# 2014 학년도 대학수학능력시험 수학 영역(B 형) 해설

만든 이 KAIST 수리과학과 황현태

2013-11-08

해설은 기출문제를 공부하는 학생을 위해 쓰여졌습니다. 어려운 문제의 경우 풀이 구상을 포함하여 최대한 자세하게 풀어 쓰려 노력했습니다. 또한 암기에 의한 풀이는 지양했습니다. 해설에 대한 의견이 있거나 저에게 하실 말씀이 있다면 메일로 보내주시기 바랍니다. 메일 주소는 hthwang91@naver.com 입니다.

1. 해설 $A+B=\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & 0\\2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2 & 0\\3 & -3\end{pmatrix}$. 이고 모든 성분의 합은 $(a+2)+0+3+(-3)=a+2=6$이다. 따라서 $a=4$.

   답 ④

2. 구상 좌표평면 위의 점 $(x,y)$와 원점 사이의 거리를 r이라 할 때, $\sin\theta=\frac{y}{r}$이고 $\cos\theta=\frac{x}{r}$ 그리고 $\tan\theta=\frac{y}{x}$이다. 문제에서 $\tan\theta$값이 주어졌으므로 $\sin\theta$, $\cos\theta$값을 알 수 있다. 결과적으로 $\cos 2\theta$을 구할 수 있다.

   해설 $\tan\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 이므로 $r=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+(5)^2}=\sqrt{30}, x=5, y=\sqrt{5}$ 이다. 따라서 $\cos\theta=\frac{5}{\sqrt{30}}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{30}}$이다. $\cos 2\theta=\cos\,(\theta+\theta)\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta=\left(\frac{5}{\sqrt{30}}\right)\left(\frac{5}{\sqrt{30}}\right)-\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{30}}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{30}}\right)=\frac{2}{3}$.

   답 ③

3. 구상 벡터의 덧셈을 이용한다(꺾쇠 기호 $\langle\ \rangle$가 벡터를 나타낸다고 하고 $\langle 0,b,5\rangle$와 같이 표기하겠음).

   해설 $\langle 0,b,5\rangle=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{5}\langle a,5,2\rangle+\frac{3}{5}\langle -2,0,7\rangle=\langle\frac{2}{5}a-\frac{6}{5},2,5\rangle$이다. 즉, a=3, b=2이므로 $a+b=5$다.

   답 ⑤

4. 해설 공차를 d라고 하면 $2+8d=3(2+2d)=6+6d$이므로 $d=2$. 따라서 $a_5=2+4d=10$이다.

   답 ①

5. 구상 확률 연산은 집합 연산과 대응된다.

   해설 $P(A^c\cup B^c)=1-P(A\cap B)=\frac{4}{5}$ 이므로 $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$. $P(A\cap B^c)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$이므로 $P(A)=\frac{9}{20}$. 따라서 $P(A^c)=1-P(A)=\frac{11}{20}$이다.

   답 ②

6. 구상 주어진 직선의 방향벡터와 $\overrightarrow{AB}$가 서로 수직이다. 즉, 내적의 값이 0이다.

   첨언 좌표공간에서 정의된 직선 $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$은 점 $(a,b,c)$를 지나고 벡터 $\langle l,m,n\rangle$과 평행한 직선이다.

   해설 주어진 직선 $\frac{x}{1}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-1}{1}$의 방향벡터는 $\langle 1,-1,1\rangle$이다. $\overrightarrow{AB}=\langle -5,-5,3-a\rangle$이고 내적을 취하면 $\langle 1,-1,1\rangle\cdot\langle -5,-5,3-a\rangle=-5+5+3-a=3-a=0$이므로 a=3이다.

   답 ①

7. 구상 식을 보면 각 2x를 포함한 식으로 고칠 수 있도록 $2\cos^2 x - 1$이 포함되어 있다. 함수 $f(x) = a\cos x + b\sin x$의 최댓값은 $\sqrt{a^2+b^2}$임을 이용한다.

해설 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$ 이므로, $2\cos^2 x + k\sin 2x - 1 = \cos 2x + k\sin 2x$이다. 따라서 식의 최댓값은 $\sqrt{1+k^2}$이고 이 값이 $\sqrt{10}$이므로 양수 k는 3이다.

답 ③

8. 해설 방정식 $2x^2 - 3x + 1 = 0$의 서로 다른 두 근은 $\frac{1}{2}$과 1이다. $y^2 = 8x$에서 $2y\frac{dy}{dx} = 8$이므로 $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{y}$이다. $\frac{4}{y} = \frac{1}{2}$, $\frac{4}{y} = 1$으로부터 두 직선 $l_1, l_2$가 포물선과 접하는 점은 각각 $(8,8)$ 그리고 $(2,4)$임을 알 수 있다. 점 $(8,8)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선은 $l_1 : x - 2y + 8 = 0$이고 점 $(2,4)$을 지나고 기울기가 1인 직선은 $l_2 : x - y + 2 = 0$이다.

