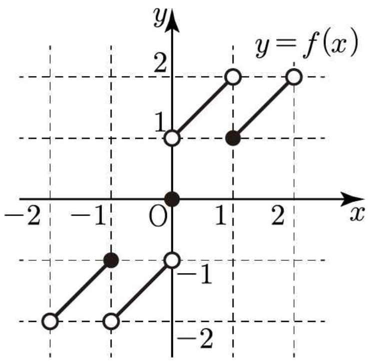
랑데뷰수학

2022 수학II 쉬사준킬 변형 문제집

송원학원

1) 1번 변형

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 구간 $(-2, 2)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=2f(x)-1$을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{4}\left\{\lim_{x\to(3k)-} f(x)\right\}=a$이다. a^2의 값을 구하시오.

[4점]

쉬준-18

2) 7번 변형

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$\sqrt{4x+1}<f(x)<\sqrt{4x+4},\ \sqrt{x}<g(x)<\sqrt{x+2}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-g(x)}{\sqrt{x}}$의 값을 구하시오.

[4점]

쉬준-17

3) 8번 변형

이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 일차항의 계수가 1인 일차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{(x+1)g(x)} = 2$

(나) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - xg(x)}{2x} = 2$

$f(1) + g(1)$의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-16

4) 9번 변형

이차함수 $f(x)$가 모든 실수 a에 대하여 등식

$$\lim_{x \to a} \frac{af(x) - xf(a)}{x - a} = 1 - a^2$$

을 만족시킨다. $f(1) = 0$일 때, $f(0) - f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-20

5) 11번 변형

함수 $f(x)=k|x-a|$에 대하여

$\lim_{x\to a}\frac{f(x-b)-f(a+b)}{x-a}=3$을 만족시키는 k의 값은?

(단, $k>0$, a, b는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3-2

6) 12번 변형

최고차항의 계수가 양수이고 상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 최솟값은? [4점]

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)g(x)}{x^4}=1$

(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=1$

(다) $y=f(x)g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 2이다.

① $-\frac{9}{4}$ ② -2 ③ $-\frac{7}{4}$

④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

쉬준-19

7) 13번 변형

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 $\lim_{x\to\infty}\{f(x)+2g(x)\}=2$일 때,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+\{f(x)\}^2+2f(x)g(x)-\dfrac{2f(x)g(x)}{x^3}}{3f(x)+2g(x)}$$

의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-20

8) 16번 변형

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 2n}f(x)$의 값이 존재하고 $f'(2n)$의 값은 존재하지 않는다. $\lim_{x\to 2n}\frac{f(x)-4}{x-2n}=\frac{n}{2}$일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(2n+h)-f(2n-h)}{h}=7$이 되는 n의 값은? [4점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

3-1

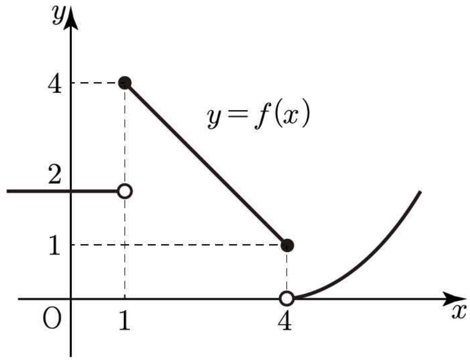
9) 19번 변형

최고차항의 계수가 1이고 $\mathrm{A}(1, 0)$에서 x축과 접하는 삼차함수 $f(x)$가 $\mathrm{P}(t, (t-1)^2)$를 지난다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{AQ}}^2}$의 값을 구하시오. (단, $t\neq 1$) [4점]

3-1

10) 28번 변형

그림은 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프이다. 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=4$에서만 불연속이다. 함수 $g(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+k$에 대하여 함수 $(f\circ g)(x)$가 $x=5$에서 불연속이 되도록 k의 값은? [4점]



① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

쉬준-41

11) 37번 변형

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 $x=0$을 제외한 모든 실수에서 연속이고 $x=1$에서 미분가능하지 않은 함수 $g(x)$에 대하여

$x<0$일 때, $f(x)+g(x)=x^2+x+1$

$0<x<1$일 때, $f(x)-2g(x)=x^2+10$

$x>1$일 때, $f(x)+2x^2g(x)=-11x^2$

이다.

$\lim_{x\to 0-}g(x)+\lim_{x\to 0+}g(x)=-4$

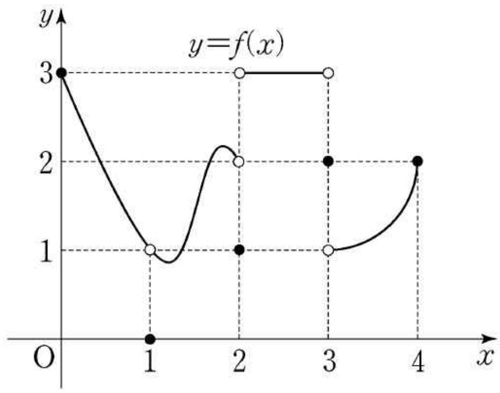
$\lim_{h\to 0-}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}-\lim_{x\to 0+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=-1$

일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

4-3

12) 40번 변형

$0 \le x \le 4$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때 $\lim_{x\to 0+}\{f(a-x)+f(a+x)\}=5$를 만족하는 모든 실수 a의 값의 합은? [4점]



① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

4-2

13) 46번 변형

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{x-1} & (x \neq 1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$, $g(x)=f(x-a)+b$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $ab \neq 0$) [4점]

<보 기>

ㄱ. $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=1$일 때, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)g(x)=-4$이다.

ㄴ. $ab+a=-1$일 때, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)g(x)$의 값은 존재한다.

ㄷ. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $h(x)$에 대하여 함수 $h(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $h(x)$는 $(x-a-1)^2$으로 나누어 떨어진다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6-2

14) 51번 변형

실수 t에 대하여 x에 대한 이차방정식 $x^2+2tx+kt=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $f(t)$라 하자. 함수 $g(f(t))$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(t)$에 대하여 $g(4)-g(3)$의 값의 값은? (단, k는 양의 상수이고 중근은 실근의 개수가 1이다.) [4점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

5-3

15) 55번 변형

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=f(2x-1)+x^2+kx$$

를 만족시킬 때, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 2에서 9까지 변할 때의 평균변화율은 a이다. $a+k$의 값은? (단, a와 k는 상수이다.) [4점]

① -5 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

쉬준-42

16) 59번 변형

함수 $f(x)=x^2(x-3a)+2$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} b-f(x-2a) & (x<2a) \\ f(x) & (x \geq 2a) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분 가능할 때, 함수 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{3}{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, $a>0$, b는 상수이다.) [4점]

쉬준-43

17) 63번 변형

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)-2f(-x)=3x^2-x+2$$

을 만족시킨다. $f'\left(-\frac{5}{9}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-44

18) 65번 변형

삼차함수 $f(x)$와 두 다항함수 $g_1(x)$, $g_2(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} g_1(x) & (x<1) \\ f(x) & (1 \le x < 2) \\ g_2(x) & (x \ge 2) \end{cases}$$

이다. 함수 $g_1(x)$, $g_2(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

$$\lim_{x \to 1-} \frac{g_1(x)-1}{x-1}=4, \ \lim_{x \to 2+} \frac{g_2(x)-8}{x-2}=11$$

$f(1)-f(-2)$의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-45

19) 66번 변형

다항함수 $f(x)$는 모든 실수 x, y에 대하여 다음과 같은 관계식을 만족시킨다.

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=3$일 때, $f(2)$을 구하시오. [4점]

쉬준-44

20) 67번 변형

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 다항식 $f(x)$는 다항식 $f'(x)$로 나누어 떨어진다.

(나) $f(0)=1$

(다) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=0$

쉬준-47

21) 70번 변형

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) 임의의 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{x-a}{f(x)-f(a)}\le\frac{1}{2}$이다.

(나) $f'(2)=2$

이때 $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-43

22) 72번 변형

$a>0$인 실수 a에 대하여 원점에서 함수 $f(x)=x(x-a)(x-2a)$에 그은 두 접선과 $(2a, 0)$에서 곡선 $y=x(x-a)(x-2a)$에 그은 두 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(a)$라 하자. $g'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-45

[23] 73번 변형

좌표평면에서 x축 위의 점 $(t, 0)$을 지나고 곡선 $y=(x+1)(x-2)^2$에 접하는 직선의 개수를 $f(t)$라 하자. 함수 $f(t)$가 열린구간 $(-1, a)$에서 연속이 되도록 하는 실수 a의 최댓값을 α라 하자. $\lim_{t\to\alpha-}f(t)+2\lim_{t\to\alpha+}f(t)+3f(\alpha)$의 값을 구하시오.
[4점]

쉬준-41

[24] 74번 변형

함수 $f(x)=x^4-4x^3+12x+1$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 a의 값의 합은? [4점]

함수 $f(x)$는 열린구간 $(a,\ a+1)$에서 감소하다가 증가한다.

① -2 ② -1 ③ 2
④ 1 ⑤ 0

쉬준-46

25) 76번 변형

실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$는 두 실수 a와 k에 대하여

$$f(x)=\begin{cases} -2x+a & (x \le k) \\ \frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2 & (x>k) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 극댓값이 존재할 때, $k-12a$의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-42

26) 77번 변형

상수항을 제외한 모든 항이 자연수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=\frac{1}{3}$, $f(1)=\frac{13}{3}$
(나) $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)>f(x_2)$인 x_1, x_2가 존재한다.

$f'(1)$의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-48

27) 78번 변형
실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2kx+k^2+1 & (x>0) \\ x^3+kx^2-x+k^2+1 & (x \le 0) \end{cases}$$

에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 모든 근의 합은? [4점]

① $\dfrac{2-\sqrt{13}}{6}$ ② $-\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{6}$
④ $\dfrac{2+\sqrt{13}}{6}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

쉬준-47

28) 81번 변형1
사차함수 $f(x)=k(x-1)(x-2)(x-a)(x-a-1)+1$ $(k<0)$에 대하여 사차방정식 $f(x)=1$은 서로 다른 두 실근을 가질 때, $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가진다. $f(0)$의 값은? (단, $a>0$) [4점]

① -127 ② -63 ③ -31
④ -15 ⑤ -7
5-3

29) 81번 변형2

사차함수 $f(x)=-(x-1)(x-2)(x-a)(x-a-1)+4$ 에 대하여 사차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 때, $f(0)$의 값은? (단, $a>2$) [4점]

① -128 ② -64 ③ -36
④ -16 ⑤ -8

클리어6평
6-2

30) 83번 변형

실수에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$는 다음 두 조건을 만족한다.

(가) 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x-y)=f(x)-f(y)-3xy(x-y)$
(나) $f'(0)=-12$

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차를 구하시오. [4점]

쉬준-48

31) 84번 변형

$|a-c|=\frac{4}{\sqrt{3}}$, $b<c$을 만족하는 세 상수 a, b, c에 대하여 $f(x)=|(x-a)(x-b)^2(x-c)|$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=t$에서 미분가능하지 않다. t의 개수가 1일 때, $y=f(x)$의 극댓값을 구하시오. [4점]

5-4

32) 85번 변형

최고차항의 계수가 k $(k>0)$인 두 사차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여
$f(x)g(x)=k^2(x-a)^4(x-b)^4$이다.
(나) 함수 $f(x)$는 $x=a+3$에서 극솟값 -27을 갖는다.

$|g(a+3)|$의 값을 구하시오. (단, $a+4<b$) [4점]

쉬준-58

33) 87번 변형

$-1 \le x \le 3$에서 함수

$$f(x)=x^3+(1-2a)x^2+\left(a^2-2a\right)x+a^2$$

에 대하여 함수 $f(x)$의 최댓값이 $f(3)$일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값의 최댓값을 구하시오. (단, $-1<a<3$) [4점]

쉬준-53

34) 88번 변형

실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t,\ t+1]$에서 함수 $f(x)=x^2(x-2)^2$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 미분가능하지 않은 모든 t의 값의 합은? [4점]

① $-\sqrt{3}$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 1

④ $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ ⑤ 2

5-4

35) 89번 변형

최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 구간 $[a, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(a)$라 하자. 함수 $g(a)$가 극대인 점의 a의 값을 원소로 갖는 집합을 A이라 할 때, 집합 A의 원소 중 정수는 -1과 0뿐이고 $f(0)=g(0)=1$이다. $f(-4)$의 최솟값을 구하시오. [4점]

쉬준-55

36) 92번 변형

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(-x)+f(x)=0$
> (나) $a \geq k>0$인 a에 대하여 구간 $[k, a)$에 속하는 모든 실수 x는 $x-k \leq f(x) \leq x^2-k^2$를 만족시킨다.

$f(-1)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $10(M-m)$의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-59

37) 93번 변형

$f(x)=k(x-1)^2(x-2)^2 \quad (k>0)$라 하자. 삼차방정식 $x^3-(2f(t)+1)x^2+f(t)x+f(t)=0$이 중근을 갖는 실수 t의 개수가 5가 되도록 하는 k의 값은? [4점]

① 5 ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{17}{3}$
④ 6 ⑤ $\frac{19}{3}$

쉬준-56

38) 95번 변형

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$가

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x < -2) \\ -\frac{1}{3}x-\frac{2}{3} & (-2 \le x \le 1) \\ g(x) & (x>1) \end{cases}$$

일 때, 실수 t에 대하여 함수 $k(t)$를 $a \ge t+2$인 모든 실수 a에 대하여 $\frac{h(a)-h(t)}{a-t}$의 최댓값이라 하자. 방정식 $k(t)=0$의 모든 실근이 $-4,\ -2,\ \frac{3}{2}$일 때, $\{h(-3)+h(4)\}^2$의 값을 구하시오. [4점]

5-3

39) 96번 변형

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 0$ (나) $\alpha < t < 1$인 모든 실수 t에 대하여 $f'(t+3)f'(5-t) < 0$이다. (단, $\alpha < 1$)

α의 최솟값을 m이라 할 때, $m \times f(m^2+2m)$의 값을 구하시오. [4점]

5-2

40) 97번 변형

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $xf(x) \geq 0$ (나) 함수 $\|2f(x)-x\|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-54

41) 98번 변형
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=-1$
(나) 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(x-1)\{f(x)-x+1\} \geq 0$이 성립한다.

$f(2)$의 값을 구하시오. [4점]
쉬준-57

42) 100번 변형
두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2ax+a & (x \leq b) \\ -x^3+3a^2x-3a^2+a & (x > b) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고. 모든 실수 t에 대하여 $x \geq t$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $f(t)$이다. $f(a-b)$의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-56

43) 112번 변형

두 함수 $f(x)=x|x-1|$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x \le 2) \\ -x & (x>2)\end{cases}$와 최고차항의 계수가 1이고 최고차항의 차수가 n인 다항함수 $h(x)$에 대하여 함수 $h(x)f(x)$와 함수 $h(x)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. n이 최소일 때, $h(3)$의 값을 구하시오. [4점]

6-3

44) 114번 변형

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-kx^4}{x^3}=-4k$

(나) $\lim_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x^2+2x}=4k$

(다) 방정식 $|f(x)|=1$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

$f(x)$의 극댓값이 양수일 때, k의 값을 구하시오. (단, $k>0$) [4점]

쉬준-61

45) 127번 변형

$f'(1)=f(1)$을 만족하는 다항함수 $f(x)$와 $x \neq 0$인 모든 실수에서 미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여 $xg(x)=f(x)+x^2$가 성립할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(0)=f'(0)$

ㄴ. $g'(1)=0$

ㄷ. 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5-2

46) 135번 변형

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 양수 a에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(a+x)+f(a-x)=0$이다.

(나) $\int_{-3a}^{-a} f(x)dx=4$, $\int_{-a}^{4a} f(x)dx=-2$이다.

$\int_{-2a}^{5a} f(x)dx$의 값은? [4점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

쉬준-54

47) 139번 변형
삼차함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $F(x)$는 $x=-\alpha$와 $x=\alpha$ $(\alpha>0)$에서 동일한 극댓값 m $(m>3)$을 갖는다. (나) 함수 $F(x)$는 극솟값 $m-3$을 갖는다.

