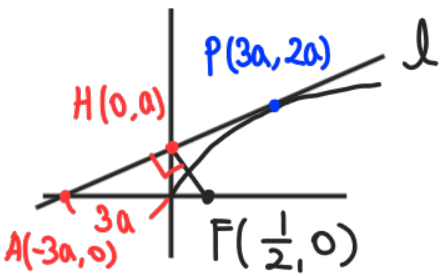
수능특강 기하 풀어볼만한 문제

#9p 유제 6번 포물선에서의 마름모 보조선
#11p Level2 2번 이차곡선 정의에 예민하게 반응 + 식 풀이
#12p Level3 2번 포물선에서의 마름모 보조선
#12p Level3 3번 평행선 나오면 동위각, 엇각 확인
#36p Level3 2번 방멱정리
#36p Level3 3번
#45p 유제 6번 일차결합 두 번 써서 같도록 하기
#50p Level3 2번 내분점 관점 + 가중 무게중심(시소) 관점
#50p Level3 3번 내분점 관점 + 가중 무게중심(시소) 관점
#67p Level3 1번 각의 이등분선 성질
#67p Level3 2번 그림 풀이도 가능
#67p Level3 3번 원 중심을 기준으로 벡터 쪼개기
#82p Level3 1번
#82p Level3 3번 이면각의 정의
#98p Level3 2번

#9p 유제 6번 포물선에서의 마름모 보조선

포물선 $y^2=2x$의 초점을 F, 이 포물선에 접하고 기울기가 $\frac{1}{3}$인 직선을 l이라 하자. 점 F에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H, 직선 l이 x축과 만나는 점을 A라 할 때, 삼각형 AFH의 넓이는?

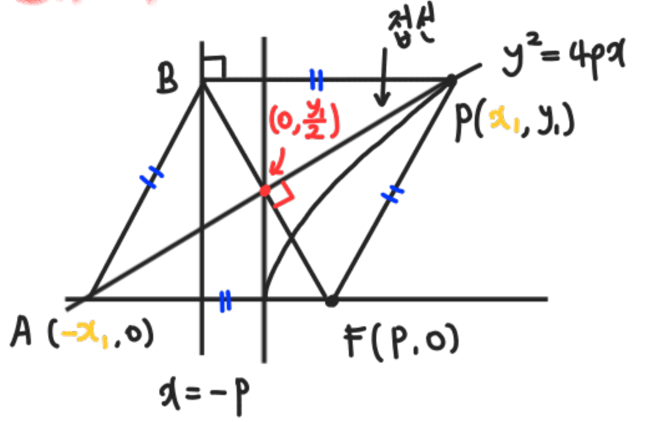


$4a^2 = 2\cdot 3a$

$a = \frac{3}{2}$

$\frac{1}{2}\times 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$ $\boxed{\frac{15}{4}}$

Check 포물선에서 자주 이용, $x_1 < p$ 인 경우도 성립



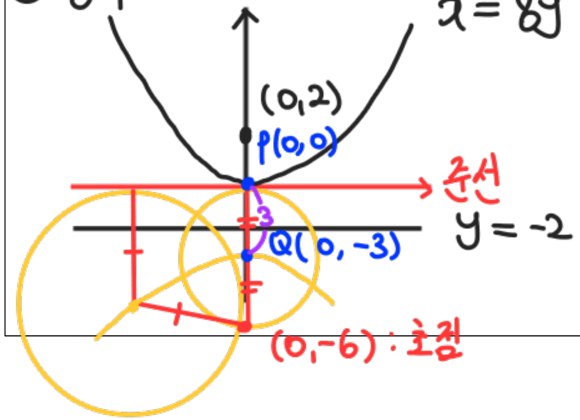
1. (P x좌표) = −(A x좌표)
2. 마름모다.
3. 대각선 교점은 y축 위에, $\overline{AP}$의 중점

#11p Level2 2번 이차곡선 정의에 예민하게 반응 + 식 풀이

초점이 $(0, 2)$이고 직선 $y=-2$가 준선인 포물선 위를 움직이는 점을 P라 하자. 점 $(0, -6)$을 지나고 x축에 접하는 원의 중심이 나타내는 도형 위를 움직이는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이의 최솟값을 구하시오.