두 직선의 방정식을 연립하여 풀면 교점의 x좌표는 4가 된다.

답 ④

9. 구상 4를 택하지 않을 경우와 4를 하나 택할 경우로 나눠서 푼다.

해설 첫 번째로 4를 택하지 않은 경우에는 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 5개를 뽑는 경우이므로 경우의 수는 ${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$이다.

4를 하나 택하는 경우에는 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 4개를 뽑는 경우이므로 경우의 수는 ${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$이다.

따라서 모든 경우의 수는 21+15=36가지이다.

답 ④

10. 해설 첫 번째로 $f(x) \geq 0$인 경우, 즉 $x \in [-4,-2] \cup [0,2]$인 x에 대해서

$$\frac{g(x)}{f(x)} \leq 1 \Leftrightarrow g(x) \leq f(x)$$

이러한 정수 x를 그래프를 통해 찾아보면 −4, 1, 2가 있다.

반대로 $f(x) < 0$인 경우, 즉 $x \in (-2,0) \cup (2,4]$인 x에 대해서

$$\frac{g(x)}{f(x)} \leq 1 \Leftrightarrow g(x) \geq f(x)$$

이러한 정수 x를 그래프를 통해 찾아보면 −1, 3이 있다.

따라서 x는 모두 5개이다.

답 ⑤

11. 해설 (가)는 $\frac{1}{n(n+1)}$임을 쉽게 알 수 있다.

$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n(n+1)}$이므로 다음이 성립한다.

$$b_2 = b_1 + \frac{1}{1\cdot 2}$$

$$b_3 = b_2 + \frac{1}{2\cdot 3} = b_1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}$$

$$\cdots$$

$$b_n = b_1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = b_1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}$$

그러므로 (나)는 $2 - \frac{1}{n}$이다. 따라서 $\mathrm{f}(n) = \frac{1}{n(n+1)}$이고 $\mathrm{g}(n) = 2 - \frac{1}{n}$이다.

결과적으로 $\frac{g(10)}{f(4)} = \frac{2-\frac{1}{10}}{\frac{1}{4\cdot 5}} = 38$이다.

답 ①

12. 구상 $\mathrm{g}(x)$는 $\mathrm{x} = 0$에서 불연속인 함수이다. 따라서 함수 $\mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)$가 주어진 구간에서 연속 이려면 $\mathrm{x} = 0$에서의 연속성을 조사해봐야 한다.

해설 $\mathrm{f}(x) = x^2 + ax + b$라 하면

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + ax + b}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x + a + b/x}{\ln(x+1)/x}$$

이고, 여기서 극한값이 존재하려면 $\mathrm{b} = 0$이어야 한다.

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x + a}{\ln(x+1)/x} = a = \mathrm{f}(0)\mathrm{g}(0) = 0$$

이므로 $\mathrm{f}(x) = x^2$이고 $\mathrm{f}(3) = 9$이다.

답 ②

13. 해설 직선 l과 쌍곡선 C의 교점의 y좌표를 찾기 위해 $\mathrm{l}: \mathrm{x} = \mathrm{y} + 1$을 쌍곡선의 방정식에 대입하면 다음과 같다.

$$(y+1)^2 - 2y^2 = 1$$

식을 정리하면

$$y^2 - 2y = 0$$

이고 해는 $\mathrm{y} = 0 \text{ or } \mathrm{y} = 2$이다. 따라서 회전체의 부피는

$$\pi\int_0^2 (y+1)^2-(1+2y^2)dy = \pi\int_0^2 -y^2+2y\,dy = \pi\left[-\frac{1}{3}y^3+y^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}\pi$$

이다.

답 ③

14. 구상 초점 $F(c,0)$을 시계방향으로 θ만큼 회전하면 다시 직선 l위에 놓인다.

해설 $\begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\cos\theta\\ -c\sin\theta\end{pmatrix}$은 직선 l위의 점이므로

$$c\cos\theta + c\sin\theta = 1$$

이다. 양변을 제곱하면

$$c^2+2c^2\cos\theta\sin\theta = c^2(1+\sin 2\theta)$$

이다. 여기서 쌍곡선의 초점에 대해 $c^2 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$이 성립하므로

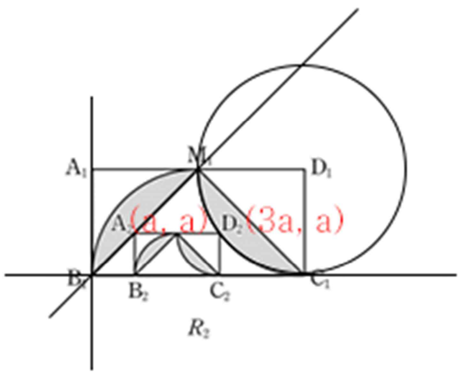
$$\frac{3}{2}(1+\sin 2\theta) = 1$$

이다. 따라서 $\sin 2\theta = -\frac{1}{3}$.