$F(\beta)=0$인 양수 β에 대하여 $\int_{-\beta}^{\beta}|f(x)|dx=16$일 때, m의 값을 구하시오. [4점]
쉬준-55

48) 146번 변형
모든 실수 x에 대하여 $f(x) \le 0$, $f(x)=f(x+3)$이고 $\int_{0}^{3}\{f(x)-x^2+2x\}^2dx$의 값이 최소가 되도록 하는 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{-3}^{6}f(x)dx$의 값은? [4점]

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0
쉬준-53

49) 147번 변형

함수 $f(x)$가 $x \geq \frac{1}{3}$인 실수 x에 대하여

$$f(x) \geq 0,$$
$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 = \int_0^x \{(x-t)f(t)\}^2 dt$$

를 만족시킨다. $f(5)$의 값은? [4점]

① $\sqrt{14}$ ② $\sqrt{15}$ ③ 4
④ $\sqrt{17}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

쉬준-57

50) 148번 변형

다항함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여

$$f(x) = 3x^2 + \int_{-1}^{1} \{f(t) + g(t)\} dt$$
$$g(x) = -2x + \int_{-1}^{1} \{f(t) - g(t)\} dt$$

가 성립할 때, $f(1) + 2g(1)$의 값은? [4점]

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

5-4

51) 149번 변형

$\int f(x)dx = 1 - \frac{1}{x+1}$을 만족하는 함수 $f(x)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \int_0^n f(x)dx$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{100} a_n = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

쉬준-55

52) 157번 변형

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 양의 실수 a와 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f'(t)dt = 32a$

(나) $f(x) = \int_{-a}^{x} g(t)dt$

(다) $g(x) = \int_{-a}^{x} (t^3 + 3t^2 - 2t)dt$

a의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-60

53) 158번 변형

0 이상인 실수 t에 대하여 $1 \le x \le 2$에서 함수 $f(x)=||x-t|-t|$의 최댓값을 함수 $M(t)$라 할 때, 함수 $M(t)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $2(M+m)$의 값을 구하시오. [4점]

6-1

54) 160번 변형

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 양의 실수 a, k에 대하여 미분가능한 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}(x-a)f(x) & (x \ge a)\\ k(x-a)\displaystyle\int_a^x f'(t)dt & (x<a)\end{cases}$$

라 할 때, $g(2a)=2a^3$이다. 함수 $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 a^4일 때, k의 값은? (단, $k \ne 1$) [4점]

① 12 ② 10 ③ 8 ④ 8 ⑤ 6

6-1

55) 162번 변형

함수 $f(x)=-x^2+4x-1$에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=f(x)$와 한 점에서 만나는 두 직선을 l_1, l_2이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 l_1, l_2로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

쉬준-61

56) 166번 변형

함수 $f(x)=-\frac{1}{4}(x-2)^3+2$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

6-2

57) 168번 변형

함수 $f(x)=-\frac{1}{8}(x-4)^2+4 \quad (x \le 4)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 및 곡선 $y=-x^3+3x^2-3x+2$로 둘러싸인 부분 중 제1사분면에 나타나는 부분의 넓이는?

① $\frac{23}{3}$ ② 8 ③ $\frac{25}{3}$
④ $\frac{26}{3}$ ⑤ 9

6-1

58) 170번 변형

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=t^3(t-4)+k$일 때, 점 P는 출발한 후 움직이는 방향이 바뀌지 않는다. k의 값이 최소일 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 속도가 최소가 되는 시각까지 움직인 거리는? [4점]

① $\frac{239}{5}$ ② 48 ③ $\frac{241}{5}$
④ $\frac{242}{5}$ ⑤ $\frac{243}{5}$

쉬준-62

59) 172번 변형

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 가속도가

$$a(t) = 12t^2 - 18t - 2 \ (t \geq 0)$$

이고, 시각 $t=3$에서 점 P의 위치가 원점일 때, $t=4$일 때, P의 위치는? (단, $t=0$일 때, 점 P의 위치는 원점이다.) [4점]

① 56 ② 58 ③ 60 ④ 62 ⑤ 64

6-2

60) 173번 변형

두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=-k$과 $x=k$에서만 만나고 $\int_{-k}^{k}\{f(x)-g(x)\}dx = \frac{4}{3}k^4$일 때,

함수 $f(k+1)-g(k+1)$가 될 수 있는 모든 값의 합이 -9일 때, k의 값은? (단, $k>0$) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

쉬준-62

61) 174번 변형1

함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+k$ $(k>0)$의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선 l, m의 기울기가 모두 9이다. 곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 두 직선과 접선 l, m으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{64}{9}k$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-63

62) 174번 변형2

함수 $f(x)=x^3+kx+k$ $(k>0)$의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선 l, m의 기울기가 모두 $4k$이다. $(0, k)$을 지나고 x축에 평행한 직선과 접선 l, m 그리고 x축으로 둘러싸인 사각형의 넓이가 8일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$

④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

쉬준-66

63) 175번 변형

이차함수 $f(x)$가

$$f(x)=\frac{15}{8}x^2+2x\int_0^2 f(t)\,dt-\left\{\int_0^2 f(t)\,dt\right\}^2$$

일 때, $\int_0^2 f(x)\,dx$로 가능한 값의 합은? [4점]

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ 1

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

쉬준-63

64) 176번 변형

함수 $f(x)=x^2$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x-1)+3$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ ② $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ ③ $2\sqrt{5}$

④ $\frac{7\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{3}$

쉬준-64

65) 180번 변형

삼차 이하의 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 오직 두 점 $(0,0)$, $(2,0)$에서 만나고

$$\int_0^3 f(x)dx=\frac{3}{4},\quad 0<\int_0^3 \{xf(x)\}'dx<6$$

을 만족시킨다. $f(9)$의 값을 구하시오.

클리어9평

66) 181번 변형

최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 t에 대하여 $\int_0^{a-t} f(x)\,dx=\int_t^a f(x)\,dx$ 이다.
(나) $\int_1^{\frac{a}{2}} f(x)\,dx=3$, $\int_1^{\frac{a}{2}} \lvert f(x)\rvert\,dx=7$

$f(k)=0$ 이고 $k>\dfrac{a}{2}$ 인 실수 k에 대하여

$\int_1^k f(x)\,dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-64

67) 182번 변형

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 t가 다음 조건을 만족시킨다.

> 등식 $f(a)=f'(a)(a-t)+1$를 만족시키는 실수 a의 값이 2 하나뿐이기 위한 필요충분조건은 $0<t\leq k$이다.

$f(k+1)$의 값을 구하시오. (단, $k>0$이다.) [4점]

쉬준-65

68) 183번 변형

양수 a와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\int_{a}^{x} f(t)\,dt$$

이고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(-2a)=0$
> (나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 0이다.

$f(-a)=64$일 때, $f(2a)$의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-102

69) 184번 변형

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $4\int_{0}^{x} t^2 f(t)\,dt = x^3\{f(x)+f(0)\}$이다.

(나) $\int_{0}^{1} f(x)\,dx = 1$

$f(2)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

8-2

70) 186번 변형

실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$가 상수 $a(a \neq 0)$와 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x) = -f(x)$

(나) $\int_{x}^{x+4} f(t)dt = ax+4$

$\int_{-5a}^{9a} f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-65

71) 187번 변형

최고차항의 계수가 -3인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0$

(나) 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=\frac{1}{2}$와 서로 다른 두 점에서 만난다.

$g(-2)$의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-51

72) 188번 변형

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 그래프는 $f(-x)=f(x)$을 만족하고 x축과 3개의 교점을 갖는다. 함수 $f(x)$와 실수 k에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int_k^x f(s)ds$$

일 때, 곡선 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 k의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ (m은 자연수)이다. $k=k_1$일 때, 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$ $(\alpha>0)$에서 극솟값을 갖는다. $\dfrac{\int_{k_1}^{k_m} g(x)dx}{k_m \times \int_0^{\alpha} |f(x)|dx}$의 값을 구하시오. [4점]

6-3

73) 189번 변형

최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$와 실수 a에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt$$

라 하자. 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1+x)+f(1-x)=0$ (나) 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 a는 2개다.

함수 $\lvert g(x)-t \rvert$의 미분가능하지 않은 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$는 $\lim\limits_{t\to1-}h(t)-\lim\limits_{t\to1+}h(t)=2$을 만족시킨다. $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

8-2

74) 191번 변형

함수 $f(x)=(x+2)(x-1)^2$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt$$

가 실수 전체의 집합에서 $g(x) \geq 0$일 때, a^2의 값을 구하시오. (단, a는 실수이다.) [4점]

쉬준-77

75) 192번 변형

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $|f(x)-f(t)|$의 미분가능하지 않은 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=0$, $t=a$, $t=3$, $t=b$에서 불연속이다. $f(a+b)=ab$, $f(ab)=b-a$일 때, $f(-1)$의 값은?
(단, $0<a<3<b$) [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

쉬준-78

76) 193번 변형

실수 a와 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 2$일 때, $f(x)=-x^2(x-3)$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)+a$이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 $x=2a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

쉬준-79

77) 196번 변형

실수 a와 함수 $f(x)=x^3-9x^2+24x+34$에 대하여 함수

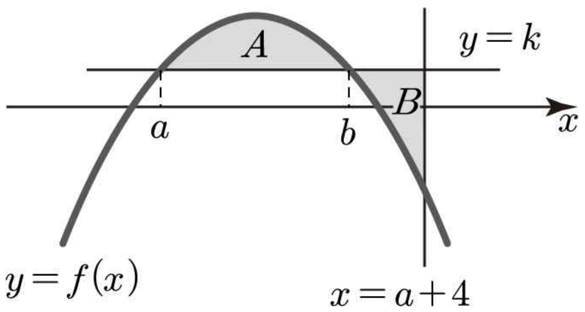
$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^2dt$$

가 오직 하나의 극값을 가질 때, 함수 $g(x)$의 가능한 극댓값의 개수를 m, 가능한 극솟값의 개수를 n이라 하자. m^2+n^2의 값을 구하시오.

랑-1-4

78) 197번 변형

실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=k$의 해집합은 $\{a,\ b\}$이다. 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 $y=k$ $(k>0)$및 직선 $x=a+4$로 둘러싸인 두 부분의 넓이를 각각 A, B라 하자. $A-B=4k$일 때. $\int_a^{a+4} f(x)dx=16$이다. k의 값을 구하시오. (단, $a<b<a+4$이다.) [4점]



쉬준-76

79) 198번 변형

함수

$$f(x) = -x^2+4x$$

에 대하여 열린구간 $(0,\ 4)$에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x |f(x)-f(t)|\,dt$$

는 $x=a$에서 극댓값을 갖고 $x=b$에서 극솟값을 갖는다. $30(a+b)$의 값을 구하시오. [4점]

쉬준-76

80) 199번 변형

다항함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 $a,\ b$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\dfrac{2}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(a)+f(b)$

(나) 방정식 $f(x)-2x=1$의 해는 존재하지 않는다.

(다) $f(-x)+f(x)=0$

$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

6-4

81) 200번 변형

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$x<0$, $x>2$에서 $f'(x)<0$이고, $0<x<2$에서 $f'(x)>0$이다.

함수 $g(x)$를

$$g(x)=xf(x+1)-\int_{1}^{x+1}f(t)dt$$

라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $g'(-1)+g'(1)=0$

ㄴ. 함수 $g(x)$의 극점의 개수는 2이다.

ㄷ. 함수 $|g(x)|$의 미분가능하지 않은 점의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6-4

수학II 정답&풀이

1) 정답 100

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$$\sum_{k=1}^{4}\left\{\lim_{x\to(3k)-}f(x)\right\}$$

$$=\lim_{x\to3-}f(x)+\lim_{x\to6-}f(x)+\lim_{x\to9-}f(x)+\lim_{x\to12-}f(x)$$

이다.

$$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to-1-}\{2f(x)-1\}=-2-1=-3$$

$$\lim_{x\to6-}f(x)=\lim_{x\to2-}\{2f(x)-1\}=4-1=3$$

$$\lim_{x\to9-}f(x)$$

$$=\lim_{x\to5-}\{2f(x)-1\}=2\left\{\lim_{x\to1-}2f(x)-1\right\}-1$$

$$=2(2\times2-1)-1=5$$

$$\lim_{x\to12-}f(x)$$

$$=\lim_{x\to8-}\{2f(x)-1\}=2\left\{\lim_{x\to4-}2f(x)-1\right\}-1$$

$$=2\left[2\left\{\lim_{x\to0-}2f(x)-1\right\}-1\right]-1$$

$$=2[2\times\{-3\}-1]-1=-15$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{4}\left\{\lim_{x\to(3k)-}f(x)\right\}$$

$$=(-3)+3+5+(-15)$$

$$=-10$$

$a=-10$이므로 $a^2=100$

2) 정답 1

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$$\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+2}<f(x)-g(x)<\sqrt{4x+4}-\sqrt{x}$$

$$\frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}<\frac{f(x)-g(x)}{\sqrt{x}}<\frac{\sqrt{4x+4}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{x}\{\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+2}\}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{4}+1}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x+4}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{x}\{\sqrt{4x+4}+\sqrt{x}\}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{4}+1}=1$$

이므로 샌드위치 정리에 의해

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-g(x)}{\sqrt{x}}=1$$

3) 정답 21

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$를 (가)조건을 이용하면

$f(x)=(x+1)(x+a)$라 할 수 있다.

$g(x)=x+b$라 두면

(가)에서

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{(x+1)g(x)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+a)}{(x+1)(x+b)}$$

$$=\frac{a-1}{b-1}=2$$

따라서 $a-1=2b-2$

$\therefore\ a-2b=-1\ \cdots$㉠

(나)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-xg(x)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x+a)-x(x+b)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a+1-b)x+a}{2x}=2$$

$$\frac{a-b+1}{2}=2$$

$\therefore\ a-b=3\ \cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $a=7$, $b=4$

따라서 $f(x)=(x+1)(x+7)$, $g(x)=x+4$이다.

$f(1)=2\times8=16$

$g(1)=5$

그러므로 $f(1)+g(1)=21$

4) 정답 3

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$$\lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{a\{f(x)-f(a)\}-(x-a)f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{a\{f(x)-f(a)\}}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f(a)}{x-a}$$

$=af'(a)-f(a)=1-a^2 \cdots$ ㉠

$f(x)=px^2+qx+r$ 로 놓으면 $f'(x)=2px+q$이므로 ㉠으로부터

$a(2pa+q)-(pa^2+qa+r)=1-a^2$

$pa^2-r=-a^2+1$ 이 모든 실수 a에 대하여 성립해야 하므로 $p=-1,\ r=-1$

$\therefore\ f(x)=-x^2+qx-1$

$f(1)=-1+q-1=0$에서 $q=2$

$\therefore\ f(x)=-x^2+2x-1$

$f(0)=-1,\ f(3)=-4$

$f(0)-f(3)=(-1)-(-4)=3$

5) 정답 ③

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x-b)-f(a+b)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{k|x-b-a|-k|b|}{x-a}$$

$$=k\lim_{x\to a}\frac{|x-b-a|-|b|}{x-a}$$ 에서

(i) $b>0$이면 $x\to a$일 때, $x-b-a<0$이므로

$$k\lim_{x\to a}\frac{|x-b-a|-|b|}{x-a}$$

$$=k\lim_{x\to a}\frac{-(x-b-a)-b}{x-a}$$

$$=k\lim_{x\to a}\frac{-(x-a)}{x-a}=-k$$

$-k=3$에서 $k>0$이므로 모순

(ii) $b=0$이면

$$k\lim_{x\to a}\frac{|x-b-a|-|b|}{x-a}$$

$$=k\lim_{x\to a}\frac{|x-a|}{x-a}=\pm k$$이다.

따라서 진동으로 모순

(iii) $b<0$이면 $x\to a$일 때, $x-b-a>0$이므로

$$k\lim_{x\to a}\frac{|x-b-a|-|b|}{x-a}$$

$$=k\lim_{x\to a}\frac{(x-b-a)+b}{x-a}$$

$$=k\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=k=3$$

따라서 $k=3$

6) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

조건 (가), (나)에 의하여

$f(x)g(x)=x^4+ax^3+x^2$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다.

$f(x)g(x)=x^2(x^2+ax+1)$에서

조건 (다)에 의하여

$x^2+ax+1=0$은 중근을 가진다.