초점 준선

① 정의로



$\boxed{3}$

② 식으로

Q(x, y)라 하자.

y축까지 거리 $|y|$

$(0,-6)$까지 거리 $\sqrt{x^2+(y+6)^2}$

$x^2+(y+6)^2=y^2$

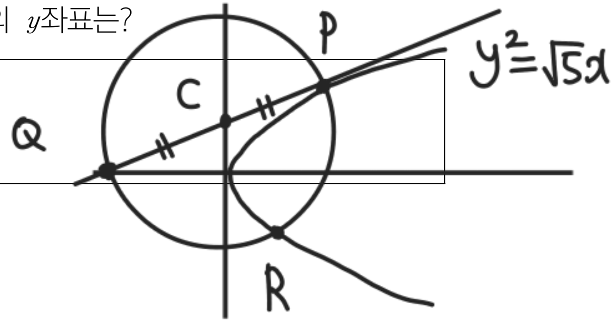
$x^2=-12(y+3)$

#12p Level3 2번 포물선에서의 마름모 보조선

포물선 $y^2=\sqrt{5}x$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 이 포물선 위의 제4사분면에 있는 점 R에 대하여 세 점 P, Q, R를 지나는 원이 다음 조건을 만족시킬 때, 점 R의 y좌표는?

(가) 원의 중심이 y축 위에 있다.

(나) 원의 넓이가 $\frac{21}{5}\pi$이다.



$P\left(\frac{a^2}{\sqrt{5}}, a\right)$ 라 하면

$Q\left(-\frac{a^2}{\sqrt{5}}, 0\right)$, $C\left(0, \frac{a}{2}\right)$

$\overline{PC}^2 = \frac{a^4}{5}+\frac{a^2}{4} = r^2 = \frac{21}{5}$

$4a^4+5a^2-84=0$

$(4a^2+21)(a^2-4)=0$

$P\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, 2\right)$, $C(0, 1)$.

$R\left(\frac{b^2}{\sqrt{5}}, b\right)$ 라 하면

$\overline{CR}^2 = \frac{b^4}{5}+(b-1)^2 = \frac{21}{5}$

$b^4+5b^2-10b-16=0$

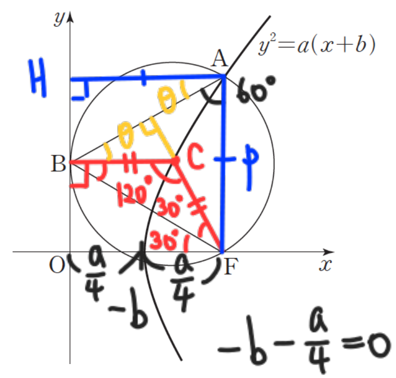
$(b+1)(b^3-b^2+6b-16)=0$

$(b+1)(b-2)(b^2+b+8)=0$

$R\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -1\right)$. $\boxed{-1}$

#12p Level3 3번 평행선 나오면 동위각, 엇각 확인 ← 정오표

그림과 같이 초점이 F이고, 준선이 y축인 포물선 $y^2=a(x+b)$ $(a>0)$에 대하여 포물선 위의 점 $A(p, q)$와 점 F를 지나고 y축과 점 B에서 접하는 원이 있다. $\angle FAB=60^\circ$이고, 삼각형 ABF의 넓이가 $\frac{\sqrt{14}}{4}p^{\frac{3}{2}}$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이고, (점 A의 y좌표) > (점 B의 y좌표) > 0이다.)



$-b-\frac{a}{4}=0$,

$b=-\frac{a}{4}$

$\triangle ABF = \frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AF}\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot p\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{14}}{4}p^{\frac{3}{2}}$

$\overline{AB} = \sqrt{\frac{14}{3}p}$

$\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{PH}}{\overline{AB}}$

$\frac{1}{2}\overline{AB}^2 = rp$

$\frac{1}{2}\times\frac{14}{3}p = rp$

$r=\frac{7}{3}$

$\overline{OF} = \frac{a}{2}$, $\overline{BF} = \frac{1}{\sqrt{3}}a = \sqrt{3}\,\overline{BC}$