답 ④

15. 구상 전형적인 무한급수의 합을 구하는 문제이다. 공비를 알아내는 것이 관건이다.

해설 $R_1$에서 색칠한 부분의 넓이는 활꼴의 넓이로서 반지름의 길이가 1인 사분원의 넓이에서 한 변의 길이가 1인 직각이등변삼각형의 넓이를 빼면 된다. 2개의 활꼴의 넓이는 $2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}-1$이다.




공비를 알아내기 위해서 좌표평면 위에서 생각한다. $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2} = 1:2$이므로 $A_2(a,a)$라 하면 $D_2(a,3a)$이다. 이때 점 $D_2(a,3a)$는 $D_1(2,1)$을 중심으로 하고 반지름이 1인 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$위의 점 이므로 $(3a-2)^2+(a-1)^2=1$이다. 식을 a에 대해 내림

차순으로 정리하면 $5a^2 - 7a + 2 = 0$이므로 $a = \frac{2}{5}$를 해로 가진다(그림에서 $a < 1$).

따라서 $\overline{A_2B_2} = \frac{2}{5}$이며 사각형 $A_2B_2C_2D_2$은 $A_1B_1C_1D_1$에 비해 각 변이 모두 $\frac{2}{5}$로 줄었으므로 넓이는 $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$배가 되었다.

결과적으로 구하는 $\lim_{n\to\infty} S(n)$은 첫째항이 $\frac{\pi}{2} - 1$, 공비가 $\frac{4}{25}$인 무한등비급수의 합이므로 $\lim_{n\to\infty} S(n) = \frac{\frac{\pi}{2}-1}{1-\frac{4}{25}} = \frac{\frac{\pi}{2}-1}{\frac{21}{25}} = \frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$이다.

답 ③

첨언 도형적 관계로 문제가 해결되지 않을 때는 좌표평면 위에 올려놓고 함수의 그래프를 이용하여 계산하는 것이 도움이 된다.

16. 구상 구간 내 임의의 x에 대한 확률이 주어졌으니 이를 미분하면 확률밀도함수를 구할 수 있을 것이다. 그리고 주어진 조건을 이용하면 k값을 구할 수 있을 것이다.

해설 조건 (가)에서 $P(0 \le X \le x) = \int_0^x f(t)dt = kx^2$ 에서 $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = \frac{d}{dx}(kx^2)$ 이다. 즉 $f(x) = 2kx$ 이다. 조건 (나)에서 $E(X) = \int_0^a xf(x)dx = \int_0^a 2kx^2dx = \left[\frac{2}{3}kx^3\right]_0^a = \frac{2}{3}ka^3$ 이다. 또한 확률밀도함수의 정의에 따르면 $\int_0^a f(x)dx = 1$ 이므로 (가) 조건 $\int_0^x f(t)dt = kx^2$ 에서 $x = a$인 경우 $ka^2 = 1$이다. 따라서 $E(X) = \frac{2}{3}ka^3 = \frac{2}{3}a = 1$이므로 $a = \frac{3}{2}$이다.

결과적으로, $k\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 1$에서 $k = \frac{4}{9}$이다.

답 ②

17. 해설 $AB + A^2B = E$ 에서 $(A + A^2)B = E$ 이므로 $B^{-1} = A + A^2$ 이다. 따라서 (ㄱ)은 참이다. 역행렬의 정의에 의해 $(A + A^2)B = B(A + A^2) = E$이다. $(A + A^2)B = B(A + A^2)$에서 행렬 A를 분배법칙에 따라 묶어내면 $(E + A)AB = BA(E + A) = E$가 성립한다. 따라서 역행렬의 정의에 의해 다음이 성립한다.

$$AB = BA = (E + A)^{-1}$$

따라서 (ㄴ)도 참이다. 다음으로 주어진 식 $(A - E)^2 + B^2 = O$ 의 양변에 $(B^{-1})^2 = (A + A^2)^2$를 곱하면

$$(A - E)^2(B^{-1})^2 + B^2(B^{-1})^2$$

$$= (A - E)^2(A + A^2)^2 + B^2(B^{-1})^2$$

$$= \{(A - E)(A + A^2)\}^2 + E$$

$$= (A^3 - A)^2 + E = O$$

이므로 (ㄷ)은 참이다.

<u>답</u> ⑤

<u>첨언</u> 역행렬의 정의와 곱셈의 교환법칙이 성립하지 않는다는 사실은 시험에 매우 자주 출제된다.

18. <u>구상</u> 일반적으로 접근하여 수열 $a_n$의 일반항을 찾으려고 하면 잘 되지 않는다. y좌표가 주어졌을 때 x좌표와의 대응관계는 역함수로서 나타나는데 고등과정에서는 삼각함수의 역함수에 대해 배우지 않기 때문이다. 따라서 다른 접근을 생각해봐야 한다.