따라서 $D=a^2-4=0$에서 $a=\pm 2$

그러므로 $f(x)g(x)=x^2(x^2\pm 2x+1)$

$f(x)g(x)=x^2(x+1)^2$ 또는 $f(x)g(x)=x^2(x-1)^2$

이때 $f\left(\frac{1}{2}\right)$가 최소는 $f(x)$의 인수에 $(x-1)$가 포함되야 하므로 (∵음수가 되어야 하므로)

$f_1(x)=x-1,\ f_2(x)=x(x-1),\ f_3(x)=x^2(x-1)$

중 하나에서 생긴다.

$f_1\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2},\ f_2\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4},\ f_3\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$

따라서 $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 최솟값은 $-\frac{1}{2}$이다.

7) 정답 2
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로
$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{f(x)}=0$, $\lim_{x\to\infty}\{f(x)+2g(x)\}=2$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+2g(x)}{f(x)}=0$이다. 즉, $\lim_{x\to\infty}\left\{1+\frac{2g(x)}{f(x)}\right\}=0$

$h(x)=1+\frac{2g(x)}{f(x)}$라 하면

$\frac{2g(x)}{f(x)}=h(x)-1$이고 $\lim_{x\to\infty}h(x)=0$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{2g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\{h(x)-1\}=-1$

즉, $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=-\frac{1}{2}$

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$이다.

따라서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+\{f(x)\}^2+2f(x)g(x)-\frac{2f(x)g(x)}{x^3}}{3f(x)+2g(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{f(x)}+f(x)+2g(x)-\frac{g(x)}{f(x)}\times\frac{2f(x)}{x^3}}{3+\frac{2g(x)}{f(x)}}$$

$$=\frac{1+2-\left(-\frac{1}{2}\right)\times 2}{3+2\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{2}=2$$

8) 정답 ②
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2n+h)-f(2n-h)}{h}$은 $f(x)$의 $x=2n$에서의 미분가능성과 상관없이 극한값이 존재한다. (중심화차 몫)

$\lim_{x\to 2n}\frac{f(x)-4}{x-2n}$에서 $x-2n=h$라 하면

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2n+h)-4}{h}=\frac{n}{2}$

$\lim_{x\to 2n}\frac{f(x)-4}{x-2n}$에서 $x-2n=-h$라 하면

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2n-h)-4}{-h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(2n-h)-4}{h}=\frac{n}{2}$

따라서

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2n+h)-f(2n-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2n+h)-4-f(2n-h)+4}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2n+h)-4}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(2n-h)-4}{h}$

$=\frac{n}{2}+\frac{n}{2}=n=7$

$\therefore\ n=7$

9) 정답 1
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

최고차항의 계수가 1이고 점 $\mathrm{A}(1,0)$에 접하는 삼차함수 $f(x)$는

$f(x)=(x-1)^2(x+a)$

$f(x)$가 $\mathrm{P}(t,(t-1)^2)$를 지나므로

$(t-1)^2=(t-1)^2(t+a)$

그러므로 $a=1-t$

$f(x)=(x-1)^2(x+1-t)$

그러므로 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(0,1-t)$이다.

따라서

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{t^2+(t^2-t)^2}$

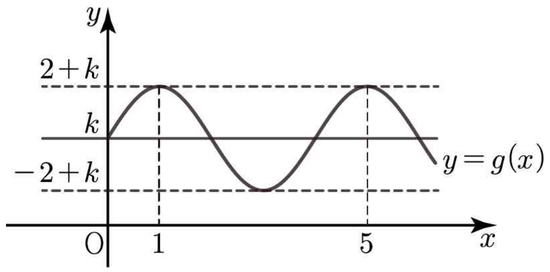
$\quad=\sqrt{t^4-2t^3+2t^2}$

$\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{1+(1-t)^2}=\sqrt{t^2-2t+2}$

$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{AQ}}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^4-2t^3+2t^2}}{t^2-2t+2}=1$

10) 정답 ②
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]
[그림 : 이정배T]

함수 $g(x)$는 주기가 4이고 최댓값이 $2+k$, 최솟값이 $-2+k$이므로 그래프는 아래와 같다.



함수 $(f\circ g)(x)$가 $x=5$에서 불연속이므로

$\lim_{x\to5}(f\circ g)(x)\neq(f\circ g)(5)$을 만족한다.

한편, 함수 $(f\circ g)(x)$가 $x=5$에서 좌극한과

우극한은 아래와 같이 표현되고

$$\lim_{x\to5-}(f\circ g)(x)=\lim_{g(x)\to(2+k)-}f(g(x))$$

$$\lim_{x\to5+}(f\circ g)(x)=\lim_{g(x)\to(2+k)-}f(g(x))$$

따라서 $\lim_{x\to5}(f\circ g)(x)\neq(f\circ g)(5)$을 만족하기 위해

서는 $\lim_{x\to(2+k)-}f(x)\neq f(2+k)$

즉, 함수 $f(x)$에서 좌극한과 함숫값이 다른 x는

$x=1$이다.

($x=4$에서는 좌극한과 함숫값이 같다.)

따라서 $2+k=1$

$k=-1$

11) 정답 2

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$\lim_{x\to0-}g(x)+\lim_{x\to0+}g(x)=-4$에서

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=\alpha$라 하면

$$\lim_{x\to0-}\{2f(x)+2g(x)\}=2$$

$$\lim_{x\to0+}\{f(x)-2g(x)\}=10$$

$$\alpha+2\left\{\lim_{x\to0-}g(x)+\lim_{x\to0+}g(x)\right\}=-8$$

$\alpha-8=-8$, $\alpha=0$

$\therefore\ f(0)=0\ \cdots$㉠

한편,

$f(x)$가 삼차함수이고 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$0<x<1$일 때, $f(x)-2g(x)=x^2+10$

$x>1$일 때, $f(x)+2x^2g(x)=-11x^2$

에서 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)-2g(1)=11$

$f(1)+2g(1)=-11$

$\therefore\ f(1)=0,\ g(1)=-\dfrac{11}{2}\ \cdots$㉡

$$\lim_{h\to0-}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}-\lim_{x\to0+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$$

$=\lim_{x\to1-}g'(x)-\lim_{x\to1+}g'(x)=-1$이므로

$0<x<1$일 때, $f'(x)-2g'(x)=2x$

$x>1$일 때, $f'(x)+4xg(x)+2x^2g'(x)=-22x$

에서

$\lim_{x\to1}f'(x)=f'(1)=\beta$라 하면

$\lim_{x\to1-}\{f'(x)-2g'(x)\}=2$ ⇨ $\beta-2\lim_{x\to1-}g(x)=2$

$\lim_{x\to1+}\{f'(x)+4xg(x)+2x^2g'(x)\}=-22$

⇨ $\beta-22+2\lim_{x\to1+}g'(x)=-22$ ⇨

$\beta+2\lim_{x\to1+}g'(x)=0$

$$2\beta-2\left\{\lim_{x\to1-}g'(x)-\lim_{x\to1+}g'(x)\right\}=2$$

$\lim_{x\to1-}g'(x)-\lim_{x\to1+}g'(x)=-1$이므로

$2\beta+2=2$

$\beta=f'(1)=0\ \cdots$㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $f(x)=x(x-1)^2$이다.

$\therefore\ f(2)=2$

12) 정답 ③

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$$\lim_{x\to0+}\{f(a-x)+f(a+x)\}=\lim_{x\to a-}f(x)+\lim_{x\to a+}f(x)=5$$

(i) $f(x)$가 $x=a$에서 불연속일 때

$a=2$일 때 가능하다.

(ii) $f(x)$가 $x=a$에서 연속일 때

$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=\dfrac{5}{2}$이므로

$0<x<1$에서 $f(x)=\dfrac{5}{2}$을 만족하는 해가 1개 존재 고 그 값이 a의 값으로 가능하다.

(i), (ii)에서 가능한 a의 값의 합은 $2+\dfrac{5}{2}=\dfrac{9}{2}$

13) 정답 ④
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{(x-1)-1}{x-1}=\dfrac{-1}{x-1}+1$이므로 함수 $y=f(x)$은 점근선이 $x=1,\, y=1$인 그래프이다.
함수 $y=f(x-a)+b$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=1$이면 $x\neq\dfrac{1}{2}$일 때

$$g(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)+1$$
$$=\frac{-1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)-1}+1+1$$
$$=\frac{-1}{x-\frac{1}{2}}+2\text{이므로}$$

$$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x-1}\left(\frac{-1}{x-\frac{1}{2}}+2\right)$$
$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{x-2}{x-1}\times\frac{2(x-1)}{x-\frac{1}{2}}\right)$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{2(x-2)}{x-\frac{1}{2}}=-4$$

따라서 $\lim\limits_{x\to1}f(x)g(x)=-4$이다. (참)

ㄴ.
$$g(x)=f(x-a)+b$$
$$=\frac{-1}{(x-a)-1}+1+b$$
$$=\frac{-1+(1+b)(x-a-1)}{x-a-1}$$
$$=\frac{(1+b)x-(a+1)(b+1)-1}{x-a-1}$$
$$=\frac{(1+b)x-ab-a-b-2}{x-a-1}$$
$$=\frac{(1+b)x-(b+1)}{x-a-1}$$
$$=\frac{(1+b)(x-1)}{x-a-1}$$

따라서

$$\lim_{x\to-1}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1}\left(\frac{x-2}{x-1}\times\frac{(1+b)(x-1)}{x-a-1}\right)$$
$$=(-3)\times\frac{1+b}{-2-a}=\frac{3+3b}{2+a}$$

$a=-2$이면 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)g(x)$은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $g(x)=\dfrac{-1}{x-a-1}+1+b$에 대하여 $g(x)$가 $x=a+1$에서 불연속이므로 $\lim\limits_{x\to a+1}g(x)$와 $g'(a+1)$이 존재하지 않는다.
따라서 함수 $h(x)g(x)$에 대하여
$\{h(x)g(x)\}'=h'(x)g(x)+h(x)g'(x)$에서
함수 $h(x)g(x)$가 $x=a+1$에서 미분 가능하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
따라서
$\{h(a+1)g(a+1)\}'=h'(a+1)\lim\limits_{x\to a+1}g(x)+h(a+1)\,g'(a+1)$
이때 함수 $g(x)$는 $\lim\limits_{x\to a+1}g(x)$와 $g'(a+1)$가 모두 존재하지 않으므로 $h'(a+1)=0$, $h(a+1)=0$이면 $h(x)g(x)$는 $x=a+1$에서 미분 가능하다. 따라서 최고차항의 계수가 1인 $h(x)$는 2이상의 자연수 n에 대하여 $(x-a-1)^n$ 항을 인수로 가져야 한다.
따라서 $h(x)=(x-a-1)^nQ(x)$ $(n\geq2)$ 꼴이다. (참)
따라서 $h(x)$는 $(x-a-1)^2$으로 나누어 떨어진다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

14) 정답 ②
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]
[그림 : 이정배T]

x에 대한 이차방정식 $x^2+2tx+kt=0$에서 판별식을

D 라 하면

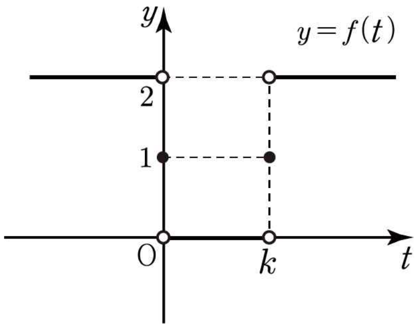
$D/4=t^2-kt=t(t-k)$이고 $k>0$이므로

$t<0$ 또는 $t>k$일 때 서로 다른 두 실근을 가지므로 실근의 개수는 2

$t=0$, $t=k$ 일 때 중근으로 실근의 개수는 1

$0<t<k$일 때 서로 다른 두 허근을 가지므로 실근의 개수는 0

따라서 $f(t)=\begin{cases} 2 & (t<0 \text{ 또는 } t>k) \\ 1 & (t=0 \text{ 또는 } t=k) \\ 0 & (0<t<k) \end{cases}$ 의 그래프는 그림과 같다.



$t=0$일 때 $g(f(t))$가 연속이기 위해서는 $f(t)$의 좌극한 2, 함숫값 1, 우극한 0이 모두 같아야 하므로 $t=0$에서 연속일 조건은 $g(2)=g(1)=g(0)$이다. ⋯ ㉠

$t=k$일 때 $g(f(t))$가 연속이기 위해서는 $f(t)$의 좌극한 0, 함숫값 1, 우극한 2이 모두 같아야 하므로 $t=k$에서 연속일 조건은 $g(0)=g(1)=g(2)$이다.⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$g(x)=x(x-1)(x-2)+c$ (c는 상수)이다.

$g(4)=24+c$, $g(3)=6+c$

$g(4)-g(3)=18$

15) 정답 ①

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$f(x)=f(2x-1)+x^2+kx$에서 $x=2x-1$의 해는 $x=1$이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=f(1)+1+k \rightarrow \therefore k=-1$

$f(x)=f(2x-1)+x^2-x$의 양변에

(i) $x=2$을 대입하면

$f(2)=f(3)+4-2=f(3)+2$

(ii) $x=3$을 대입하면

$f(3)=f(5)+9-3=f(5)+6$

(iii) $x=5$을 대입하면

$f(5)=f(9)+25-5=f(9)+20$

(i), (ii), (iii)에서 $f(2)=f(9)+28$이므로 $f(9)-f(2)=-28$이다.

함수 $f(x)$에서 x의 값이 2에서 9까지 변할 때의 평균 변화율은

$\dfrac{f(9)-f(2)}{9-2}=\dfrac{-28}{7}=-4$ 이다.

따라서 $a=-4$, $k=-1$

$\therefore a+k=-5$

16) 정답 4

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

[그림 : 이정배T]

삼차함수 $f(x)=x^2(x-3a)+2$는 $x=0$에서 극댓값 2, $x=2a$에서 극솟값 $-4a^3+2$을 갖는다.

$x<2a$일 때, 함수 $g(x)=b-f(x-2a)$는

함수 $f(x)$를 x축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 후 x축 대칭이동하고 다시 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프이다.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분 가능하므로 $x=a$에서 연속이며 미분가능하다.

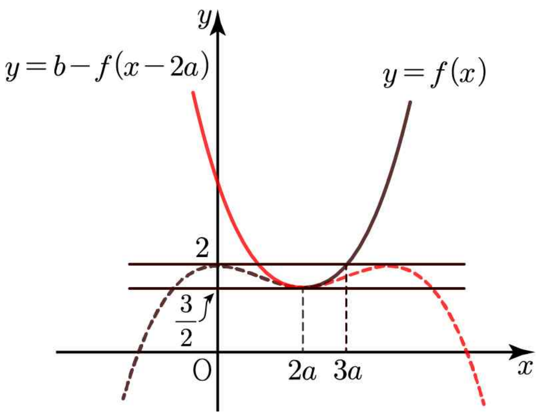
따라서

$g(a)=b-f(0)=f(2a)$에서

$b-2=-4a^3+2$

$\therefore b=-4a^3+4$⋯㉠

함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $g(x)$의 최솟값이 $\dfrac{3}{2}$이므로

$f(x)$의 극솟값 $-4a^3+2=\frac{3}{2}$이면 된다.

$-4a^3=-\frac{1}{2}$

$a^3=\frac{1}{8}$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

㉠에서 $b=-\frac{1}{2}+4=\frac{7}{2}$

그러므로 $a+b=\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=4$

17) 정답 3
[출제 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$f(x)-2f(-x)=3x^2-x+2\cdots$㉠의 양변의 x에 $-x$을 대입하면

$f(-x)-2f(x)=3x^2+x+2$이다. 양변에 $\times 2$을 하면

$2f(-x)-4f(x)=6x^2+2x+4\cdots$㉡

㉠, ㉡의 양변을 더하면

$-3f(x)=9x^2+x+6$

$f(x)=-3x^2-\frac{1}{3}x-2$

$f'(x)=-6x-\frac{1}{3}$

따라서 $f'\left(-\frac{5}{9}\right)=-6\times\left(-\frac{5}{9}\right)-\frac{1}{3}=\frac{10}{3}-\frac{1}{3}=3$

18) 정답 21
[출제 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
따라서

$\lim_{x\to 1-}\frac{g_1(x)-1}{x-1}=4$에서 $\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-1}{x-1}=4$ 이므로

$f(1)=1$이다.