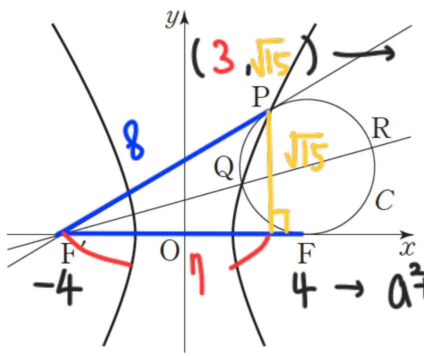
$a = 3\overline{BC} = 3r = 7$

$a+b = \frac{3}{4}a = \frac{21}{4}$

$\boxed{\frac{21}{4}}$

#36p Level3 2번 방멱정리

그림과 같이 두 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 직선 F$'$P와 점 P에서 접하고 x축과 점 F에서 접하는 원을 C라 하자. 원 C가 쌍곡선과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하고, 직선 F$'$Q가 원 C와 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R라 하자. $\overline{\mathrm{F'Q}}\times\overline{\mathrm{F'R}}=64$이고, 점 P의 x좌표가 3일 때, a^2-b^2의 값은? (단, a, b는 상수이다.)



$(3, \sqrt{15}) \rightarrow \frac{9}{a^2}-\frac{15}{b^2}=1$

$4 \rightarrow a^2+b^2=16$

$\overline{F'P}=\overline{F'F}=8$

$\rightarrow 9b^2-15a^2=a^2b^2$

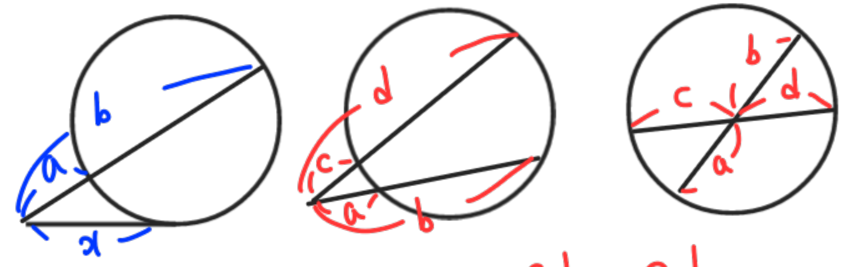
$9b^2-15(16-b^2)=b^2(16-b^2)$

$b^4+8b^2-15\cdot16=0$

$(b^2+20)(b^2-12)=0.\ b^2=12,\ a^2=4.$

$\boxed{-8}$

Check 방멱정리

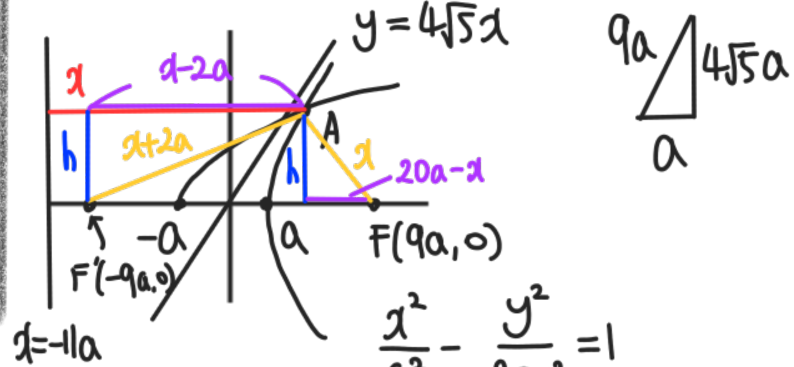


$ab=x^2$ $\qquad ab=cd$

#36p Level3 3번

두 초점 F, F$'$이 y축에 대하여 대칭이고, 직선 $y=4\sqrt{5}x$가 한 점근선인 쌍곡선이 포물선 $y^2=40a(x+a)$와 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 A라 하자. 점 A가 다음 조건을 만족시킬 때, 선분 AF의 길이를 구하시오. (단, a는 양수이다.)

(가) $\overline{\mathrm{AF'}}-\overline{\mathrm{AF}}=2a$
(나) 점 A의 x좌표는 점 F의 x좌표보다 작다.
(다) 삼각형 AF$'$F의 넓이는 360이다.



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{80a^2}=1$

$\triangle AF'F=\frac{1}{2}\times18a\,h=360.$

$ah=40$

$\left(\frac{40}{a}\right)^2 = h^2=(x+2a)^2-(x-2a)^2=8ax$

$= x^2-(20a-x)^2=40a(x-10a)$

$x=5x-50a \rightarrow 2x=25a$

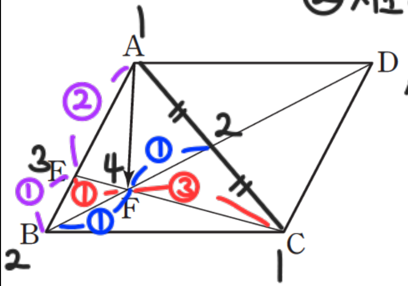
$\frac{1600}{a^2}=8ax,\ 200=a^3x,\ 200=\left(\frac{2}{25}\right)^3x^4,$

$x^4=25^4,\ x=25$

$\boxed{25}$

#45p 유제 6번 일차결합 두 번 써서 같도록 하기

그림과 같이 평행사변형 ABCD에서 변 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 E, 직선 EC와 직선 BD의 교점을 F라 하자. $\overrightarrow{AF} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{EC}$를 만족시키는 두 실수 m, n에 대하여 mn의 값은?