<u>해설</u> 주어진 그래프를 보면 다음과 같은 특징을 알 수 있다.

$$0 < a_1 < \frac{\pi}{2}$$

$$\pi < a_2 < \frac{3}{2}\pi$$

$$\cdots$$

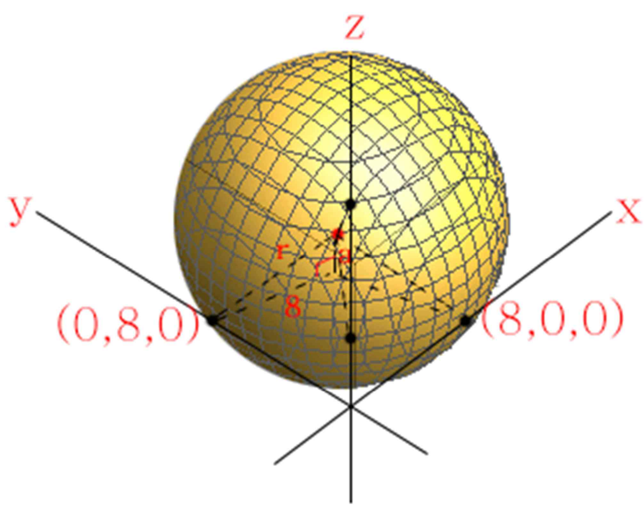
$$(n-1)\pi < a_n < (n-1)\pi + \frac{1}{2}\pi$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi < \frac{a_n}{n} < \left(1-\frac{1}{2n}\right)\pi$$

여기서 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)\pi = \pi$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \pi$이다.

<u>답</u> ④

19. <u>구상</u> 주어진 구는 중심의 x, y, z좌표가 모두 양수이다. 그리고 xy평면과 만나서 넓이가 64π인 원, 즉 반지름의 길이가 8인 원을 만들고, x축과 y축에 접한다고 하였으므로 원 $(x-8)^2+(y-8)^2=8^2$를 포함하는 구일 것이다. 또한 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8이라는 또 하나의 조건이 있으므로 좌표공간에서 계산을 통해 해결하면 될 것이다.



해설 주어진 구는 x축과 y축에 접하는 구이므로 그 중심의 x, y좌표는 각각 8일 것이다. 미지의 z좌표를 a, 반지름을 r이라 하면 구의 방정식은 다음과 같다.

$$(x-8)^2+(y-8)^2+(z-a)^2=r^2$$

z축과의 교점은 x=0, y=0일 경우이므로

$$(0-8)^2+(0-8)^2+(z-a)^2=r^2$$

$$128+(z-a)^2=r^2$$

$$128+z^2-2az+a^2=r^2$$

여기서 $r^2-a^2=8^2$이므로

$$z^2-2az+(128-r^2+a^2)=z^2-2az+64=0$$

이다. 이 방정식의 두 해는 구와 z축과의 교점을 나타내며 두 해를 $z_1$, $z_2$($z_1 \le z_2$)라 하면 z축과의 교점 사이의 거리가 8이라 했으므로 $z_2-z_1=8$이다. 또한 방정식의 두 해에 대해서 다음이 성립한다.

$$(z_2-z_1)^2=(z_2+z_1)^2-4z_2z_1$$

$$8^2=(2a)^2-4\cdot 64$$

$$5\cdot 64=4a^2$$

$$5\cdot 16=a^2$$

따라서 $r^2-a^2=8^2$에서 $r^2-80=8^2$, $r^2=144$이므로 $\mathrm{r}=12$이다.

답 ②

첨언 공간도형 문제는 순수하게 도형적 관계를 이용해서 풀 수도 있고 좌표공간을 도입해서 풀 수도 있는데 그 선택은 문제의 상황과 조건을 고려하여 해야 한다.

20. 구상 지표는 정수이고 가수는 0이상 1미만의 소수이다. 그러므로 $5\mathrm{g}(x)$ 는 $\mathrm{g}(x)=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$일 때 정수가 된다. 예를 들어 $\mathrm{g}(3.2)=0.2$이므로 $5\mathrm{g}(3.2)=1$이 될 것이다. 이를 염두에 두고 문제를 푼다.

해설 $5g(x)$는 x에 따라 0, 1, 2, 3, 4일 수 있다. 또한 $3\mathrm{f}(x)$는 3의 배수이다.

$3\mathrm{f}(x)+5g(x)$가 10이 되는 경우는 $5g(x)=1, 3f(x)=9$이거나 $5g(x)=4, 3f(x)=6$인 경우이다. 즉 $g(x)=0.2, f(x)=3$이거나 $g(x)=0.8, f(x)=2$인 경우이므로 $\log x=2.8, 3.2$이다. 즉, $\mathrm{x}=10^{2.8}, 10^{3.2}$이다.