$\lim_{x\to 2+}\frac{g_2(x)-8}{x-2}=11$에서 $\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-8}{x-2}=11$ 이므로

$f(2)=8$이다.

$g(x)=ax+b$라 할 때, $g(1)=1$, $g(2)=8$을 만족하는 a, b를 구해보자.

$a+b=1$, $2a+b=8$

두 식을 연립해서 풀면

$a=7$, $b=-6$

따라서 $g(x)=7x-6$

삼차함수 $f(x)$는 $f(1)=1$, $f(2)=8$을 만족하므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(px+q)+7x-6$이라 둘 수 있다.

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=4$에서

$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\{(x-2)(px+q)+7\}}{x-1}=4$

$(-1)\times(p+q)+7=4$

$\therefore\ p+q=3\ \cdots$㉠

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-8}{x-2}=11$에서

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\{(x-1)(px+q)+7\}}{x-2}=11$

$1\times(2p+q)+7=11$

$\therefore\ 2p+q=4\ \cdots$㉡

$p=1$, $q=2$

$f(x)=(x-1)(x-2)(px+q)+7x-6$에서

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+2)+7x-6$

$\therefore\ f(1)=7-6=1$

$\therefore\ f(-2)=-14-6=-20$

$f(1)-f(-2)=1-(-20)=21$

19) 정답 17
[출제 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

x, y에 각각 0을 대입하면 $f(0)=f(0)+f(0)-1$이므로 $f(0)=1$이다.

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-1-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}+2x\ (\because f(0)=1)\\ &=f'(0)+2x \end{aligned}$$
이다.

$f'(0)=C$라 하자.

$f'(x)=2x+C$이다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x-C}{x^2-1}$$

주어진 식이 $\frac{0}{0}$ 꼴을 만족해야 하므로,

$f(1)-f'(1)=0$

$f(1)-(2+C)=0$

$C=f(1)-2$

$$3=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x-C}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x-f(1)+2}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)-2(x-1)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}\times\frac{f(x)-f(1)-2(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}\times\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-2\right\}=\frac{1}{2}\{f'(1)-2\}$$

$f'(1)=8$

$8=f'(1)=C+2$이므로 $C=6$이다.

$f'(x)=2x+6$

$f(x)=x^2+6x+C'$

$f(0)=1$이므로 $f(x)=x^2+6x+1$

따라서 $f(2)=4+12+1=17$

20) 정답 16
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]
[풀이 : 이정배T]

(다)에서 $f(x)=(x-1)^2g(x)$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2g(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}g(x)=0$$

$\therefore\ g(1)=0$

이때, $f(x)=(x-1)^3(ax+b)$라 할 수 있고 (나)에서 $f(0)=1$이므로

$b=-1$ 즉, $f(x)=(x-1)^3(ax-1)$

$f'(x)=3(x-1)^2(ax-1)+(x-1)^3\cdot a$

$\quad=(x-1)^2(4ax-a-3)$

(가)에서 $f'(x)$가 $f(x)$의 인수이므로 $4ax-a-3$ 이 인수이고

$$f\left(\frac{a+3}{4a}\right)=0$$

$$\left(\frac{a+3}{4a}-1\right)^3\left(a\cdot\frac{a+3}{4a}-1\right)=0$$

$\therefore\ a=1$

따라서 $f(x)=(x-1)^4$이므로 $f(3)=16$

21) 정답 5
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는 (가)에서 $\frac{1}{f'(a)}\le\frac{1}{2}$ 을 알 수 있다.

만약 $f'(x)=0$인 x가 존재한다면 (가)를 만족하지 않는다.

따라서 이차함수 $y=f'(x)$는 $f'(x)>0$이 된다.

그러므로 $f'(a)\ge 2$이다.

(나)에서 $f'(2)=2$이므로 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f'(x)$는 $x=2$에서 최솟값 2을 갖는다.

즉, $f'(x)=3(x-2)^2+2$이다.

$f'(3)=5$

22) 정답 96
[출제 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]
[그림 : 최성훈T]

$f(x)=x(x-a)(x-2a)$에서

$f'(x)=(x-a)(x-2a)+x(x-2a)+x(x-a)$이다.

원점의 x좌표는 0 이므로 $f'(0)=2a^2\cdots$㉠

$t\ne 0$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$이고 이 접선이 $(0, 0)$을 지나므로

$0=-tf'(t)+f(t)$

$$f'(t)=\frac{f(t)}{t}$$

$(t-a)(t-2a)+t(t-2a)+t(t-a)=(t-a)(t-2a)$

$t(2t-3a)=0$

$\therefore\ t=\frac{3}{2}a$

접점의 x좌표는 $\frac{3}{2}a$

따라서

$f'\left(\frac{3}{2}a\right)=\frac{1}{2}a\times\left(-\frac{1}{2}a\right)+\frac{3}{2}a\times\left(-\frac{1}{2}a\right)+\frac{3}{2}a\times\frac{1}{2}a$

$=-\frac{1}{4}a^2-\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}a^2$

$=-\frac{1}{4}a^2\cdots$ ㉡

삼차함수 $f(x)$는 $(a,0)$에 대칭이고 삼차함수의 대칭성을 생각하면

$(2a,0)$에서 그은 두 접선은 기울기가 각각 ㉠, ㉡의

$2a^2$과, $-\frac{1}{4}a^2$임을 알 수 있다.

따라서 네 접선으로 둘러싸인 도형의 평행사변형이다.

$y=-\frac{1}{4}a^2x$와 $y=2a^2(x-2a)$가 만나는 점을 구해보자.

$-\frac{1}{4}a^2x=2a^2x-4a^3$

$\frac{9}{4}a^2x=4a^3$

$x=\frac{16}{9}a$

따라서 교점의 좌표는 $\left(\frac{16}{9}a,\ -\frac{4}{9}a^3\right)$이다.

$y=2a^2x$와 $y=-\frac{1}{4}a^2(x-2a)$가 만나는 점은

$\left(\frac{16}{9}a,\ -\frac{4}{9}a^3\right)$을 $(a,0)$에 대칭이동한 점이므로

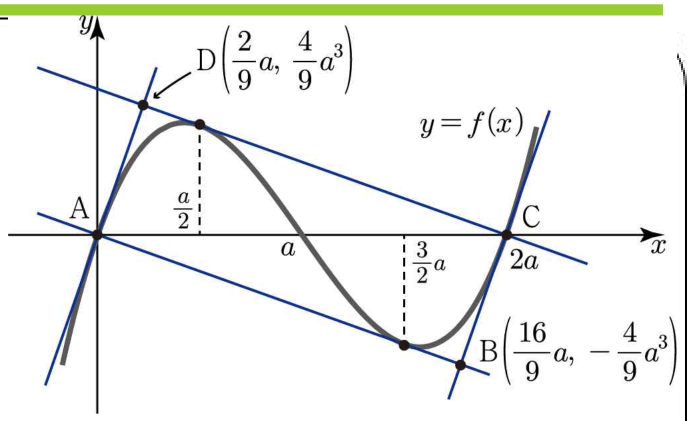
$\left(\frac{2}{9}a,\ \frac{4}{9}a^3\right)$이다.

다음 그림과 같이 $\mathrm{A}(0,0)$, $\mathrm{B}\left(\frac{16}{9}a,\ -\frac{4}{9}a^3\right)$,

$\mathrm{C}(2a,0)$,

$\mathrm{D}\left(\frac{2}{9}a,\ \frac{4}{9}a^3\right)$라 할 때,

평행사변형 ABCD의 넓이는 삼각형 ABC넓이의 2배이다.



따라서 $g(a)=2\times\frac{1}{2}\times 2a\times\frac{4}{9}a^3=\frac{8}{9}a^4$

그러므로 $g'(a)=\frac{32}{9}a^3$

$g'(3)=\frac{32}{9}\times 27=96$

[랑데뷰팁] [랑데뷰세미나(90), (91) 참고]

삼차함수 비율에 의해 접점의 좌표는 $\frac{1}{2}a$, $\frac{3}{2}a$임을 알 수 있다.

23) 정답 13

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

[그림 : 이현일T]

$g(x)=(x+1)(x-2)^2$라 하자.

$g'(x)=(x-2)^2+2(x+1)(x-2)$

$=3x(x-2)$

방정식 $g'(x)=0$의 해가 $x=0$, $x=2$이므로

삼차함수 비율에 의해 함수 $g(x)$는 $(1,g(1))$에 대칭이다.

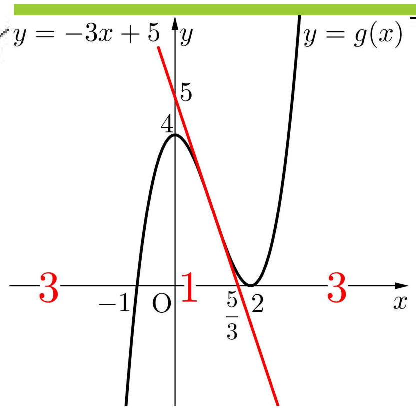
$g'(1)=-3$, $g(1)=2$

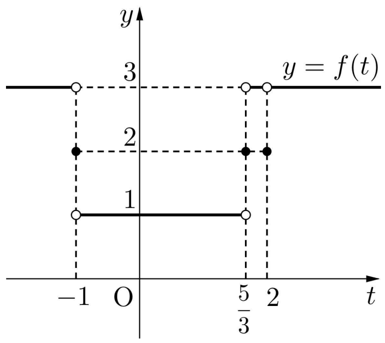
이므로 곡선 $g(x)$위의 점 $(1,g(1))$에서의 접선의 방정식은

$y=-3(x-1)+2=-3x+5$이다.

$(t,0)$을 대입하면

$0=-3t+5$에서 $t=\frac{5}{3}$이다.





따라서 삼차함수의 대칭점을 지나는 직선에 의해 나눠지는 삼차함수의 영역의 점에서 그을 수 있는 접선의 개수는 다음과 같다.

[랑데뷰 세미나 (78)(79) 참고]

(ⅰ) $t<-1$일 때, $f(t)=3$

(ⅱ) $t=-1$일 때, $f(t)=2$

(ⅲ) $-1<t<\frac{5}{3}$일 때, $f(t)=1$

(ⅳ) $t=\frac{5}{3}$일 때, $f(t)=2$

(ⅴ) $\frac{5}{3}<t<2$일 때, $f(t)=3$

(ⅵ) $t=2$일 때, $f(t)=2$

(ⅶ) $t>2$일 때, $f(t)=3$

이다.

그러므로 함수 $f(t)$가 열린구간 $(-1,a)$에서 연속이 되도록 하는 실수 a의 최댓값은 $\alpha=\frac{5}{3}$

$$\lim_{t\to\alpha-}f(t)+2\lim_{t\to\alpha+}f(t)+3f(\alpha)$$

$$=\lim_{t\to\frac{5}{3}-}f(t)+2\lim_{t\to\frac{5}{3}+}f(t)+3f\left(\frac{5}{3}\right)$$

$=1+2\times3+3\times2$

$=1+6+6=13$

24) 정답 ④

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

함수 $f(x)$의 감소하다가 증가하는 부분을 포함하는 구간은 극솟점을 포함하는 구간을 의미한다. 즉 사차함수 $f(x)$의 극솟점의 x좌표를 찾는 문제이다.

$f'(x)=4x^3-12x^2+12$

$f'(0)=12>0$

$f'(-1)=-4-12+12<0$

$f'(1)=4>0$

$f'(2)=32-48+12=-12<0$

$f'(3)=108-108+12=12>0$

$f'(x)$의 부호가 $-\to+$로 바뀔 때 함수가 극소가 되므로

극솟점의 위치는 $-1<x<0$와 $2<x<3$이다.

즉, $a=-1$ 또는 $a=2$

이므로 모든 a의 값의 합은 1이다.

25) 정답 18

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

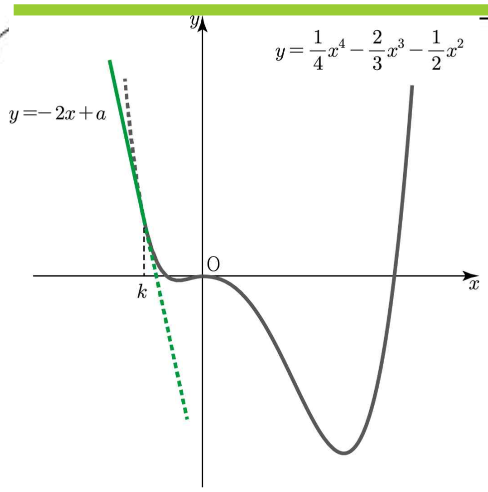
[그림 : 최성훈T]

$x>k$일 때, $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$

$f'(x)=x^3-2x^2-x=x(x^2-2x-1)$

으로 방정식 $f'(x)=0$은 근은 $x=1-\sqrt{2}$, $x=0$, $x=1+\sqrt{2}$이다.

따라서 사차함수 $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.



함수 $f(x)$가 극댓값이 존재하기 위해서는

$x \le k$일 때 기울기가 -2인 직선이므로

방정식 $f'(x)=-2$을 만족하는 x의 값 중 0보다 작은 값이 k이다.

$x^3-2x^2-x=-2$ ⇨ $x^3-2x^2-x+2=0$

$(x-1)(x+1)(x-2)=0$이다.

따라서 $k=-1$

$x=-1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)$에서

$$f(x)=\begin{cases}-2x+a & (x \le k)\\ \frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2 & (x>k)\end{cases}$$

$$2+a=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ a=-\frac{19}{12}$$

따라서 $k-12a=-1+19=18$

26) 정답 8

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$f(0)=1$이므로 자연수 a, b, c에 대하여

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+\frac{1}{3}$라 하자.

$f(1)=a+b+c+\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$이므로

$a+b+c=4\cdots$㉠이다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항 계수가 자연수(양수)이고 (나) 조건에 의해 삼차함수는 극값을 가져야 하므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다.

따라서

$f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$

$\frac{D}{4}=b^2-3ac>0\cdots$㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 자연수 a, b, c는

$a=1$, $b=2$, $c=1$뿐이다.

따라서 $f(x)=x^3+2x^2+x+\frac{1}{3}$

그러므로 $f'(x)=3x^2+4x+1$이고

$f'(1)=8$

27) 정답 ①

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$$f'(x)=\begin{cases}2x-2k & (x>0)\\ 3x^2+2kx-1 & (x \le 0)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분 가능하므로 $-2k=-1$이다.

$$\therefore\ k=\frac{1}{2}$$

따라서

$$f(x)=\begin{cases}x^2-x+\frac{5}{4} & (x>0)\\ x^3+\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{4} & (x \le 0)\end{cases}$$ 이므로

$$f'(x)=\begin{cases}2x-1 & (x>0)\\ 3x^2+x-1 & (x \le 0)\end{cases}$$

이다. $x>0$일 때, $2x-1=0$의 해는 $x=\frac{1}{2}$

$x \le 0$일 때, $3x^2+x-1=0$의 해는

$x=\frac{-1-\sqrt{13}}{6}$ $(\because x \le 0)$

따라서 방정식 $f'(x)=0$의 모든 근의 합은

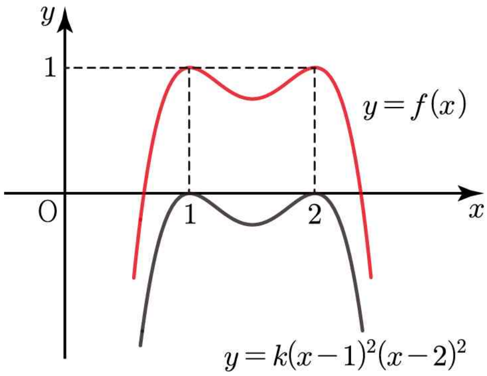
$$\frac{1}{2}-\frac{1+\sqrt{13}}{6}=\frac{2-\sqrt{13}}{6}$$

28) 정답 ②

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

[그림 : 이정배T]

방정식 $f(x)=1$은
$k(x-1)(x-2)(x-a)(x-a-1)=0$ 에서 해가
$x=1,\ x=2,\ x=a,\ x=a+1$이다.
$f(x)=1$이 서로 다른 두 실근을 가지기 위해서는 $a=1$이다.
$a=1$일 때, $f(x)=k(x-1)^2(x-2)^2+1$은 $y=k(x-1)^2(x-2)^2$의 그래프를 y축으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.



