$이네요.

이때 $f(0)=9$이어야 하잖아요? 넣어보면 $\beta^4=25$이고 $\beta^2=5$입니다. $\beta>0$이니까 $\beta=\sqrt{5}$이네요.
$f(x)=(x+\sqrt{5})^2(x-\sqrt{5})^2-16$입니다.

3) 절댓값 풀기

마지막으로 $g(x)=|f'(x)|-f'(x)$일 때 $\int_0^{10} g(x)dx$를 구하라네요. 일단 해석부터 해봅시다.

일단 $f'(x)\geq 0$일 때는 $g(x)=0$입니다. 그리고 $f'(x)<0$이면 $g(x)=-2f'(x)$입니다. 다시 표현해보면 $f'(x)$가 x축보다 크거나 같을 때는 0이고, 아래에 있을 때는 -2를 곱해서 위로 접어 올린 그래프겠네요.
그래프를 대충 그려보면



이렇게 되겠어요. 그러면 0부터 10까지 적분한 건 그냥 0부터 $\sqrt{5}$까지 적분한 거네요. $x \geq \sqrt{5}$부터는 계속 0이니까요.

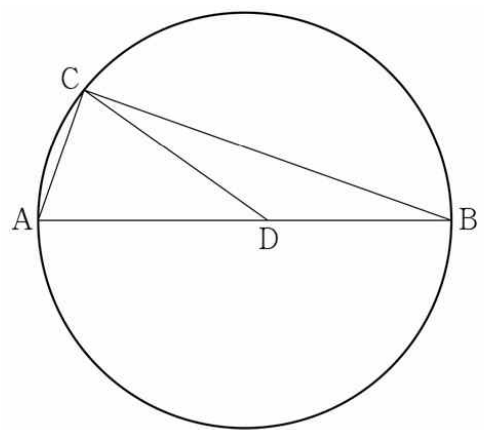
$f'(x) = 4x(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) = 4x^3 - 20x$이니까

$\int_0^{10} g(x)dx = \int_0^{\sqrt{5}} (-8x^3+40x)dx = \left[-2x^4+20x^2\right]_0^{\sqrt{5}} = 50$입니다. 답은 ②번이네요.

5. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 C에 대하여

$$\overline{\mathrm{BC}}=12\sqrt{2},\ \cos(\angle\mathrm{CAB})=\frac{1}{3}$$

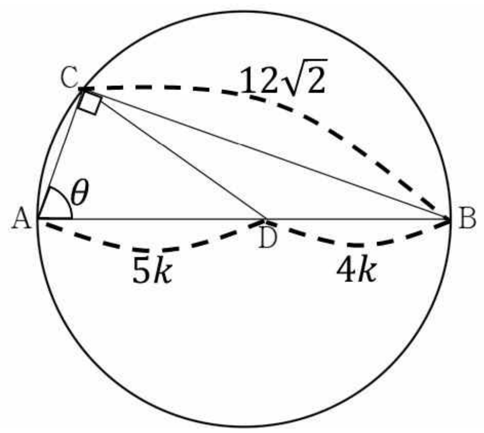
이다. 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점을 D라 할 때, 삼각형 CAD의 외접원의 넓이는 S이다.
$\dfrac{S}{\pi}$의 값을 구하시오. 〔2021년 7월 20〕



5. 정답 27 〔2021년 7월 20〕

1) 그림 있으면 그림 보면서

그림처럼 선분 AB가 지름인 원이 있는데 $\overline{\mathrm{BC}}=12\sqrt{2}$, $\cos(\angle\mathrm{CAB})=\dfrac{1}{3}$이라고 합니다. 그리고 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점이 D라네요. 이거 표시 좀 해볼까요? $\overline{\mathrm{AB}}=9k$, $\angle\mathrm{CAB}=\theta$라 할게요. $\angle\mathrm{BCA}=\dfrac{\pi}{2}$이죠? 지름을 한 변으로 하고 원에 내접하는 삼각형의 한 각은 $\dfrac{\pi}{2}$이니까요.



이렇게 할 수 있죠? 지금 보면 삼각형 ACB가 직각삼각형이니까 sin값으로 $9k$를 바로 구할 수 있겠어요. 사인값을 구하려면.... $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$를 사용하면 되겠죠?

$\sin^2\theta=\dfrac{8}{9}$입니다. θ은 예각이니까 $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이네요. 그런데 $\sin\theta=\dfrac{12\sqrt{2}}{9k}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이니까 $k=2$입니다.