② 시소원리 풀이

$\vec{AF} = \vec{AE} + \vec{EF}$

$= \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{EC}$

① 일차결합풀이

$\vec{AB} = \vec{p}$, $\vec{AD} = \vec{q}$

$\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{p}$, $\vec{AC} = \vec{p} + \vec{q}$

F는 $\overline{BD}$를 $x:(1-x)$ 내분

F는 $\overline{EC}$를 $y:(1-y)$ 내분

$x\vec{q} + (1-x)\vec{p}$

$= y(\vec{p}+\vec{q}) + (1-y)\cdot\frac{2}{3}\vec{p}$

$(1-x)\vec{p} + x\vec{q} = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}y\right)\vec{p} + y\vec{q}$

$x = y$, $1-x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}y$

$\rightarrow x = y = \frac{1}{4}$

$\vec{AF} = \frac{3}{4}\vec{p} + \frac{1}{4}\vec{q}$

$= m\vec{p} + n(\vec{AC} - \vec{AE})$

$= m\vec{p} + n\left(\frac{1}{3}\vec{p} + \vec{q}\right)$

$= \left(m + \frac{n}{3}\right)\vec{p} + n\vec{q}$

$n = \frac{1}{4}$, $m = \frac{2}{3}$

$\boxed{\frac{1}{6}}$

#50p Level3 2번 내분점 관점 + 가중 무게중심(시소) 관점

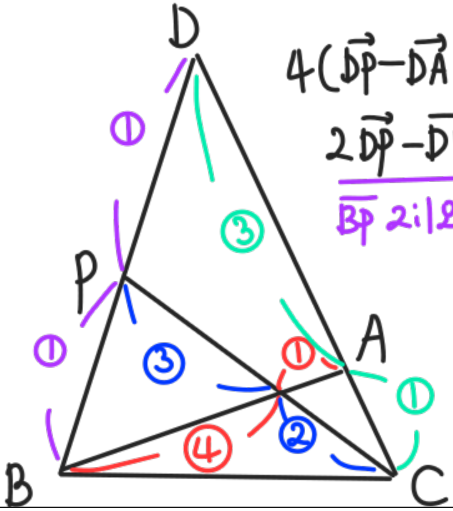
삼각형 ABC와 등식 $4\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{CP}$를 만족시키는 점 P에 대하여 직선 AC와 직선 BP의 교점을 D라 하자. 삼각형 DPA의 넓이를 S, 삼각형 PBC의 넓이를 T라 할 때, $\frac{S}{T}$의 값은?

① 내분 외분점 풀이

$4\vec{PA} + \vec{PB} = 3\vec{PC}$

$\frac{4\vec{PA} + \vec{PB}}{5} = \frac{3}{5}\vec{PC}$

중점이 $\overline{AB}$ 1:4 내분점



$4(\vec{DP} - \vec{DA}) = (\vec{DB} - \vec{DP}) + 3(\vec{DP} - \vec{DC})$

$2\vec{DP} - \vec{DB} = 4\vec{DA} - 3\vec{DC}$

$\overline{BP}$ 2:1외분 $\overline{CA}$ 4:3외분

$S = \triangle BCD \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$

$T = \triangle BCD \times \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{3}{4}$ $\boxed{\frac{3}{4}}$