따라서 $y=k(x-1)^2(x-2)^2$의 극솟값이 -1이면 $y=f(x)$는 x축과 $x=\dfrac{3}{2}$에서 접하게 되어 사차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가지게 된다.

극솟값은 $x=1$과 $x=2$의 중점인 $x=\dfrac{3}{2}$인 점의 y값이므로

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=k\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{k}{16}=-1$$

$\therefore\ k=-16$

$f(x)=-16(x-1)^2(x-2)^2+1$

$f(0)=-63$

29) 정답 ③
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

사차함수 $f(x)$는 $g(x)=-(x-1)(x-2)(x-a)(x-a-1)$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프이다. 사차함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 -1이고 $a>2$이므로 $x=\dfrac{a}{2}+1$에 대칭이다. 따라서 극솟값은 $g\left(\dfrac{a}{2}+1\right)$이다.

$$g\left(\frac{a}{2}+1\right)=-\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}-1\right)\left(-\frac{a}{2}+1\right)\left(-\frac{a}{2}\right)$$
$$=-\frac{a^2}{4}\left(\frac{a}{2}-1\right)^2$$

에서

극솟값이 -4이면 함수 $g(x)$를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 x축에 접하므로 x축과 만나는 점의 개수가 3이 된다.

따라서 $-\dfrac{a^2}{4}\left(\dfrac{a}{2}-1\right)^2=-4$

$a^2\left(\dfrac{a}{2}-1\right)^2=16$

$\left(\dfrac{a^2}{2}-a\right)^2=16$

$\dfrac{a^2}{2}-a=4$ 또는 $\dfrac{a^2}{2}-a=-4$

(i) $\dfrac{a^2}{2}-a=4$

$a^2-2a-8=0$

$(a-4)(a+2)=0$

$\therefore\ a=4\ (\because\ a>2)$

(ii) $\dfrac{a^2}{2}-a=-4$

$a^2-2a+8=0$

실수 a는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=4$이다.

그러므로 $f(x)=-(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)+4$

$f(0)=-40+4=-36$

30) 정답 32
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$f(x-y)=f(x)-f(y)-3xy(x-y)$에

$x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)-f(0)$

$\therefore\ f(0)=0\ \cdots$㉠

$f'(0)=-12$이므로

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}\ (\because ㉠)=-12$$

$\cdots$㉡

$$\therefore\ f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(-h)-3x(-h)(x+h)-f(x)}{h}$
(∵ (가))

$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(-h)}{-h}+3x(x+h)+3xh\right\}$

$=-12+3x^2$(∵ ㉡)

$f'(x)=3(x+2)(x-2)=0$

의 해가 $x=-2$, $x=2$이므로 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극댓값을 갖고 $x=2$에서 극솟값을 가진다.

$f(0)=0$이므로 $f(x)=x^3-12x$이다.

$f(-2)=-8+24=16$

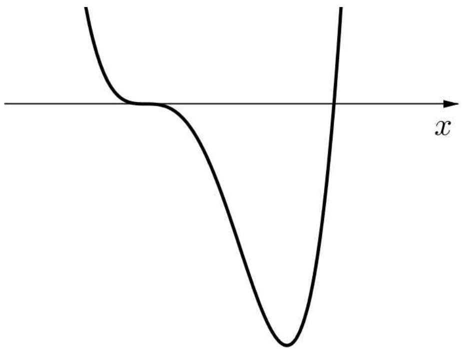
$f(2)=8-24=-16$

따라서 극댓값과 극솟값의 차는 $16-(-16)=32$

31) 정답 3
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

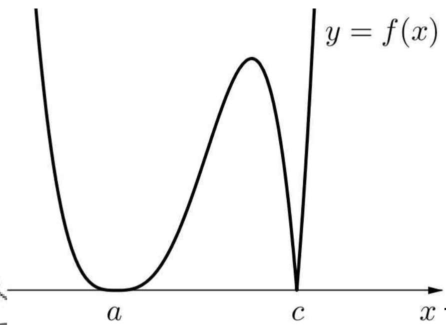
$y=f(x)$가 오직 한 개의 x값에서만 미분가능하지 않기 위해서 $b<c$이므로

$y=(x-a)(x-b)^2(x-c)$그래프는 아래와 같은 꼴의 그래프를 가져야 한다.



위 그림과 같이 한 점에서 삼중근을 가져야 하며, $b<c$이고 $a\neq c$이므로, $a=b<c$인

$f(x)=\left|(x-a)^3(x-c)\right|$는 아래 그림과 같다.



$y=(x-a)^3(x-c)$를 미분하면,

$y'=3(x-a)^2(x-c)+(x-a)^3=(x-a)^2(4x-3c-a)$

이므로,

$x=\frac{a+3c}{4}$에서 극솟값

$y=\left(\frac{3c-3a}{4}\right)^3\left(\frac{a-c}{4}\right)=-3^3\left(\frac{a-c}{4}\right)^4$을 가진다.

따라서 $f(x)=\left|(x-a)^3(x-c)\right|$의 극댓값은

$3^3\left(\frac{a-c}{4}\right)^4$이다. $|a-c|=\frac{4}{\sqrt{3}}$이므로,

극댓값은 $3^3\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^4=3$이다.

[랑데뷰팁]- 세미나 (92), (93) 참고

사차함수 $f(x)$가 $x=a$에서 삼중근, $x=c$에서 하나의 근을 가지므로 $x=a$와 $x=c$를 $3:1$로 내분하는 점 $x=\frac{a+3c}{4}$에서 극값을 가진다.

32) 정답 3
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]
[랑데뷰팁]- 세미나 (92), (93) 참고

(i) $f(x)=k(x-a)^2(x-b)^2$인 경우
함수 $f(x)$는 극솟값 0만 가지므로 모순이다.

(ii) $f(x)=k(x-a)^3(x-b)$인 경우
사차함수 비율에서

함수 $f(x)$는 $x=\frac{3\times b+1\times a}{3+1}=\frac{a+3b}{4}$에서 극솟값을 갖고

$\frac{a+3b}{4}=a+3$이므로 $b=a+4$이지만 $b>a+4$이므로 모순

(iii) $f(x)=k(x-a)(x-b)^3$인 경우
사차함수 비율에서

함수 $f(x)$는 $x=\frac{1\times b+3\times a}{1+3}=\frac{3a+b}{4}$에서 극솟값을 갖고

$\frac{3a+b}{4}=a+3$이므로 $b=a+12$이다.

따라서 $f(x)=k(x-a)(x-a-12)^3$이고

$f(a+3) = 3k \times (-9)^3 = -27$

$k = \dfrac{1}{81}$ 이다.

그러므로 $g(x) = \dfrac{1}{81}(x-a)^3(x-a-12)$ 이다.

$g(a+3) = \dfrac{1}{81} \times 3^3 \times (-9) = -3$ 이다.

따라서 $|g(a+3)| = 3$

33) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

[그림 : 이정배T]

$f(-1) = 0$ 이므로 조립제법으로 $f(x)$의 우변을 인수분해하면

$f(x) = x^3 + (1-2a)x^2 + (a^2-2a)x + a^2$

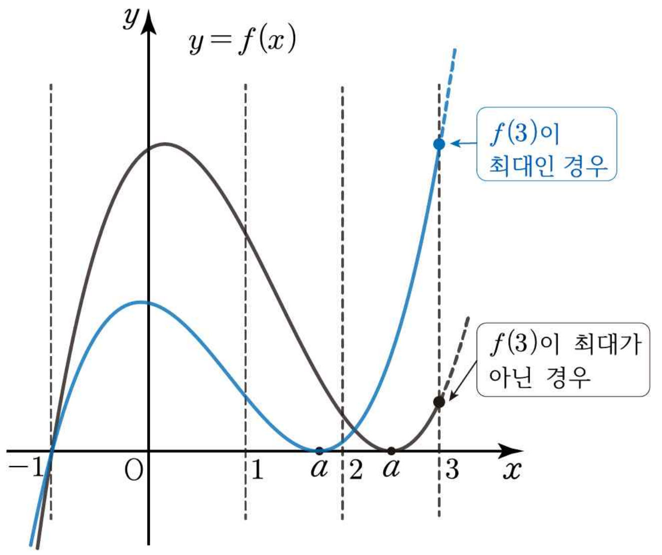
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 1-2a & a^2-2a & a^2 \\ & & -1 & 2a & -a^2 \\ \hline & 1 & -2a & a^2 & 0 \end{array}$$

$(x+1)(x^2 - 2ax + a^2)$ 에서

$f(x) = (x+1)(x-a)^2$ 이다.

$-1 \le x \le 3$에서 a $(-1 < a < 3)$에 따른 삼차함수 비율을 고려한 함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

[랑데뷰 세미나(90)-삼차함수비율 참고]



$-1 \le x \le 3$에서 $-1 < a < 3$인 a에 관하여 $f(x) = (x+1)(x-a)^2$의 최댓값이 $f(3)$이기 위해서는 $a \le 2$이어야 하고 그때 함수 $f(x)$의 극댓값이 최대이다.

따라서 $f(x) = (x+1)(x-2)^2$에서 $x = -1$과 $x = 2$의 $1:2$로 내분하는 점인 $x = 0$에서 극댓값 $f(0) = 4$가 조건을 만족시키는 극댓값의 최댓값이다.

34) 정답 ③

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

[그림 : 이정배T]

$f'(x) = 2x(x-2)^2 + 2x^2(x-2)$

$\quad = 2x(x-2)(2x-2)$

$f'(x) = 0$의 해는 $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$이고

$f(0) = f(2) = 0$, $f(1) = 1$이다.

한편, 방정식 $f(t) = f(t+1)$을 구하면

$t^2(t-2)^2 = (t+1)^2(t-1)^2$

$(2t-1)(2t^2-2t-1) = 0$

에서 해는 $t = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$, $t = \dfrac{1}{2}$, $t = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ 이다.

따라서

$t < \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ 일 때, $g(t) = f(t) = t^2(t-2)^2$

$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \le t < 0$일 때, $g(t) = f(t+1)$

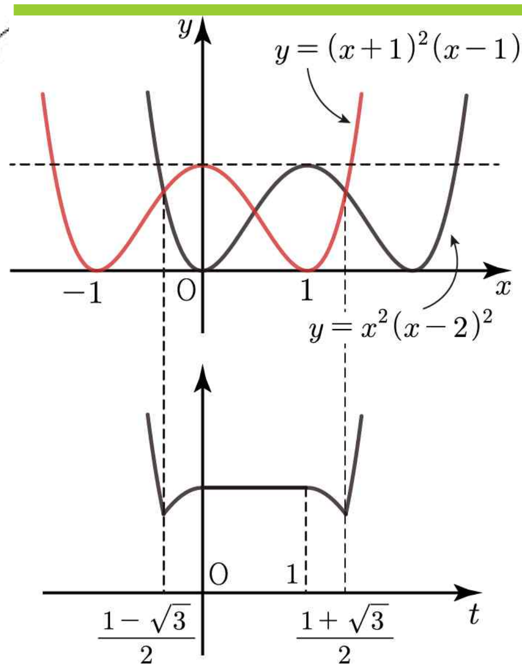
$= (t+1)^2(t-1)^2$

$0 \le t < 1$일 때, $g(t) = 1$

$1 \le t < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ 일 때, $g(t) = f(t) = t^2(t-2)^2$

$t \ge \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$, $g(t) = f(t+1) = (t+1)^2(t-1)^2$

따라서 함수 $g(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $g(t)$는 $t=0$과 $t=1$에서는 미분가능하고 $t=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$과 $t=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$에서는 미분 가능하지 않다.

따라서 함수 $g(t)$가 미분가능하지 않은 모든 t의 값의 합은 $\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}=1$

35) 정답 33

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

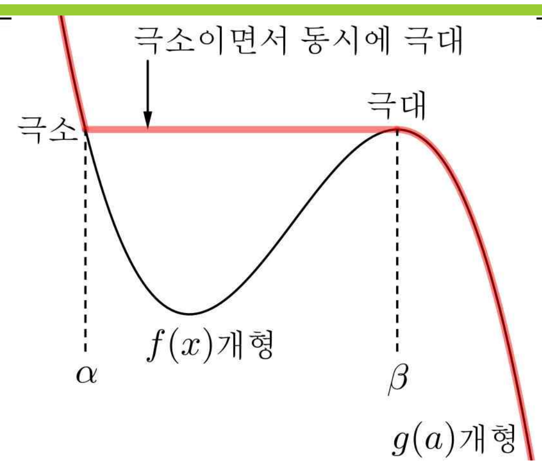
[그림 : 이현일T]

최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 그래프 개형에서 $x \geq a$에서 극대인 점이 나오기 위해서는 함수 $f(x)$는 극값을 갖는 삼차함수이다.

$f'(x)=0$의 근 중 큰 값을 $x=\beta$라 하고

$y=f(x)$와 $y=f(\beta)$의 교점 중 x좌표가 β가 아닌 점의 x 값을 α라 하자.

따라서 다음 그림과 같다.



함수 $g(a)$는 $a=\alpha$일 때 극소이고

$\alpha<a<\beta$일 때 극대이면서 동시에 극소

$a=\beta$일 때 극대이다.

$f(0)=1$이고 $g(0)=1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 1을 갖는 함수이다.

따라서 $\beta=0$이다.

삼차함수 $f(x)$는 $f(x)=-(x-\alpha)x^2+1$ 꼴이다.

또한 극대인 a가 -1을 포함하므로 $a=\alpha$에서 $g(a)$가 극댓값이므로 $-2 \leq \alpha < -1$이어야 한다.

그러므로

$f(-4)=-(-4-\alpha)(-4)^2+1=65+16\alpha$

$-32 \leq 16\alpha < -16$에서 $33 \leq 65+16\alpha < 49$이므로 $f(-4)$의 최솟은 33이다.

36) 정답 5

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

(가)에서 삼차함수 $f(x)$가 원점 대칭이므로 함수 $f(x)=x^3+px$라 할 수 있다.

(나)에서 $x-k \leq f(x) \leq (x-k)(x+k)$에서

$\lim_{x\to k}(x-k) \leq \lim_{x\to k}f(x) \leq \lim_{x\to k}(x-k)(x+k)$

따라서 $\lim_{x\to k}f(x)=0$

삼차함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(k)=0$이다.

즉, $f(k)=k^3+pk=0$

$\therefore\ p=-k^2$

$f(x)=x^3-k^2x\cdots$㉠

$x-k \le x^3-k^2x \le x^2-k^2$에서

$1 \le 3x^2-k^2 \le 2x$

$1 \le 3k^2-k^2 \le 2k$

$1 \le 2k^2 \le 2k$

$2k^2-1 \ge 0$에서 $k \le -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $k \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$2k^2-2k \le 0$에서 $0 \le k \le 1$

따라서 $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \le k \le 1$이다.

㉠에서 $f(-1)=-1+k^2$이므로

$f(-1)$의 최댓값은 $k=1$일 때, 0이다.

$f(-1)$의 최솟값은 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $-\dfrac{1}{2}$이다.

그러므로

$M-m=0-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

$10(M-m)=5$

[랑데뷰팁]

$k=1$일 때, $x-1 \le x^3-x \le x^2-1$의 해는 $x=1$ 뿐이다.

37) 정답 ②

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

[그림: 최성훈T]

$x^3-(2f(t)+1)x^2+f(t)x+f(t)=0$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -2f(t)-1 & f(t) & f(t) \\ & & 1 & -2f(t) & -f(t) \\ \hline & 1 & -2f(t) & -f(t) & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-1)\{x^2-2f(t)x-f(t)\}=0$

주어진 방정식이 중근을 가지는 경우는

$x^2-2f(t)x-f(t)=0$이 $x=1$를 근으로 갖는 경우 또는 $x^2-2f(t)x-f(t)=0$이 중근을 갖는 경우이다.

(i) $x^2-2f(t)x-f(t)=0$이 $x=1$를 근으로 갖는 경우

$1-2f(t)-f(t)=0$이므로 $f(t)=\dfrac{1}{3}$일 때 중근을 갖는다.