$3\mathrm{f}(x)+5g(x)$ 가 20이 되는 경우는 $5g(x)=2, 3f(x)=18$ 인 경우이다. 즉 $g(x)=0.4, f(x)=6$인 경우이므로 $\log x=6.4$이다. 즉, $\mathrm{x}=10^{6.4}$이다.

$3\mathrm{f}(x)+5g(x)$가 30이 되는 경우는 $5g(x)=0, 3f(x)=30$이거나 $5g(x)=3, 3f(x)=27$인

경우이다. 즉 $g(x) = 0, f(x) = 10$이거나 $g(x) = 0.6, f(x) = 9$인 경우이므로 $\log x = 9.6, 10$이다. 즉, $x = 10^{9.6}, 10^{10}$이다.

$3f(x) + 5g(x)$가 40이 되는 경우는 $5g(x) = 1, 3f(x) = 39$이거나 $5g(x) = 4, 3f(x) = 36$인 경우이다. 즉 $g(x) = 0.2, f(x) = 13$ 이거나 $g(x) = 0.8, f(x) = 12$ 인 경우이므로 $\log x = 12.8, 13.2$이다. 즉, $x = 10^{12.8}, 10^{13.2}$이다.

이제 x의 값을 작은 수부터 크기 순으로 나열하면 $10^{2.8}, 10^{3.2}, 10^{6.4}, 10^{9.6}, 10^{10}, 10^{12.8}, 10^{13.2}$이므로 $a = 10^{3.2}, b = 10^{12.8}$ 이다. 따라서 $\log a = 3.2$, $\log b = 12.8$ 이고 $\log a\mathrm{b} = \log a + \log b = 3.2 + 12.8 = 16$이다.

<u>답</u> ⑤

<u>첨언</u> 실제 문제풀이 시에는 logx의 값이 직접 나오므로 x의 값까지 구하는 수고를 하지 않아도 된다.

21. <u>구상</u> 적분으로 정의된 함수는 미분하여 원래 함수와 도함수 간의 관계를 알아낼 수 있다. 즉, 문제에서 $\frac{d}{dx}\mathrm{f}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\int_1^{x+1} f(t)dt\right)$, $\mathrm{f}'(x) = \frac{\pi}{2}f(x+1)$이다. 이 사실을 이용한다.

<u>해설</u> $\mathrm{f}'(x) = \frac{\pi}{2}f(x+1)$이므로 $\pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx = 2\pi\int_0^1 xf'(x)dx$이다.

부분적분법에 의해

$$\int_0^1 xf'(x)dx = xf(x)|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = 1\cdot f(1) - \int_0^1 f(x)dx = 1 - \int_0^1 f(x)dx$$

이다. $\mathrm{f}(x) = \frac{\pi}{2}\int_1^{x+1} f(t)dt$이므로 $\mathrm{f}(-1) = \frac{\pi}{2}\int_1^0 f(t)dt$이며 함수 y는 원점대칭이고 $f(1) = 1$이므로 $f(-1) = -1$가 성립한다. 즉, $\frac{\pi}{2}\int_1^0 f(t)dt = -1$, $\int_0^1 f(t)dt = \frac{2}{\pi}$이다.

따라서 $\pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx = 2\pi\int_0^1 xf'(x)dx = 2\pi\left(1 - \int_0^1 f(x)dx\right) = 2\pi\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = 2(\pi - 2)$ 이다..

<u>답</u> ①

22. <u>해설</u> $\mathrm{f}'(x) = 5e^{3x-3}(3x-3)' = 15e^{3x-3}$.

그러므로 $\mathrm{f}'(1) = 15$이다.

<u>답</u> 15

23. <u>해설</u> A를 ‘ 선택한 회원이 여성인 사건’ , B를 ‘ 선택한 회원이 마라톤을 완주한 사건’ 이라고 할 때 $\mathrm{p} = \mathrm{P(B|A)}$이다. $\mathrm{P(B|A)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$이므로 $\mathrm{P(B|A)} = \frac{\frac{15}{50}\times\frac{9}{15}}{\frac{15}{50}} = \frac{15\times 9}{15\times 15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$이다. 따라서 $100\mathrm{p} = 60$이다.

<u>답</u> 60

*by HHT*

첨언 조건부확률 계산의 경우 기호를 포함한 식( 예를 들어 $\mathrm{p} = \mathrm{P(B|A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$)을 쓰는 과정에 얽매이지 말고 주어진 상황에 따라 확률을 계산하면 된다.

24. 해설 $x^2 - 3x = \mathrm{t}$라 하면 주어진 식은 $\sqrt{2t} = t - 4$이다. 이때 해를 추정하면 $\mathrm{t} = 8$이다. 즉, $x^2 - 3x = 8$, $x^2 - 3x - 8 = 0$이며 이 방정식의 모든 실근의 곱은 8이다. 따라서 $\mathrm{k} = 8$이고 $k^2 = 64$이다.