②

시소 원리

40kg 50kg 10kg

A ① ④ B

P

$4\vec{PA} + 1\cdot\vec{PB} = 0$

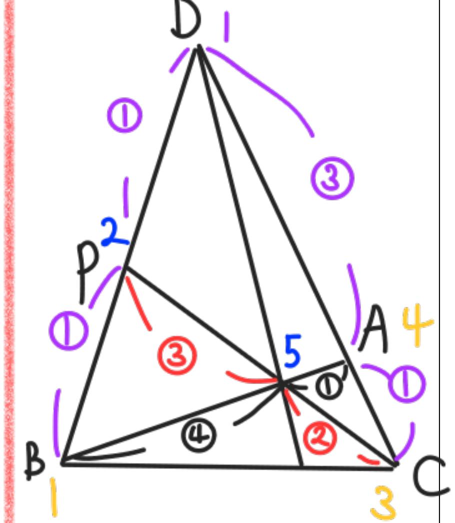
무게비

10kg 20kg 10kg

A B P

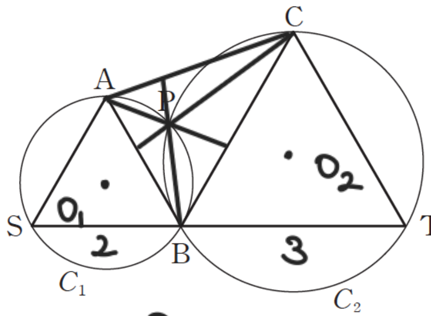
$1\cdot\vec{PA} - 2\vec{PB} = 0$

$4\vec{PA} + 1\cdot\vec{PB} - 3\vec{PC} = 0$



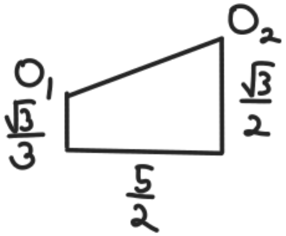
#50p Level3 3번 내분점 관점 + 가중 무게중심(시소) 관점

그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3$인 두 정삼각형 ASB, CBT의 외접원을 각각 C_1, C_2라 하고 두 원 C_1, C_2의 교점 중 B가 아닌 점을 P라 하자. $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{BC}$일 때, 두 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?(단, 세 점 S, B, T는 한 직선 위에 있다.)



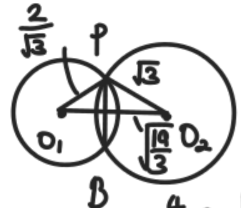
$r_1=\frac{2}{\sqrt3}$, $r_2=\sqrt3$

① $\overline{O_1O_2}$ 구하기



$\overline{O_1O_2}^2=\frac{25}{4}+\frac{3}{36}=\frac{19}{3}$,

② $\overline{PB}$ 구하기



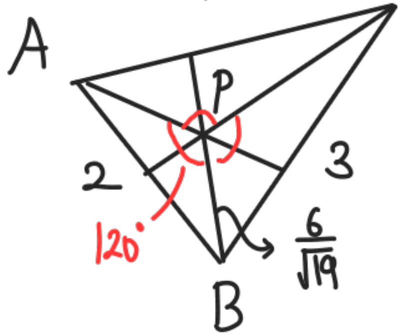
$\cos(\angle O_1PO_2)=\frac{\frac{4}{3}+3-\frac{19}{3}}{4}=-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt3}\times\sqrt3\sin(\angle O_1PO_2)$

$=\frac{1}{2}\overline{O_1O_2}\times\frac{1}{2}\overline{PB}$

$\therefore \overline{PB}=\frac{6}{\sqrt{19}}$

③ $\overline{PA}$, $\overline{PC}$ 구하기



$\triangle PAB$, $\triangle PBC$에서

120° 코사인 법칙

$\rightarrow \overline{PA}=\frac{4}{\sqrt{19}}$, $\overline{PC}=\frac{9}{\sqrt{19}}$

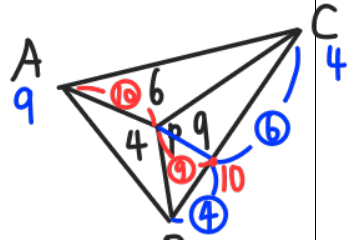
$\therefore \overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=4:6:9$

④ 넓이비 → 내분비 → 시소 원리

$\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCA$

$=\overline{PA}\,\overline{PB}\sin120^\circ:\overline{PB}\,\overline{PC}\sin120^\circ:\overline{PC}\,\overline{PA}\sin120^\circ$

$=4:9:6$



$\overrightarrow{AP}=\frac{10}{19}\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right)$

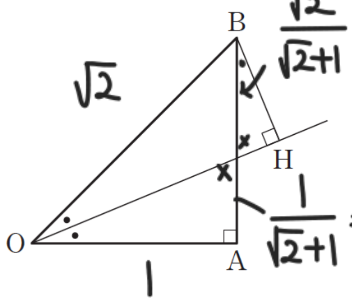
$=\frac{6}{19}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{19}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})$