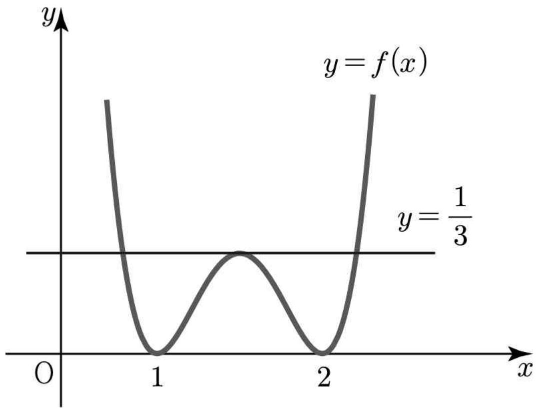
(ii) $x^2-2f(t)x-f(t)=0$이 중근을 갖는 경우

$D/4=\{f(t)\}^2+f(t)=f(t)\{f(t)+1\}=0$이므로

$f(t)=0$ 또는 $f(t)=-1$이다.

실수 전체의 집합에서 $f(t) \ge 0$이므로 $f(t)=-1$의 해는 존재하지 않는다.

따라서 $y=f(x)$와 $y=0$, $y=\dfrac{1}{3}$의 교점의 개수가 5이어야 한다.



$y=f(x)$는 $y=0$과 두 점에서 만나므로

$y=f(x)$와 $y=\dfrac{1}{3}$이 3개의 교점을 가져야 한다.

즉, $y=f(x)$의 극댓값이 $\dfrac{1}{3}$이어야 한다.

사차함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{3}{2}$에서 극댓값을 가지므로

$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=k\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{k}{16}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ k=\dfrac{16}{3}$

38) 정답 4

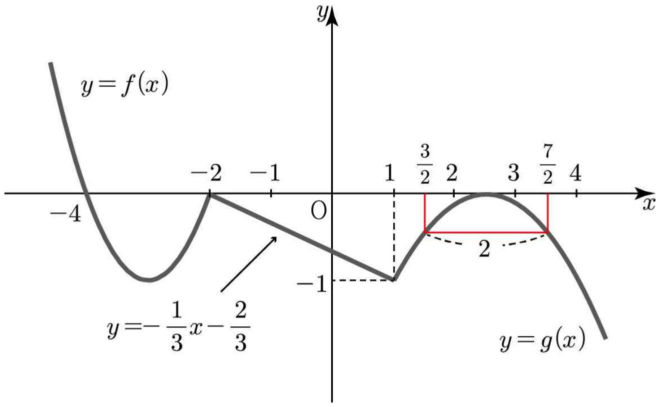
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

[그림 : 최성훈T]

$h(x)=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}$ $(-2 \le x \le 1)$에서 함수 $h(x)$는 $(-2, 0)$, $(1, -1)$을 지난다.

$a \ge t+2$일 때, $\dfrac{h(a)-h(t)}{a-t}$는 함수 $y=h(x)$의 그래프 위의 두 점 $(t, h(t))$, $(a, h(a))$를 잇는 직선의 기울기⋯㉠와 같으므로 $k(t)$는 직선의 기울기의 최댓값이다.

방정식 $k(t)=0$을 만족하는 t의 의미는 ㉠의 기울기의 최댓값이 0을 만족하는 t값들이다.
$k(-2)=0$이므로 $(-2,\ 0)$에서 $(a,\ h(a))$에 그은 직선의 기울기가 0이기 위해서는 다음 그림과 같이 이차항의 계수가 음수인 이차함수 $g(x)$의 꼭짓점이 x축 위에 있어야 한다.



한편. $k\left(\frac{3}{2}\right)=0$이므로 이차함수 $g(x)$는

$g\left(\frac{3}{2}\right)=g\left(\frac{3}{2}+2\right)$을 만족해야 한다.

따라서 $g(x)$의 축은 $x=\frac{5}{2}$이므로 꼭짓점의 좌표는

$\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$이다.

그러므로 $g(x)=p\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$이고 함수 $h(x)$가 실수 전체에서 연속이므로 $g(1)=-1$을 만족하므로

$p=-\frac{4}{9}$이다. 따라서 $g(x)=-\frac{4}{9}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$이다.

또한 $k(-4)=0$이므로 함수 $h(x)$는 $(-4,\ 0)$을 지나야 한다. 즉, $f(-4)=0$
함수 $h(x)$가 실수 전체에서 연속이므로 $f(-2)=0$을 만족한다. 또한
$f(x)$의 이차항의 계수가 1이므로
$f(x)=(x+4)(x+2)$이다.
따라서
함수 $h(x)$는 다음과 같다.

$$h(x)=\begin{cases}(x+4)(x+2) & (x<-2)\\ -\frac{1}{3}x-\frac{2}{3} & (-2\le x\le 1)\\ -\frac{4}{9}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 & (x>1)\end{cases}$$

$h(-3)=-1,\ h(4)=-1$

$\{h(-3)+h(4)\}^2=(-2)^2=4$

확률과 통계

39) 정답 11
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가
(가)에서 $f(1)=f'(1)=0$을 만족하므로
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$
$f(1)=1+a+b+c=0$
$f'(x)=3x^2+2ax+b\cdots$㉠
$f'(1)=3+2a+b=0$
$\therefore\ b=-2a-3$이다.
조건 (나)에서 의하여 $a<t<1$인 모든 실수 t에 대하여 $f'(t+3)f'(5-t)<0$이므로
$\lim_{t\to1-}f'(t+3)f'(5-t)\le 0$ 이다.
따라서 $\{f'(4)\}^2\le 0$이므로 $f'(4)=0$이다.
㉠에서 $f'(4)=48+8a+b=0$
$48+8a-2a-3=0$
$6a=-45$
$\therefore\ a=-\frac{15}{2},\ b=12,\ c=-\frac{11}{2}$

그러므로 $f(x)=x^3-\frac{15}{2}x^2+12x-\frac{11}{2}\cdots$㉡

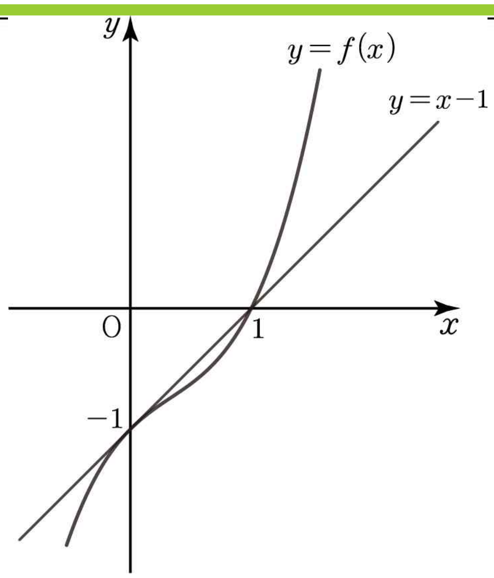
$f'(x)=3x^2-15x+12=3(x-1)(x-4)$
$1<x<4$에서 $f'(x)<0$이고 $x<1$ 또는 $x>4$일 때, $f'(x)>0$이다.
이때, $\alpha<t<1$에서 $-1<-t<-\alpha$, $4<5-t<5-\alpha$
이므로 $f'(5-t)>0$이다.
따라서 $f'(t+3)f'(5-t)<0$을 만족하기 위해서는 $f'(t+3)<0$이어야 한다.
즉, $1<t+3<4$이다.
$-2<t<1$이므로 α의 최솟값은 -2이다.
$\therefore\ m=-2$
$m^2+2m=0$이므로
㉡에서
$m\times f(m^2+2m)=-2\times f(0)=(-2)\times\left(-\frac{11}{2}\right)=11$

40) 정답 9
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

조건 (가)를 만족시키려면 $f(x)$는 x를 반드시 인수로 가져야 하므로 $f(0)=0$이다.
$g(x)=2f(x)-x$라 두면 삼차함수 $g(x)$에 대하여 $|g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분 가능하기 위해서는 $g(x)=k(x-\alpha)^3$꼴이어야 한다.
$g(0)=2f(0)-0=0$
이고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이다. 따라서 $g(x)=2x^3$이다.
$g(x)=2f(x)-x$에서
$f(x)=\dfrac{1}{2}g(x)+\dfrac{1}{2}x$이므로
$\therefore\ f(x)=x^3+\dfrac{1}{2}x$
따라서 $f(2)=8+1=9$

41) 정답 5
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]
[그림 : 이정배T]

(나)에서 모든 실수 x에 대하여 삼차함수 $f(x)$는
$x \geq 1$일 때 $f(x) \geq x-1$
$x<1$일 때, $f(x)\leq x-1$
이 성립하고
(가)에서 $f(0)=-1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 직선 $y=x-1$에 접해야 하므로 그래프 개형은 다음과 같다.

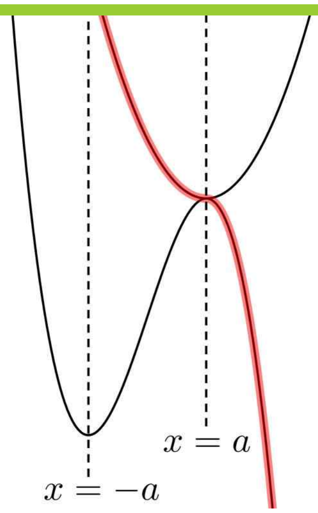


따라서 $f(x)-x+1=x^2(x-1)$
$f(x)=x^2(x-1)+x-1$
$f(2)=5$

42) 정답 1
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]
[그림 : 이현일T]

모든 실수 t에 대하여 $x \geq t$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $f(t)$가 되기 위해서는 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소함수가 되어야 한다.

한편,
$$f'(x)=\begin{cases} 2x-2a & (x<b) \\ -3x^2+3a^2 & (x>b)\end{cases}$$
$$=\begin{cases} 2(x-a) & (x<b) \\ -3(x+a)(x-a) & (x>b)\end{cases}$$
에서 그래프 개형상 실수 전체의 집합에서 감소하기 위해서는 $b=a$이어 한다.
다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $f(a)=\lim_{x\to a+}f(x)$가 성립한다.

따라서 $a^2-2a^2+a=-a^3+3a^3-3a^2+a$

$2a^3-2a^2=0$

$2a^2(a-1)=0$

따라서 $a=b=1$이다. $(\because a>0)$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & (x\le 1) \\ -x^3+3x-2 & (x>1) \end{cases}$$

$f(a-b)=f(0)=1$

43) 정답 2
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$f(x)$는 $x=1$에서만 미분가능하지 않으므로 $h(x)f(x)$는 $x=1$에서만 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$\{h(x)f(x)\}'=h'(x)f(x)+h(x)f'(x)$에서

$\{h(1)f(1)\}'=h'(1)\lim_{x\to1}f(x)+h(1)\,f'(1)$이다.

$f(x)$는 $\lim_{x\to1}f(x)$은 존재하고 $f'(1)$의 값이 존재하지 않으므로 $h(1)=0$이면 $h(x)f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

따라서 다항식 $h(x)$는 $(x-1)$을 인수로 갖는다.

$g(x)$는 $x=2$에서 불연속이고 미분가능하지 않으므로 $h(x)g(x)$는 $x=2$에서만 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$\{h(x)g(x)\}'=h'(x)g(x)+h(x)g'(x)$에서

$\{h(2)g(2)\}'=h'(2)\lim_{x\to2}g(x)+h(2)\,g'(2)$이다.

$g(x)$는 $\lim_{x\to2}g(x)$와 $g'(2)$의 값이 존재하지 않으므로 $h'(2)=0$, $h(2)=0$이면 $h(x)g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

따라서 다항식 $h(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 갖는다.

$n\ge3$이고 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1이므로

$h(x)=(x-1)(x-2)^2Q(x)$이다.

$n=3$일 때, $h(x)=(x-1)(x-2)^2$이므로

$h(3)=2\times1=2$이다.

[다른 풀이]- 유승희T

$f(x)$는 $x=1$에서만 미분가능하지 않으므로 $h(x)f(x)$는 $x=1$에서만 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$P(x)=h(x)f(x)$라 하면

$P(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to1}\frac{P(x)-P(1)}{x-1}$이 존재하여야 한다.

$$\lim_{x\to1+}\frac{P(x)-P(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{h(x)\times x(x-1)-h(1)\times0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}xh(x)=h(1)$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{P(x)-P(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{h(x)\times x(-x+1)-h(1)\times0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\{-xh(x)\}=-h(1)$$

에서 $h(1)=-h(1)$이므로 $h(1)=0$

따라서 다항식 $h(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.

$g(x)$는 $x=2$에서 불연속이고 미분가능하지 않으므로 $h(x)g(x)$는 $x=2$에서만 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$Q(x)=h(x)g(x)$라 하면

$Q(x)$가 $x=2$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to2}\frac{Q(x)-Q(2)}{x-2}$이 존재하여야 한다.

$$\lim_{x\to2+}\frac{Q(x)-Q(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{h(x)\times(-x)-h(2)\times1}{x-2}$$

에서 분모의 극한값이 0이므로

분자의 극한값 $-3h(2)=0$이다.

따라서, $h(2)=0$

우미분계수는

$$\lim_{x\to2+}\frac{Q(x)-Q(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{h(x)\times(-x)-h(2)\times1}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{\{h(x)-h(2)\}\times(-x)}{x-2}$$
$$=-2h'(2)$$
$$\lim_{x\to2-}\frac{Q(x)-Q(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{h(x)\times1-h(2)\times1}{x-2}$$
$$=h'(2)$$

에서 $-2h'(2)=h'(2)$이므로 $h'(2)=0$이다.

$h'(2)=0$, $h(2)=0$이면 $h(x)g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

따라서 다항식 $h(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 갖는다.

44) 정답 2

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

함수 $f(x)$는 다항함수이므로 조건 (가)에서

$f(x)-kx^4=-4kx^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓을 수 있다.

$f(x)=kx^4-4kx^3+ax^2+bx+c$

$f'(x)=4kx^3-12kx^2+2ax+b$이므로

(나) $f'(0)=0 ⇨ b=0$이다.

따라서 $f'(x)=4kx^3-12kx^2+2ax$

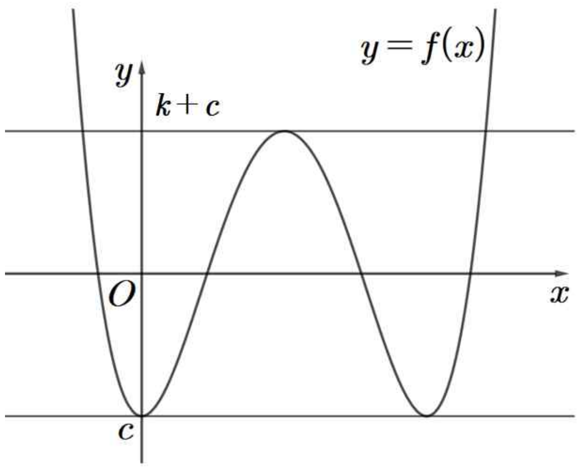
$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x^2+2x}=\lim_{x\to0}\frac{x(4kx^2-12kx+2a)}{x(x+2)}=\frac{2a}{2}=4k$$

$\therefore\ a=4k$

따라서 $f(x)=kx^4-4kx^3+4kx^2+c$이고

$f(0)=f(2)=c$, $f(1)=k+c$

$f(x)$의 극댓값이 양수이므로 그래프 개형은 다음 그림과 같다.



따라서 $|f(x)|=1$의 서로 다른 실근의 개수가 5개이기 위해서는 $y=f(x)$와 $y=1$ 또는 $y=-1$의 교점이 개수의 합이 5개이면 된다.

따라서 $c=-1$이다.