그러면 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{CA}}^2+(12\sqrt{2})^2=18^2$이고 $\overline{\mathrm{CA}}^2=36$입니다. 길이는 양수니까 $\overline{\mathrm{CA}}=6$이네요.

그리고는 삼각형 CAD의 외접원의 넓이가 S라네요. $\dfrac{S}{\pi}$를 구하래요. 일단 외접원의 넓이를 알기 위해서는 사인법칙을 사용해야 하죠? 마침 $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$도 있으니까 $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\theta}=2R$을 사용하면 되겠어요.

2) 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각

그런데 $\overline{\mathrm{CD}}$는 어떻게 알죠? 잘 생각해보세요. 삼각형 CAD는 두 변의 길이와 한 각이 나와 있잖아요.

$\overline{\mathrm{CA}}=6$, $\overline{\mathrm{AD}}=10$이고 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$이니까 코사인법칙으로 나머지 한 변의 길이를 구해봅시다.

$\dfrac{1}{3}=\cos\theta=\dfrac{6^2+10^2-\overline{\mathrm{CD}}^2}{2\times6\times10}=\dfrac{136-\overline{\mathrm{CD}}^2}{120}$이고 정리하면 $\overline{\mathrm{CD}}^2=96$입니다. 길이는 양수니까

$\overline{\mathrm{CD}} = 4\sqrt{6}$ 이네요. 이제 할 수 있겠어요.

사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\theta} = \dfrac{\dfrac{4\sqrt{6}}{1}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}} = 6\sqrt{3} = 2R$이고 $R = 3\sqrt{3}$ 입니다. 외접원의 넓이는 $\pi R^2 = 27\pi$이네요.

따라서 $\dfrac{S}{\pi} = 27$입니다.

6. 공차가 d이고 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 \le d$
(나) 어떤 자연수 k $(k \ge 3)$에 대하여 세 항 a_2, a_k, a_{3k-1}이 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$90 \le a_{16} \le 100$일 때, a_{20}의 값을 구하시오. 〔2021년 7월 21〕

6. 정답 117 〔2021년 7월 21〕

1) 자연수 보이면 숫자 넣을 준비, 조건해석, 등차수열은 $a_n = a+(n-1)d$로 놓기

공차가 d이고 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$이 있답니다. 모든 항이 자연수라구요? 그러면 첫 항부터 계속 자연수라는 거네요? 거기에 자연수에 자연수를 더해야 자연수가 될 테니까 공차도 자연수일 거구요.

(가)조건에서 $a_1 \le d$라고 합니다. 그리고 (나)조건에서 $k \ge 3$인 어떤 자연수 k에 대하여 $a_2,\ a_k,\ a_{3k-1}$가 이 순서대로 등비수열을 이룬다네요. 등비수열을 이루니까 등비중항을 이용하면 $a_2 \times a_{3k-1} = {a_k}^2$가 되겠죠? 이때 $a_2 = a+d,\ a_k = a+(k-1)d,\ a_{3k-1} = a+(3k-2)d$이니까 $(a+d)(a+(3k-2)d)=(a+(k-1)d)^2$입니다.

어후... 이건 나중에 합시다.

2) 자연수 보이면 숫자 넣기

$90 \le a_{16} \le 100$이랍니다. $a_{16} = a+15d$이니까 $90 \le a+15d \le 100$이네요. 이때 $a_1 \le d$이잖아요? $a \le d$의 양변에 $15d$를 더하면 $a+15d \le 16d$가 됩니다. 따라서 $90 \le a+15d \le 16d$이네요. $90 \le 16d$인데 이걸 만족시키는 d는 6부터죠? 따라서 $d \ge 6$입니다.

근데 생각해보세요. $d=7$이라면 $a+105 \le 100$이잖아요? a가 자연수인데 이럴 수가 있나요? 7보다 더 커도 마찬가지이구요. $d=6$이라면 $a+90 \le 100$로 $a \le 6$이기만 하면 조건을 만족시킵니다. 따라서 $d=6$이고 $a \le 6$이네요.

이거 $(a+d)(a+(3k-2)d)=(a+(k-1)d)^2$에 넣어볼까요? $(a+6)(a-12+18k)=(a+6k-6)^2$입니다.
정리하면 $a^2-6a-72+18ak+108k = a^2+12ak-12a+36k^2-72k+36$입니다.
$6a+6ak = 36k^2-180k+108$이네요. 양변 6으로 나누면 $a+ak = 6k^2-30k+18$입니다. 정리하면 $a(k+1)=6k^2-30k+18$이네요.