$=\frac{10}{19}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{19}\overrightarrow{BC}$　　$m+n=\frac{14}{19}$

$\boxed{\frac{14}{19}}$

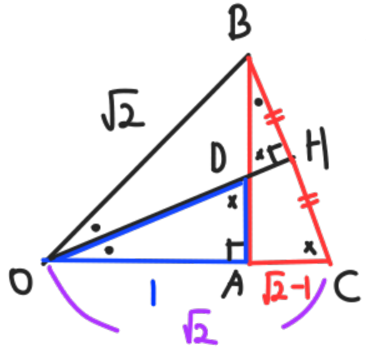
#67p Level3 1번 각의 이등분선 성질

그림과 같이 $\overline{OA}=\overline{AB}=1$이고 $\angle OAB=90°$인 직각삼각형 OAB의 꼭짓점 B에서 $\angle AOB$의 이등분선에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overrightarrow{AH}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$일 때, 두 실수 m, n의 합 $m+n$의 값은?



$\frac{\sqrt2}{\sqrt2+1}=2-\sqrt2$

$\frac{1}{\sqrt2+1}=\sqrt2-1$



$\triangle OAD$, $\triangle BAC$ 합동

$\overline{OB}=\overline{OC}$, 이등변 → H는 중점

$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

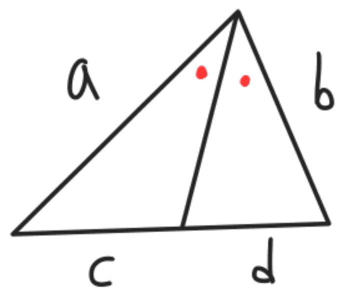
$\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt2\,\overrightarrow{OA})+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AH}=\left(\frac{\sqrt2}{2}-1\right)\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

$m+n=\frac{\sqrt2-1}{2}$

$\boxed{\frac{\sqrt2-1}{2}}$

각의 이등분선 성질



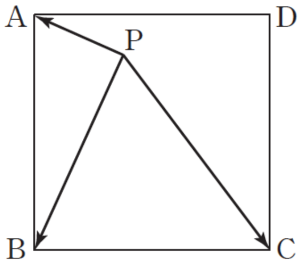
$a:b=c:d$

#67p Level3 2번 그림 풀이도 가능

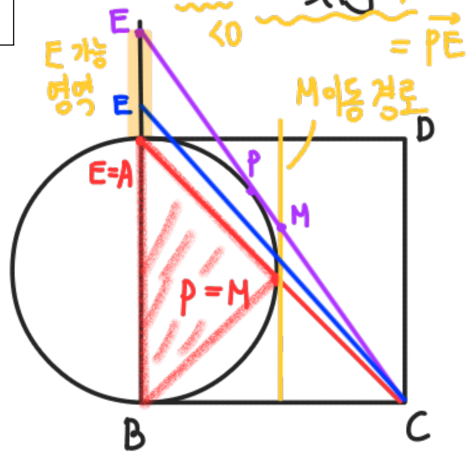
그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD의 내부의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$
>
> (나) 두 실수 x, y에 대하여 $\overrightarrow{PC} = x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB}$이다.

$x+y$가 최대일 때, 삼각형 PAB의 넓이를 구하시오.



$\overrightarrow{PC} = \underset{<0}{(x+y)}\underbrace{\dfrac{x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}}{x+y}}_{=\overrightarrow{PE}}$ 직선 AB 위의 외분점, $\overline{PE} : \overline{PC} = 1 : -(x+y)$



음수 $(x+y)$가 최대이려면 양수 $-(x+y)$ 최소

$\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PE}}$ 가 최대한 작아져야.

$P = M$ ($\overline{AC}$ 중점) 일때 $\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PE}} = 1$

P가 위로 갈때 중점 M은 수직 위로 이동 → 원 밖

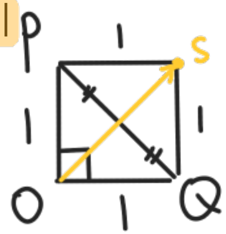
그러면 $\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PE}} > 1$ 이다. ∴ P=M 일때 정답 4 $\boxed{4}$

#67p Level3 3번 원 중심을 기준으로 벡터 쪼개기

좌표평면 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 두 점 P, Q는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이다.
>
> (나) $\overline{PQ} = \sqrt{2}$

점 R(2, 3)에 대하여 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?