$c+k=1$에서 $k=2$

45) 정답 ③

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$xg(x)=f(x)+x^2$의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$

$xg(x)=f(x)+x^2$의 양변을 미분하면

$g(x)+xg'(x)=f'(x)+2x\cdots$㉠이고 양변에 $x=0$을 대입하면

$g(0)+0\times g'(0)=f'(0)$

따라서 $g(0)=f'(0)$ (ㄱ,참)

㉠의 양변에 x을 곱하면

$xg(x)+x^2g'(x)=xf'(x)+2x^2$이고 $xg(x)=f(x)+x^2$이므로

$x^2g'(x)=xf'(x)+2x^2-f(x)-x^2$
$=xf'(x)-f(x)+x^2$

양변에 $x=1$을 대입하면

$g'(1)=f'(1)-f(1)+1=1$

따라서 $g'(1)=1$ (ㄴ.거짓)

$x\neq0$일 때, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}+x$에서

$\displaystyle\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{x}+x\right)$이고

$f(0)=0$이므로 $g(0)=f'(0)$이다,

그러므로 $g(0)=\displaystyle\lim_{x\to0}g(x)=f'(0)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다. (ㄷ.참)

46) 정답 ②

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

(가)에서 함수 $f(x)$는 $(a, 0)$에 대칭이다.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{3a} f(x)dx = 0$$

$$\int_{-3a}^{-a} f(x)dx = 4,\ \int_{-a}^{4a} f(x)dx = -2 \text{에서}$$

$$\int_{-3a}^{4a} f(x)dx = 2 \text{이므로 } \int_{-3a}^{-2a} f(x)dx = 2$$

$$\int_{4a}^{5a} f(x)dx = -2 \text{이다.}$$

따라서

$$\int_{-2a}^{5a} f(x)dx = \int_{-2a}^{4a} f(x)dx + \int_{4a}^{5a} f(x)dx$$

$$= 0 + (-2) = -2$$

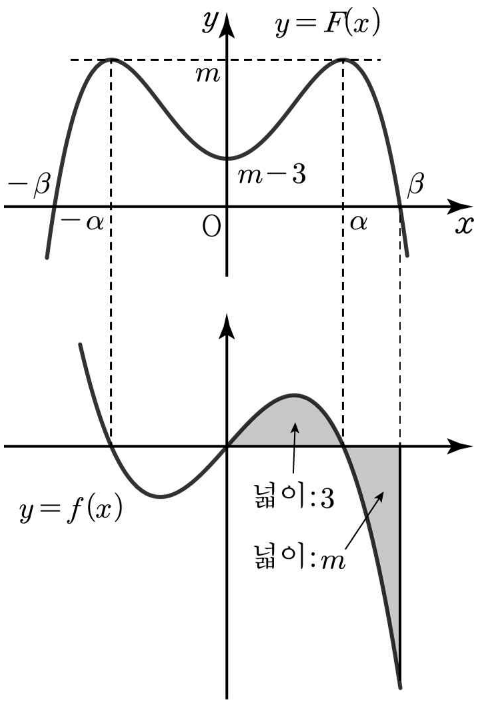
47) 정답 5

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

[그림 : 이정배T]

(가)에서 $F(x) = a(x+\alpha)^2(x-\alpha)^2 + m \ (a<0)$꼴임을 알 수 있다.

따라서 함수 $F(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.



$F(-\alpha) = F(\alpha) = m$, $F(0) = m-3$, $F(\beta) = 0$이므로

$$\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx = [F(x)]_{-\alpha}^{0} = F(0) - F(-\alpha) =$$

$$(m-3) - m = -3$$

$$\int_{0}^{\alpha} f(x)dx = [F(x)]_{0}^{\alpha} = F(\alpha) - F(0) = m - (m-3) = 3$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = [F(x)]_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha) = 0 - m = -m$$

$$\int_{-\beta}^{\beta} |f(x)|dx$$

$$= 2\left\{\int_{0}^{\alpha} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right\}$$

$$= 2(3+m) = 16$$

$$\therefore\ m = 5$$

48) 정답 ①

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

[그림 : 이정배T]

정적분 $\int_{0}^{3} \{f(x) - x^2 + 2x\}^2 dx$의 값이 최소가 되기 위해서는 $0 \le x \le 3$에서

$f(x) - x^2 + 2x = 0$이면 된다.

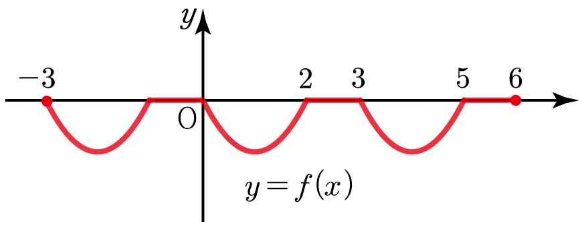
즉, $f(x) = x^2 - 2x$이다.

그런데 $2 < x \le 3$ 일 때 함수 $x^2 - 2x > 0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \le 0$이라는 조건에 모순이다.

따라서 $0 \le x \le 3$의 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & (0 \le x \le 2) \\ 0 & (2 < x \le 3) \end{cases} \text{이고}$$

$f(x) = f(x+3)$에서 구간의 길이가 3인 함수가 반복되므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서

$$\int_{-3}^{6} f(x)dx$$

$$= 3\int_{0}^{3} f(x)dx$$

$$=3\left\{\int_0^2 (x^2-2x)dx+\int_2^3 0\,dx\right\}$$

$$=3\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2$$

$$=3\left(\frac{8}{3}-4\right)=-4$$

49) 정답 ①

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$$\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3=\int_0^x \{(x-t)f(t)\}^2 dt$$

$$=\int_0^x (x-t)^2\{f(t)\}^2 dx$$

$$=x^2\int_0^x \{f(t)\}^2 dt-2x\int_0^x t\{f(t)\}^2 dt+\int_0^x t^2\{f(t)\}^2 dt$$

에서 양변 미분하면

x^3-x^2

$$=2x\int_0^x \{f(t)\}^2 dt+x^2\{f(x)\}^2$$

$$-2\int_0^x t\{f(t)\}^2 dt-2x^2\{f(x)\}^2+x^2\{f(x)\}^2$$

정리하면

$x^3-x^2=2x\int_0^x \{f(t)\}^2 dt-2\int_0^x t\{f(t)\}^2 dt$이다.

양변 미분하면

$$3x^2-2x=2\int_0^x \{f(t)\}^2 dt+2x\{f(x)\}^2-2x\{f(x)\}^2$$

$$3x^2-2x=2\int_0^x \{f(t)\}^2 dt$$

양변을 미분하면

$6x-2=2\{f(x)\}^2$

$\therefore\ \{f(x)\}^2=3x-1$

$x\geq\frac{1}{3}$에서 $f(x)\geq 0$이므로

$f(x)=\sqrt{3x-1}$이다.

$f(5)=\sqrt{14}$

50) 정답 ②

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$\int_{-1}^1 \{f(t)+g(t)\}dt=C_1,\ \int_{-1}^1 \{f(t)-g(t)\}dt=C_2$라

하면 주어진 조건에 의해서

$f(x)=3x^2+C_1,\ g(x)=-2x+C_2$

$f(x)+g(x)=3x^2-2x+C_1+C_2$이므로

$$\int_{-1}^1 \{f(t)+g(t)\}dt$$

$$=\int_{-1}^1 \{3t^2-2t+C_1+C_2\}dt$$

$$=2\left[t^3+(C_1+C_2)t\right]_0^1=2+2C_1+2C_2=C_1$$

$\therefore\ C_1+2C_2=-2\cdots$㉠

$f(x)-g(x)=3x^2+2x+C_1-C_2$이므로

$$\int_{-1}^1 \{f(t)-g(t)\}dt$$

$$=\int_{-1}^1 \{3t^2-2t+C_1-C_2\}dt$$

$$=2\left[t^3+(C_1-C_2)t\right]_0^1$$

$$=2+2(C_1-C_2)=C_2$$

$\therefore\ 2C_1-3C_2=-2\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $C_1=-\frac{10}{7},\ C_2=-\frac{2}{7}$

$\therefore\ f(x)=3x^2-\frac{10}{7},\ g(x)=-2x-\frac{2}{7}$

$f(1)+2g(1)$

$$=3-\frac{10}{7}-4-\frac{4}{7}=-3$$

51) 정답 201

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$S_n=\sum_{k=1}^n a_k$이라 할 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$이고

$S_n=\int_0^n f(x)dx$이므로

$$a_n=\int_0^n f(x)dx-\int_0^{n-1} f(x)dx$$

$$=\int_{n-1}^n f(x)dx$$

$= \left[F(x)\right]_{n-1}^{n}$

$= F(n) - F(n-1)$

$= \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

$= \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ 이다.

따라서

$\displaystyle\sum_{n=1}^{100} a_n$

$= \displaystyle\sum_{n=1}^{100}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$

$= 1 - \dfrac{1}{101}$

$= \dfrac{101-1}{101} = \dfrac{100}{101}$

$p = 101,\ q = 100$

$\therefore p + q = 201$

52) 정답 4

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f'(t)dt$

$= \displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\Big[\ f(t)\ \Big]_a^x$

$= \displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = 32a$

$f(x) = \displaystyle\int_{-a}^{x} g(t)dt$에서 $f'(x) = g(x)$이므로

$f'(a) = g(a)$

$g(a) = \displaystyle\int_{-a}^{a}(t^3 + 3t^2 - 2t)dt$

$\quad = 2\displaystyle\int_0^a 3t^2\,dt$

$\quad = 2\left[t^3\right]_0^a = 2\{a^3\} = 2a^3$

따라서 $2a^3 = 32a$가 성립한다.

$a^2 = 16$

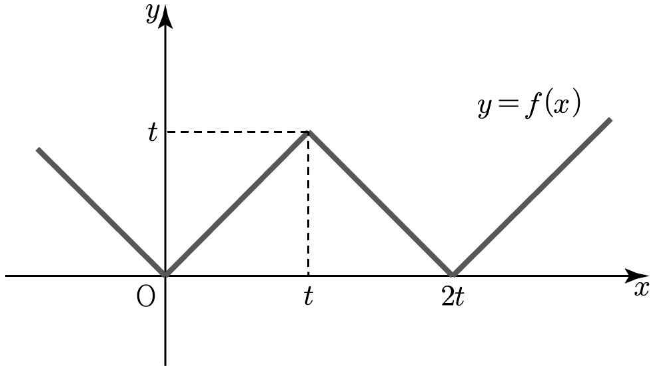
$a = 4\ (\because a > 0)$

53) 정답 5

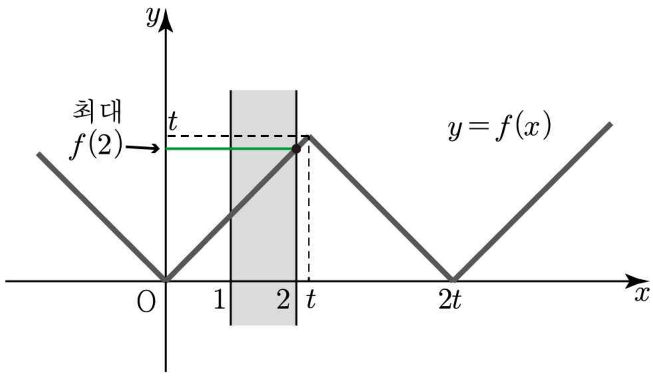
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

[그림 : 최성훈T]

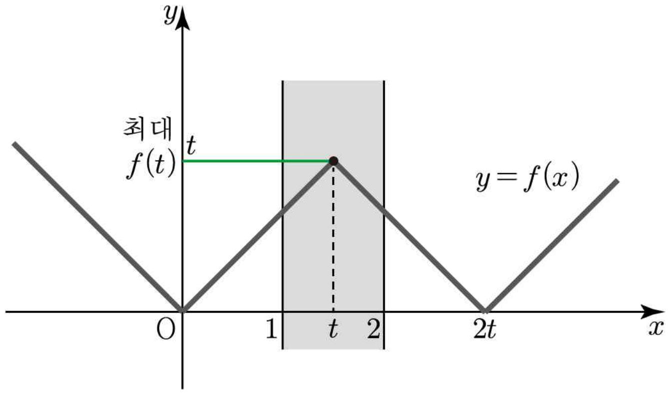
함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



(i) $t \geq 2$일 때, $M(t) = |f(2)| = |-2+t-t| = 2$



(ii) $1 \leq t < 2$일 때, $M(t) = f(t) = |-t| = t$



한편, $0 \leq t < 1$일 때, $f(1) = f(2)$인 t값을 구해보면

$||1-t|-t| = ||2-t|-t|$

$|1-2t| = |2-2t|$

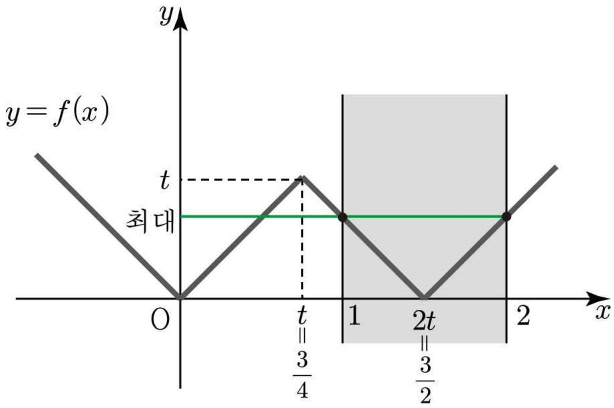
$\dfrac{1}{2} \leq t < 1$일 때, $-1+2t = 2-2t$에서 $t = \dfrac{3}{4}$

$0 \leq t < \dfrac{1}{2}$일 때, $1-2t = 2-2t$에서 모순

그러므로 $0 \leq t < 1$일 때, $f(1) = f(2)$인 t는 $t = \dfrac{3}{4}$

이다.

따라서



(iii) $\frac{3}{4} \le t < 1$일 때, $M(t)=f(1)=||1-t|-t|$

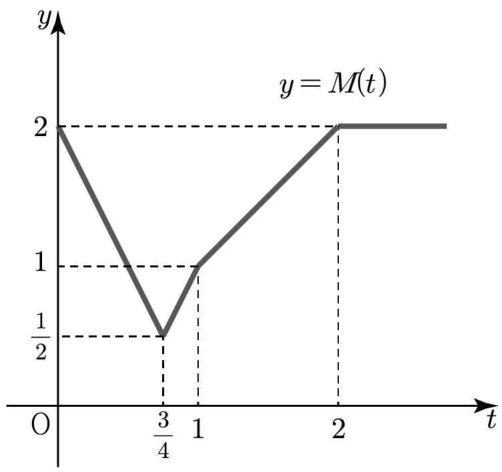
$=|1-2t|=2t-1$

(iv) $0 \le t < \frac{3}{4}$일 때,

$M(t)=f(2)=||2-t|-t|=|2-2t|=-2t+2$

(i)~(iv)에서 $y=M(t)$와 그 그래프는 다음 그림과 같다.

$$M(t)=\begin{cases} -2t+2 & \left(0 \le t < \frac{3}{4}\right) \\ 2t-1 & \left(\frac{3}{4} \le t < 1\right) \\ t & (1 \le t < 2) \\ 2 & (2 \le t) \end{cases}$$



따라서 $M(t)$의 최댓값은 2이고 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

$2(M+m)=2\left(2+\frac{1}{2}\right)=5$

확률과 통계

54) 정답 ①

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

[그림 : 이현일T]

함수 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x)=\begin{cases} f(x)+(x-a)f'(x) & (x \ge a) \\ k\int_a^x f'(t)dt+k(x-a)f'(x) & (x > a) \end{cases}$$

이다.

$g'(a)=\lim_{x\to a+} g'(x)=\lim_{x\to a-} g'(x)$에서 $f(a)=0$

따라서 최고차항의 계수가 1인 이차함수

$f(x)=(x-a)(x+b)$꼴임을 알 수 있다.

$g(2a)=af(2a)=a\times a(2a+b)=2a^3$이므로

$2a+b=2a$에서

$b=0$이다.

$\therefore\ f(x)=x(x-a)$

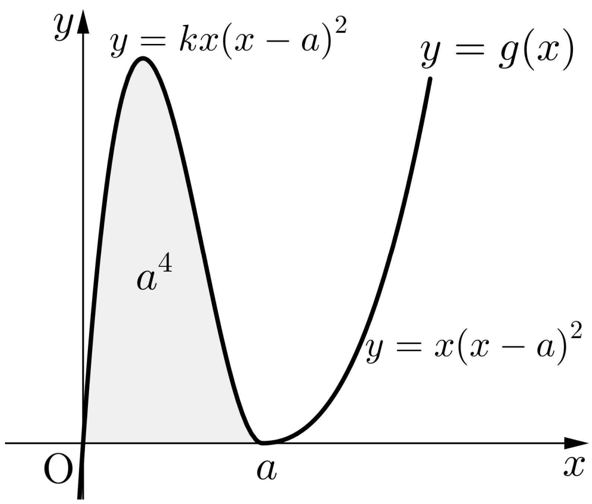
따라서 1이 아닌 상수 k에 대하여

$$g(x)=\begin{cases} x(x-a)^2 & (x \ge a) \\ k(x-a)[f(t)]_a^x & (x < a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x)=\begin{cases} x(x-a)^2 & (x \ge a) \\ kx(x-a)^2 & (x < a) \end{cases}$$

따라서

$y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는



$$\int_0^a kx(x-a)^2\,dx = k\frac{2!\times 1!}{(2+1+1)!}(a-0)^{2+1+1}$$

$=\frac{k}{12}a^4$이다.