답 64

첨언 무리방정식을 푸는 과정에서 양변을 제곱하는 과정을 생략하면 무연근이 발생하지 않는다(이유에 대한 자세한 설명은 생략한다). 따라서 해를 추정하여 찾을 수 있으면 그렇게 하는 것이 좋다.

25. 해설 문제의 조건으로부터 다음 두 식이 성립한다.

$$2 = 1 - \mathrm{k}\log R^{\frac{4}{23}}$$

$$3 = 1 - \mathrm{k}\log R^{a-1}$$

첫 번째 식에서 $1 = -\frac{4}{23}\mathrm{k}\log R$ 이므로 $\mathrm{k}\log R = -\frac{23}{4}$ 이고 두 번째 식을 정리하면 $2 = -(a-1)\mathrm{k}\log R$이므로 a의 값을 구하면 $2 = \frac{23}{4}(a-1)$, $\mathrm{a} = \frac{31}{23}$이고 $23\mathrm{a} = 31$이다.

답 31

26. 구상 95%의 신뢰도로 표본비율로부터 모비율을 추정하는 공식을 알고 있어야 한다.

해설 p가 표본비율일 때, $\mathrm{b} - \mathrm{a} = 2 \cdot 1.96 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2 \cdot 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{n}} = 0.098$이다.

$$2 \cdot 1960 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{n}} = 98$$

$$\sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{n}} = \frac{1}{40}$$

$$\frac{0.8 \cdot 0.2}{n} = \frac{1}{1600}$$

따라서 $\mathrm{n} = 256$이다.

답 256

27. 해설 $\overline{FP} + \overline{F'P} = 10$ 에서 $\overline{AP} - \overline{FP} = \overline{AP} - (10 - \overline{F'P}) = \overline{AP} + \overline{F'P} - 10$ 이므로 $\overline{AP} + \overline{F'P}$ 가 최소가 될 때 $\overline{AP} - \overline{FP}$또한 최솟값을 가지며 그 값은 1이다. 그림에서 $\overline{AP} + \overline{F'P}$는 세 점이 점 A, P, F’ 순으로 한 직선 위에 있을 때 최소이다. 이때 $\overline{AP} + \overline{F'P} = \overline{AF'} = 11$이므로 피타고라스 정리에 의해 $11^2 = a^2 + 4^2$이고 $a^2 = 105$이다.

답 105

28. 구상 문제 조건에서 $\overline{AC}=\overline{AP}=\overline{AD}$이므로 점 C, P, D는 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{AC}$인 원주 위의 점이다. 따라서 $P(\overline{AC}\cos 2\theta, \overline{AC}\sin 2\theta)$, $D(\overline{AC}\cos 0, 0)$으로 나타낼 수 있으며 이를 통해 삼각형 BDP의 넓이를 θ로 표현할 수 있다.

해설 $\overline{AC}=\frac{2}{\sin\frac{\theta}{2}}$이므로 점 P의 y좌표 즉, 삼각형 BDP의 높이는 $\frac{2\sin 2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$이다. 또한 밑변은 $\overline{AD}-4=\frac{2}{\sin\frac{\theta}{2}}-4$와 같이 표현할 수 있다.

따라서 $S(\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{2\sin 2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)\left(\frac{2}{\sin\frac{\theta}{2}}-4\right)=\frac{2\sin 2\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}-\frac{4\sin 2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$이다.

결과적으로

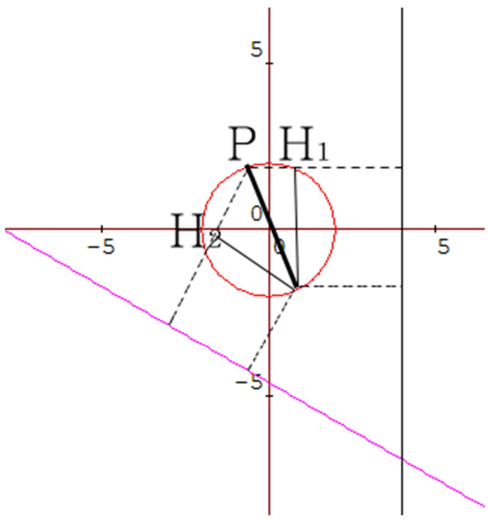
$$\lim_{\theta\to+0}\theta S(\theta)=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{2\theta\sin 2\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}-\frac{4\theta\sin 2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{2\sin 2\theta/\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}/\theta^2}-\frac{4\sin 2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}/\theta}\right)=\frac{4}{\frac{1}{4}}-0=16$$

이다.

답 16

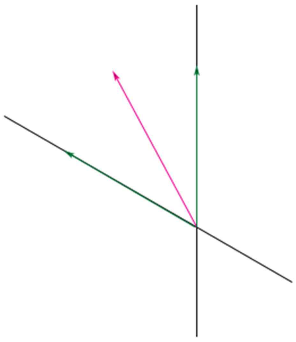
29. 구상 $2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2=\left(|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2\right)+\left(|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2\right)$임을 생각하고 문제의 조건을 따져가며 풀기로 했다.