$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ} = (\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OR})\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OR})$

$= \underbrace{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}_{=0} - (\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})\cdot\overrightarrow{OR} + \underbrace{|\overrightarrow{OR}|^2}_{=13}$

$= 13 - \overrightarrow{OS}\cdot\overrightarrow{OR}$

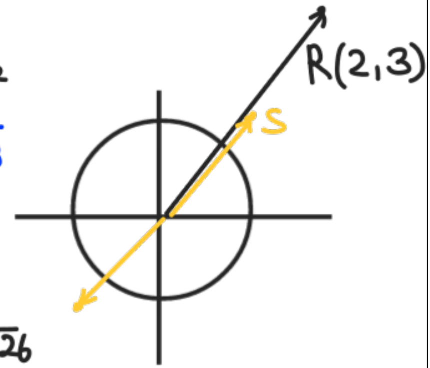
$= 13 - \sqrt{2}\times\sqrt{13}\cos\theta \quad -1 \le \ \le 1$

$|\overrightarrow{OS}|^2 = (\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})\cdot(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})$

$= 1+0+1 = 2$

$M = 13+\sqrt{26}$

$m = 13-\sqrt{26}$

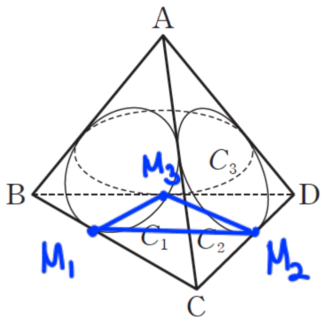


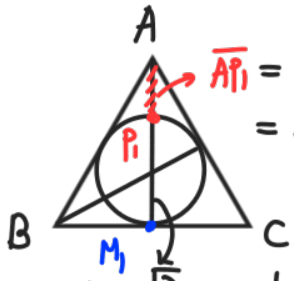
$\boxed{143}$

$Mm = 169 - 26 = 143$

#82p Level3 1번

그림과 같이 한 모서리의 길이가 12인 정사면체 ABCD에서 세 삼각형 ABC, ACD, ABD에 내접하는 원을 각각 C_1, C_2, C_3이라 하고, 세 원 C_1, C_2, C_3 위의 점 중에서 점 A에 가장 가까운 점을 각각 P_1, P_2, P_3이라 하자. 삼각형 $P_1P_2P_3$의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는?





$\overline{AP_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times 12 - 2\times 2\sqrt{3}$
$= 2\sqrt{3}$

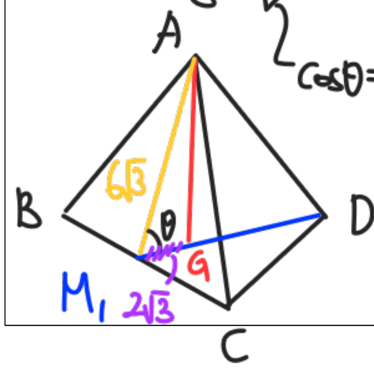
$r = \frac{\sqrt{3}}{2}\times 12 \times \frac{1}{3} = 2\sqrt{3}$

$\rightarrow \therefore \frac{\overline{AP_1}}{\overline{AM_1}} = \frac{1}{3}$

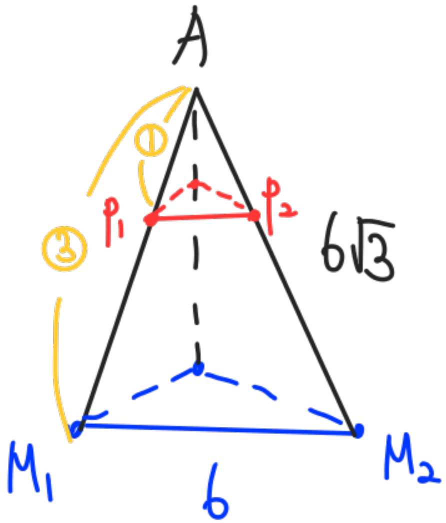
$\triangle P_1P_2P_3$는 $\triangle BCD$와 평행.