어? 그런데 a는 6 이하의 자연수이죠? $a = \dfrac{6k^2-30k+18}{k+1}$은 6 이하의 자연수여야 합니다. 따라서

$a = \dfrac{6k^2-30k+18}{k+1} \le 6$이고 $\dfrac{k^2-5k+3}{k+1} \le 1$이어야 하네요. 여기서 k도 3 이상의 자연수니까

$k^2-5k+3 \le k+1$이고 $k^2-6k+2 \le 0$이어야 합니다. k^2-6k+2는 $k=3$이 축인 이차함수이죠? $k=3$은 마침 3 이상이라는 조건에 딱 맞네요. 넣어보면 -7로 0보다 작거나 같습니다. 맞네요? 혹시 모르니까 4도 넣어봅시다. -6이니까 이것도 되네요. 5를 넣으면 -3입니다. 6부터는 양수가 되네요. 지금 후보는

3, 4, 5입니다.

그러면 $a=\frac{6k^2-30k+18}{k+1}=\frac{6\left(k^2-5k+3\right)}{k+1}$에 넣어서 자연수가 되는지 확인해볼게요. $k=3$을 넣으면 $-\frac{18}{4}$입니다. 안 되네요. $k=4$를 넣으면 $-\frac{6}{5}$입니다. 안 되네요. $k=5$를 넣으면 $\frac{18}{6}=3$입니다. 되네요! 따라서 $k=5$, $a=3$이고 $a_{20}=a+19d=3+114=117$입니다.

7. 삼차함수 $f(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$에 대하여

$x \ge -3$에서 정의된 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (-3 \le x < 3) \\ \\ \frac{1}{k+1}f(x-6k) & (6k-3 \le x < 6k+3) \end{cases}$$

(단, k는 모든 자연수)

이다. 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때,

$\sum_{n=1}^{12} a_n$의 값을 구하시오. 〔2021년 7월 22〕

7. 정답 64 〔2021년 7월 22〕

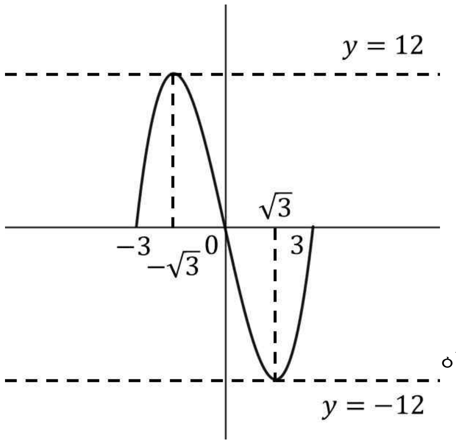
1) 문제해석, 자연수 보이면 숫자 넣기

$f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$가 있네요. 이거 기함수네요? 최고차항의 계수가 양수인 기함수에요.

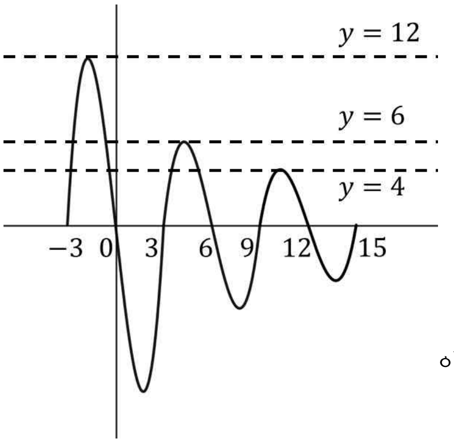
이때 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (-3 \le x < 3) \\ \dfrac{1}{k+1}f(x-6k) & (6k-3 \le x < 6k+3) \end{cases}$ 라고 합니다. k는 모든 자연수이구요. 자연수면 숫자 넣어야겠죠? 가봅시다. $k=1$이면 $3 \le x < 9$에서 $\dfrac{1}{2}f(x-6)$입니다. $k=2$이면 $9 \le x < 15$에서 $\dfrac{1}{3}f(x-12)$입니다. 지금 보면 $-3 \le x < 3$에서 $f(x)$를 6만큼씩 오른쪽으로 평행이동하면서 $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{4}$, $\cdots$이렇게 점점 작게 만드는 함수네요. 대충이라도 그려볼까요?