해설 $2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2$값이 최대가 되려면 그것은 $|\overrightarrow{PQ}|=4$일 때 일 것이다. 우선 두 평면은 x축에 평행하면서 60도의 각을 이루고 있었다(각도는 두 법선벡터의 내적을 이용해서 구했다). 예를 들어 그림을 그려보면,

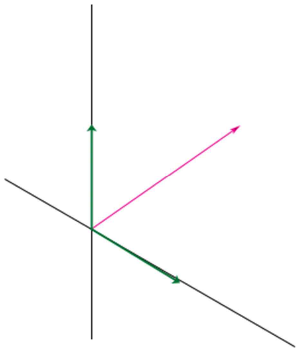



이러한 상황이다. 목표는 그림에서 $\overline{PH_1}^2+\overline{PH_2}^2$의 최댓값을 찾는 것이다. 그림을 그려놓고 보니 세 벡터가 굳이 떨어져있을 필요가 없어 다음과 같이 생각하기로 했다.

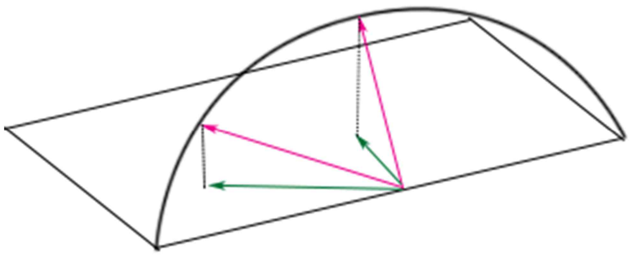
*by HHT*



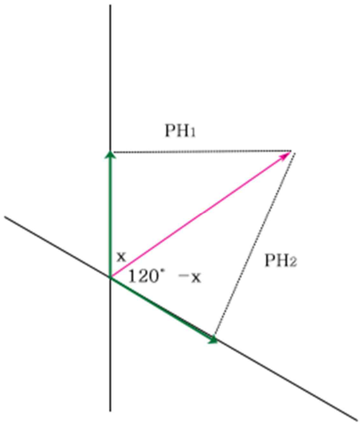
또한 PQ벡터가 60도 영역 내에 있을 때 보다는 120도 영역 안에 있을 때 $\overline{PH_1}^2+\overline{PH_2}^2$의 값이 더 클 것이다. 무슨 말이냐 하면



당장 위의 두 경우만 하더라도 ($\overrightarrow{PQ}$가 두 평면이 이루는 각을 이등분하는 경우임)위의 경우는 $\overline{PH_1}^2+\overline{PH_2}^2$값이 $2\left(\left|\overrightarrow{PQ}\right|\sin30°\right)^2=8$이고 아래의 경우는 $2\left(\left|\overrightarrow{PQ}\right|\sin60°\right)^2=24$이다. 그러나 위의 경우는 $\overrightarrow{PQ}$가 yz평면에 다소곳이 앉아있는 것이고, 사실은 yz평면 밖에 있을 때도 있다(지금 보고 있는 종이 밑으로 들어가거나 종이를 위로 튀어나올 수 있다). 그러나 그럴 경우 필연적으로 $\overline{PH_1}^2+\overline{PH_2}^2$값은 작아질 수밖에 없다. 그림을 그려 알아보자.



PQ벡터가 옆으로 누울수록 검은 점선의 값이 작아지는 것을 볼 수 있다. 따라서 PQ벡터는 yz평면 위의 벡터여야 한다(눕지 않아야 한다).




$$\overline{\mathrm{PH_1}}^2+\overline{\mathrm{PH_2}}^2=(4\sin x)^2+\left(4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right)^2=16\left(\sin^2 x+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right)$$

$$\mathrm{f(x)}=16\left(\sin^2 x+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right)\ (0\le 0\le\frac{2\pi}{3})$$

라 하면 $\mathrm{f}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\mathrm{f}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$이므로 함수는 $\mathrm{x}=\frac{\pi}{3}$에 대해 대칭이다. 따라서 구간의 양 끝 값과 $\mathrm{x}=\frac{\pi}{3}$에서의 함수 값을 비교하면 된다. 그러나 구간이 $\mathrm{x}=\frac{\pi}{3}$에 대해 대칭적으로 주어졌으므로 결과적으로 $\mathrm{f(0)}$과 $\mathrm{f}\left(\frac{\pi}{3}\right)$중 더 큰 값이 최대값이 되겠다.

$\mathrm{f}\left(\frac{\pi}{3}\right)=24$이고 $\mathrm{f(0)}=12$이므로 답은 24이다.

<u>답</u> 24

30. <u>구상</u> 주어진 조건을 통해 함수를 추론하는 문제인데 (가)에서 주어진 변곡점을 통해 $\mathrm{f}(x)$를 일정부분 추론해보자. 그 다음 (나) 조건을 고려한다.