$\triangle ABC$, $\triangle BCD$ 이면각 θ라 하면

$\cos\theta = \frac{1}{3}$



$\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$



$\triangle P_1P_2P_3 = \triangle M_1M_2M_3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$
$= \frac{\sqrt{3}}{4}\times 36 \times \frac{1}{9}$
$= \sqrt{3}$

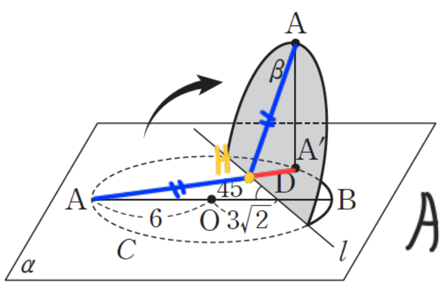
$\therefore S' = S\cos\theta$
$= \sqrt{3}\times\frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

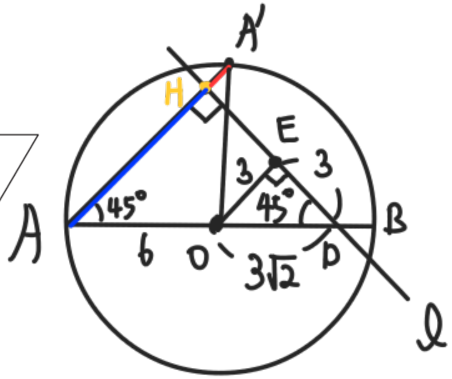
$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

#82p Level3 3번 이면각의 정의

→ 교선에 수직인 두 직선

그림과 같이 평면 α 위에 놓인 종이에 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 원 C가 그려져 있다. 선분 OB 위에 $\overline{OD}=3\sqrt{2}$인 점 D를 정하고 점 D를 지나며 선분 AB와 이루는 각의 크기가 45°인 직선 l을 평면 α 위에 그린다. 직선 l을 접는 선으로 하여 점 A를 포함하는 부분을 접을 때, 접힌 도형에서 점 A와 직선 l을 포함하는 평면을 β라 하고, 점 A의 평면 α 위로의 정사영을 A′이라 하자. 점 A′이 원 C 위의 점일 때, 두 평면 α와 β가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? (단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)





△ADA′ 직각이등변

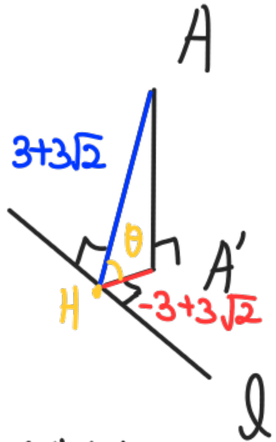
$\overline{AA'} = 6\sqrt{2}$

△ADH, △ODE 닮음

$\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\overline{AH} = 3+3\sqrt{2}$,

$\overline{A'H} = -3+3\sqrt{2}$



(삼수선 정리)

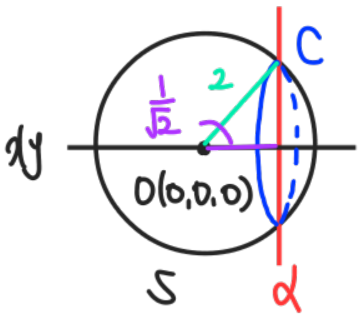
$$\cos\theta = \frac{-3+3\sqrt{2}}{3+3\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 3-2\sqrt{2}$$

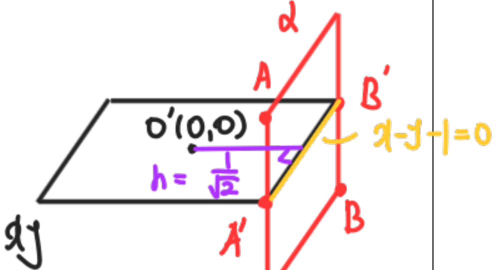
$\boxed{3-2\sqrt{2}}$

#98p Level3 2번

좌표공간에서 두 점 A(2, 1, 2), B(−1, −2, −3)과 구 $S: x^2+y^2+z^2=4$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 점 P가 나타내는 도형의 길이를 l이라 할 때, $\left(\frac{l}{\pi}\right)^2$의 값을 구하시오.

(가) 점 P는 구 S 위에 있다. (나) 세 점 A, B, P는 xy평면과 수직인 한 평면 위에 있다. α





$A'(2,1,0)$

$B'(-1,-2,0)$

A′, B′ 지나는 직선 $y=x-1$, $x-y-1=0$

C의 반지름 길이 $\sqrt{4-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$

$l = \sqrt{14}\pi$

$\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 = 14$　$\boxed{14}$