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(x^3-9x)$는 -3, 0, 3에서 x축과 만나구요, 미분하면 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(3x^2-9)=2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$이니까 $x=-\sqrt{3}$에서 극대, $x=\sqrt{3}$에서 극소네요. 극댓값은 12이고 극솟값은 -12입니다.



이렇게 되는데 이게 6씩 평행이동하면서 $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{4}$, $\cdots$가 되니까



이렇게 되겠네요. 이정도면 해석은 된 것 같아요.

3) 시그마 펼치기,

이때 $y=n$과 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n이라고 하는데 $\sum_{n=1}^{12} a_n$를 구하랍니다. 해석은 굉장히 간단하네요. 그냥 $y=n$이라는 직선을 그어서 $y=g(x)$와 만나는 점의 개수를 구하면 되는 거예요.
그러면 일단 펼쳐봅시다. $a_1+a_2+\ \cdots\ +a_{12}$이네요.

a_{12}는 $y=12$랑 $y=g(x)$가 만나는 점의 개수이죠? 위의 그래프에서 한 점에서만 만나잖아요? $a_{12}=1$입니다. a_{11}은요? 지금 보면 2개의 점에서 만나죠. $y=12$와 $y=6$ 사이에서는 2개의 점에서 만나잖아요. 따라서 $a_{11}=a_{10}=a_9=a_8=a_7=2$입니다.

그러다가 a_6이 되면 3개의 점에서 만납니다. $a_6=3$이네요. 그리고 $y=6$과 $y=4$ 사이에 있으면 4개의 점에서 만나네요. 따라서 $a_5=4$입니다.

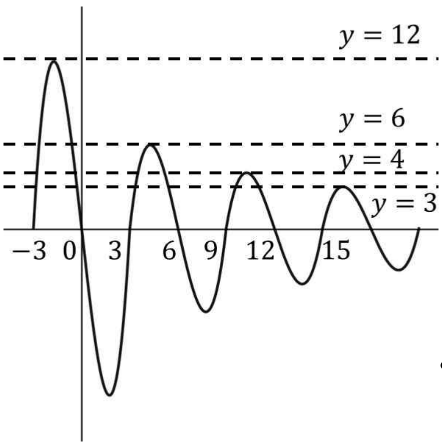
$y=4$가 되면 5개의 점에서 만나죠. $a_4=5$입니다. 이 아래부터는 생각을 좀 해봐야겠어요.

지금 보면 함수의 극대점이 될 때 만나는 점의 개수가 변하는 걸 알 수 있어요. 극댓값은 12에서부터 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\cdots$이렇게 작아지고 있잖아요? 이걸 나열해보면 12, 6, 4, 3, $\frac{12}{5}$, 2, $\cdots$, 1, $\cdots$이렇게 되겠죠?

그리고 극댓값과 a_n의 관계를 보면 12 $\rightarrow$ 6으로 갈 때 a_n이 2가 늘었어요. 12일 때 $a_{12}=1$, 12랑 6 사이일 때 $a_n=2$, 6일 때 3 이런 식으로요.

그러면 4에서 3으로 갈 때도 a_n이 2가 늘어야겠죠? 지금 $a_4 = 5$이니까 $a_3 = 7$이 되어야 할 거예요.

혹시 모르니까 그래프를 늘려봅시다.



이렇게 되네요. $a_3 = 7$ 맞네요? 그럼 이제 다음으로 가봅시다.

다음은 3에서 2로 갈 때에요. 지금 12, 6, 4, 3, $\frac{12}{5}$, 2, ⋯, 1, ⋯을 보면 3에서 2를 가려면 $\frac{12}{5}$를 거쳐서 가야 하죠? 그러면 3에서 $\frac{12}{5}$로 가면 2가 늘고, $\frac{12}{5}$에서 2로 가면 또 2가 늘어나니까 총 4가 늘어날 거예요. 따라서 $a_2 = 7 + 4 = 11$입니다.

이제 마지막 a_1입니다. 이거는 2에서 1로 갈 때 몇 개의 숫자를 거치는지를 확인하면 되겠죠? 나열해봅시다.

2, $\frac{12}{7}$, $\frac{12}{8}$, $\frac{12}{9}$, $\frac{12}{10}$, $\frac{12}{11}$, 1이렇게 되네요. 총 5번 거쳐서 6번째에 1에 도달하니까 총 12가 늘어나겠네요. 따라서 $a_2 = 11 + 12 = 23$입니다. 모두 더하면

$1+2+2+2+2+2+3+4+5+7+11+23 = 64$입니다. 답은 64네요.