<u>해설</u> $\mathrm{g}'(x)=(f'(x)-f(x))e^{-x}$이고 $\mathrm{g}''(x)=\left(f''(x)-2f'(x)+f(x)\right)e^{-x}$이다.

$\mathrm{f(x)}=\mathrm{a}x^2+bx+\mathrm{c}$라 하면 $\mathrm{g}''(x)=(ax^2+(b-4a)x+c-2b+2a)e^{-x}$이고 변곡점에서 이계도함수의 값은 0이 되므로 $\mathrm{g}''(1)=(-a-b+c)e^{-1}=0$이고 $\mathrm{g}''(4)=(2a+2b+c)e^{-4}=0$이다. 이제 두 식을 연립하면 $\mathrm{b}=-\mathrm{a},\mathrm{c}=0$이라는 사실을 구할 수 있다.

따라서 조건 (가)로부터 $\mathrm{f(x)}=\mathrm{ax(x-1)}$라는 것을 알 수 있다.

<u>구상</u> 이제 조건 (나)를 어떻게 해석해야 될지 생각해보자. 일반적인 방법 중 떠오르는 것은 $(0,\mathrm{k})$에서 함수 $\mathrm{g(x)}=\mathrm{ax(x-1)}e^{-x}$에 그은 접선의 방정식을 구하면 그 접선은 $-1<\mathrm{k}<0$인 $\mathrm{y}=\mathrm{k}$와의 교점을 세 개 가진다는 것이다. 또 한 가지 떠오르는 방법은 $(0,\mathrm{k})$에서 함수 $\mathrm{g(x)}$ 위의 점 $(t,g(t))$에 그은 직선이 접선이 되려면 그 기울기가 $\mathrm{g}'(t)$와 같아야 한다는 것이다. 두 번째 방법으로 시도해보기로 했다.

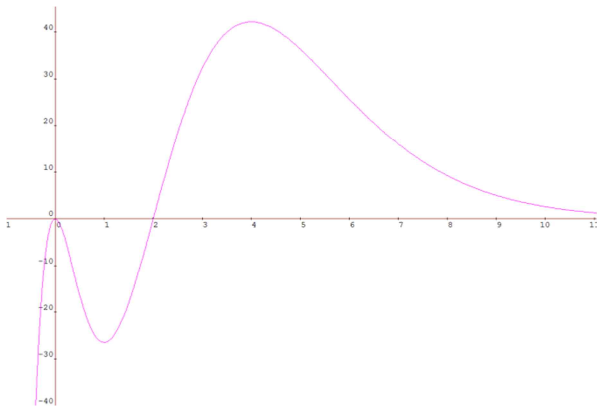
<u>해설</u> $\mathrm{g}'(x)=a(-x^2+3x-1)e^{-x}$이고 $(0,\mathrm{k})$에서 함수 $\mathrm{g(x)}$ 위의 점 $(t,g(t))$에 그은 직선의 기울기는 $\frac{g(t)-k}{t}$이므로 $\mathrm{g}'(t)=\frac{g(t)-k}{t}$에서 $\mathrm{g(t)}-\mathrm{t}\mathrm{g}'(t)=k$이다. 식을 정리하면

$$g(t) - tg'(t) = at(t-1)e^{-t} - at(-t^2+3t-1)e^{-t} = a(t^3-2t^2)e^{-t} = k$$

이다(결국 첫 번째 방법이나 별반 차이가 없어진 듯 하다). 이제 $h(t) = a(t^3-2t^2)e^{-t}$라 하고, $h(t) = k(-1 < k < 0)$의 해의 개수가 3개가 되는 a를 찾자.

$$h'(t) = -at(t^2-5t+4)e^{-t} = -at(t-1)(t-4)e^{-t}$$

$e^{-t} > 0$이므로 $h(t)$는 $t = 0, t = 1, t = 4$에서 극점을 갖는 함수이다. 또한 $h(0) = h(2) = 0$이므로 이것을 염두에 두고 $h(t)$의 개형을 그려보면(수치에 상관없이 개형만 그린 것이다)



이러한 모양일 것이다. 그래프에서 $-1 < k < 0$인 모든 k에 대해 $h(1) = -ae^{-1} = -1$일 때 $h(t) = k$의 해의 개수가 3개가 된다. 즉, $a = e$이다.

결과적으로 $g(x) = ex(x-1)e^{-x}$이며 $g(-2) \times g(4) = 6e^3 \times 12e^{-3} = 72$이다.

답 72

첨언 사실 발상이 어렵거나 풀이가 까다로운 문제는 아니다. 그러나 평소 미분을 통해 함수의 증감을 파악하고 원래 함수의 개형을 파악하는 문제에 조금이라도 불안함을 가지고 있었던 학생은 계산량이 많고, 마지막 문항이라는 특징을 가지고 있는 30번이 매우 까다롭게 느껴졌을 수 있다.