[랑데뷰 세미나(96) 참고]

따라서 $\frac{k}{12}a^4=a^4$

$\therefore\ k=12$

55) 정답 ②

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

원점을 지나는 직선이 함수 $f(x)$와 한 점에서 만날 때, 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하자.

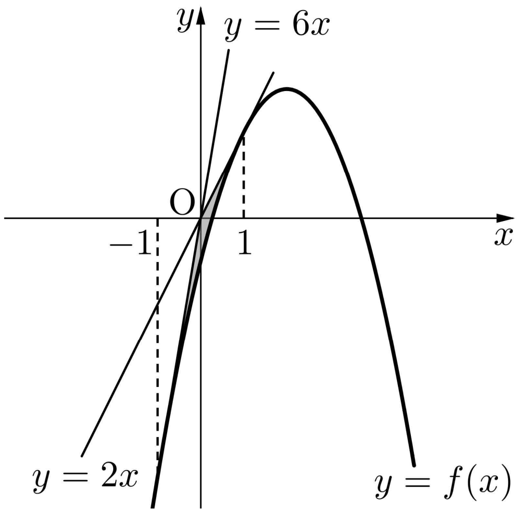
$\frac{f(t)}{t}=f'(t)$이므로

$\frac{-t^2+4t-1}{t}=-2t+4$

$-t^2+4t-1=-2t^2+4t$

$t^2=1$

$t=\pm 1$이다.



따라서 두 접점의 좌표는 $(-1,\ -6)$, $(1,\ 2)$이다.

직선 l_1의 방정식을 $y=6x$라 하고 직선 l_2의 방정식을 $y=2x$라 하면

구하려는 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^{0}(6x+x^2-4x+1)dx+\int_{0}^{1}(2x+x^2-4x+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{3}-1+1+\frac{1}{3}-1+1$$

$$=\frac{2}{3}$$

56) 정답 4

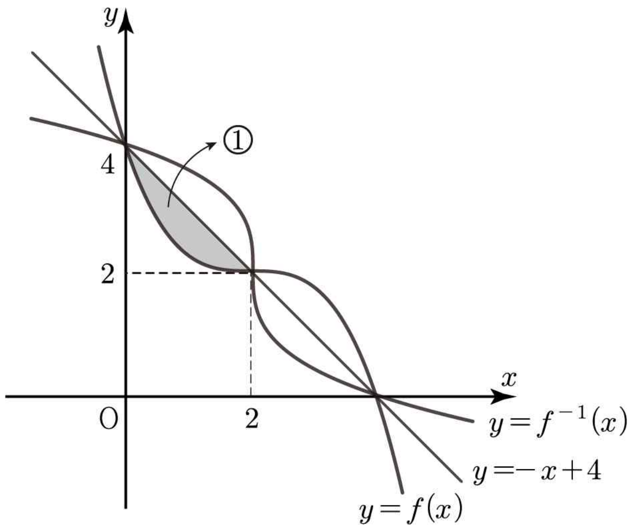
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

[그림 : 이정배T]

$f(x)=-\frac{1}{4}(x-2)^3+2$은 $(2,\ 2)$에 대칭이고 $(0,\ 4)$, $(4,\ 0)$을 지난다.

따라서 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $(2,\ 2)$, $(0,\ 4)$, $(4,\ 0)$을 지난다.

그림과 같이 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $y=-x+4$에 의해 넓이가 이등분된다. 또한 $y=x$에 의해 이등분 되므로 구하려는 넓이는 그림의 ①의 넓이의 4배가 된다.



(①의 넓이)

$$=\int_{0}^{2}\{(-x+4)-f(x)\}dx$$

$$=\int_{0}^{2}\left\{\frac{1}{4}(x-2)^2-x+2\right\}dx$$

$$=1$$

따라서 구하는 넓이는 $1\times 4=4$이다.

57) 정답 ④

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

[그림 : 이현일T]

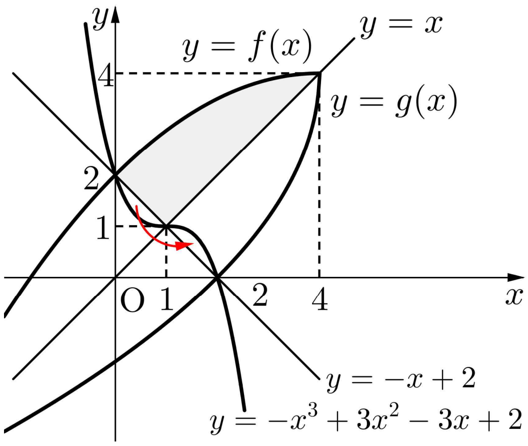
[랑데뷰 N제 수학II 쉬사준킬 168번 변형]

함수 $f(x)$는 $x\le 4$에서 $(4,\ 4)$ $(0,\ 2)$을 지나므로 함수 $g(x)$는 $(4,\ 4)$, $(2,\ 0)$을 지난다.

$y=-x^3+3x^2-3x+2=-(x-1)^3+1$

에서 곡선 $y=-(x-1)^3+1$은 $(1, 1)$에 대칭이고 $(0, 2)$와 $(2, 0)$을 지난다.

따라서 구하려는 도형의 넓이는 다음 그림과 같이 $y=f(x)$와 $y=x$, 그리고 $y=-x+2$에 의해 넓이가 이등분된다. 즉, 그림의 색칠된 부분의 넓이의 두 배이다.



따라서

$$2\left\{\int_0^4\{f(x)-x\}dx-1\right\}$$

$$=2\int_0^4\left(-\frac{1}{8}x^2+2\right)dx-2$$

$$=2\left[-\frac{1}{24}x^3+2x\right]_0^4-2$$

$$=\frac{32}{3}-2=\frac{26}{3}$$

58) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

점 P가 출발한 후 움직이는 방향이 바뀌지 않기 위해서는 방정식 $v(t)=0$의 해가 없거나 중근만 존재할 때이다. 즉, $t \geq 0$인 모든 t에 대하여 $v(t) \geq 0$이다.

$y=t^3(t-4)=t^4-4t^3$

$y'=4t^3-12t^2=4t^2(t-3)$

$t=3$일 때, 극솟값이자 최솟값을 갖는다.

따라서 $v(3)=-27+k \geq 0$

$k \geq 27$

k의 최솟값이 27이므로 $v(t)=t^3(t-4)+27$, 점 P가 속도가 최소가 되는 시간은 $t=3$이므로

구하려는 값은

$$\int_0^3|v(t)|dt$$

$$=\int_0^3(t^4-4t^3+27)dt$$

$$=\left[\frac{1}{5}t^5-t^4+27t\right]_0^3$$

$$=\frac{243}{5}-81+81$$

$$=\frac{243}{5}$$

이다.

59) 정답 ③

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$a(t)=12t^2-18t-2$ 을 적분하면 속도 $v(t)$이고 시각 $t=0$일 때 속도를 k이라 하면

$v(t)=4t^3-9t^2-2t+k$이다.

시각 $t=3$에서 점 P의 위치가 원점이기 위해서는 처음 위치가 0이므로 $\int_0^3 v(t)dt=0$이다.

$$\int_0^3(4t^3-9t^2-2t+k)dt$$

$$=\left[t^4-3t^3-t^2+kt\right]_0^3$$

$$=81-81-9+3k=0$$

에서 $k=3$이다.

따라서 점 P의 위치를 $s(t)$라 하면

$s(t)=t^4-3t^3-t^2+3t$이다.

$s(4)=256-192-16+12=60$

60) 정답 ①

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$h(x)=f(x)-g(x)$라 두면

(i) 함수 $h(x)$는 삼차함수일 때

① $y=h(x)$의 최고차항의 계수가 양수 a이면 x축으로 둘러싸인 부분의 정적분 값이 양수 $\frac{4}{3}k^4$이므로

$h(x)=a(x+k)(x-k)^2$ $(a>0)$이다.

$\int_{-k}^{k}\{f(x)-g(x)\}dx$

$=\int_{-k}^{k}h(x)\,dx$

$=a\int_{-k}^{k}(x+k)(x-k)^2\,dx$

$=a\times\frac{\{k-(-k)\}^4}{12}=\frac{4}{3}ak^4=\frac{4}{3}k^4$

따라서 $a=1$

그러므로 $h(x)=(x+k)(x-k)^2$

② $y=h(x)$의 최고차항의 계수가 음수 a이면 x축으로 둘러싸인 부분의 정적분 값이 양수 $\frac{4}{3}k^4$이므로

$h(x)=a(x+k)^2(x-k)$ $(a<0)$이다.

$\int_{-k}^{k}\{f(x)+g(x)\}dx$

$=\int_{-k}^{k}h(x)\,dx$

$=a\int_{-k}^{k}(x+k)^2(x-k)\,dx$

$=|a|\times\frac{\{k-(-k)\}^4}{12}=-\frac{4}{3}ak^4=\frac{4}{3}k^4$

따라서 $a=-1$

그러므로 $h(x)=-(x+k)^2(x-k)$

(ii) 함수 $h(x)$는 이차함수일 때

$y=h(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 정적분 값이 양수 $\frac{4}{3}k^4$이므로

$h(x)=b(x+k)(x-k)$ $(b<0)$이다.

$\int_{-k}^{k}\{f(x)+g(x)\}dx=\int_{-k}^{k}h(x)\,dx$

$=b\int_{-k}^{k}(x+k)(x-k)\,dx$

$=-b\times\frac{\{k-(-k)\}^3}{6}=-\frac{4}{3}bk^3=\frac{4}{3}k^4$

따라서 $b=-k$

그러므로 $h(x)=-k(x+k)(x-k)$

(i), (ii)에서 $h(k)=f(k)-g(k)$이므로

$h(x)=(x+k)(x-k)^2 \Rightarrow h(k+1)=2k+1$

$h(x)=-(x+k)^2(x-k) \Rightarrow h(k+1)=-(2k+1)^2$

$h(x)=-k(x+k)(x-k) \Rightarrow h(k+1)=-k(2k+1)$

이다.

따라서

$(2k+1)-(2k+1)^2-k(2k+1)$

$=(2k+1)\{1-2k-1-k\}$

$=-3k(2k+1)=-9$

$k(2k+1)=3$

$2k^2+k-3=0$

$(k-1)(2k+3)$

$k=1$ 또는 $-\frac{3}{2}$

$k>0$이므로 $k=1$이다.

61) 정답 6

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$f(x)=x^3-6x^2+9x+k$

$f'(x)=3x^2-12x+9$, $3(x-1)(x-3)=0$

$x=1$에서 극댓값, $x=3$에서 극솟값을 갖고

$f'(x)=3x^2-12x+9=9$

$3x(x-4)=0$에서 점 A, B의 x좌표는 0, 4이다.

$f(0)=k$,

$f(1)=1-6+9+k=k+4$,

$f(3)=27-54+27+k=k$,

$f(4)=64-96+36+k=k+4$

곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 두 직선은 $y=k$, $y=k+4$이다.

정리하면

$A(0,k)$, $B(4,k+4)$, 극대점$(1,k+4)$, 극소점$(3,k)$이다.

따라서

직선 l의 방정식은 $y=9x+k$

직선 m의 방정식은 $y=9(x-4)+k+4=9x+k-32$

두 직선 l, m과 $y=k+4$, $y=k$로 둘러싸인 평행사변형의 넓이 k는

가로의 길이가 4 $(\because 4-0=4)$, 세로의 길이가 4 $(\because k+4-k=4)$인

정사각형의 넓이에서 y축, $y=k+4$, 직선 l으로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배를 제외하면 된다.

$y=9x+k$와 $y=k+4$의 교점은 $\left(\frac{4}{9},\ k+4\right)$이므로

$k=4\times4-2\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}\times4=16-\frac{16}{9}=\frac{128}{9}$

$\frac{64}{9}k=\frac{128}{9}$

따라서 $k=2$

$f(x)=x^3-6x^2+9x+2$

$f(1)=1-6+9+2=6$

[다른 풀이]-김은수T

두 직선 l, m과 $y=k+4, y=k$로 둘러싸인 평행사변형의 넓이는

가로×세로로 구해보자.

l과 $y=k+4$ 과의 교점은 $\left(\frac{4}{9}, k+4\right)$이고

따라서 가로는 $4-\frac{4}{9}=\frac{32}{9}$이다.

세로는 $(k+4)-k=4$이고 따라서 평행사변형의 넓이는

$\frac{32}{9}\times4=\frac{128}{9}$이다.

따라서 $k=2$이다.

62) 정답 ④

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$f'(x)=3x^2+k>0$ 이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

$f'(x)=3x^2+k=4k$

$3x^2=3k$에서 점 A, B의 x좌표는 $-\sqrt{k}$, $\sqrt{k}$이다.

따라서 $f(0)=k$,

$\therefore\ f(-\sqrt{k})=-2k\sqrt{k}+k$

$\therefore\ f(\sqrt{k})=2k\sqrt{k}+k$ 이다.

따라서 접점의 좌표는

점 $\mathrm{A}(-\sqrt{k},\ -2k\sqrt{k}+k)$, $\mathrm{B}(\sqrt{k},\ 2k\sqrt{k}+k)$이다.

따라서 접선 l, m은 다음과 같다.

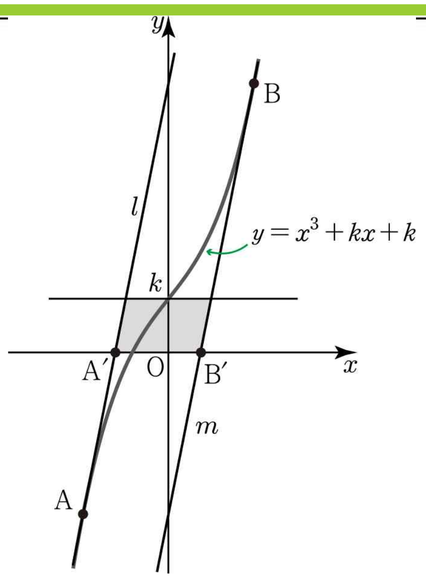
$l : y=4kx+2k\sqrt{k}+k$

$m : y=4kx-2k\sqrt{k}+k$

l, m의 x절편을 A', B'라 하면

$\mathrm{A}'\left(-\frac{\sqrt{k}}{2}-\frac{1}{4},\ 0\right)$, $\mathrm{B}'\left(\frac{\sqrt{k}}{2}-\frac{1}{4},\ 0\right)$

사각형은 다음 그림과 같이 평행사변형이다.



따라서 넓이는 $\overline{\mathrm{A'B'}}\times k=8$이다.

$\overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{k}$ 이므로 $k^{\frac{3}{2}}=8$에서 $k=4$

63) 정답 ④

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$\int_0^2 f(x)\,dx=a$로 놓으면 $f(x)=\frac{15}{8}x^2+2ax-a^2$

따라서

$a=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(\frac{15}{8}x^2+2ax-a^2\right)dx$

$=\left[\frac{5}{8}x^3+ax^2-a^2x\right]_0^2=5+4a-2a^2$

$\therefore\ 2a^2-3a-5=0$에서 $\int_0^2 f(x)\,dx$로 가능한 값의 합은 $\frac{3}{2}$이다.

64) 정답 ②

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

$f(x)=x^2$에서

$y=-f(x-1)+3=-(x-1)^2+3$

$=-x^2+2x+2$

이므로 $x^2=-x^2+2x+2$

$2x^2-2x-2=0$에서 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$에서

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1+4=5$

따라서 $(\alpha-\beta)^3=5\sqrt{5}$

넓이는 $\dfrac{2\times5\sqrt{5}}{6}=\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$

[랑데뷰팁]

두 이차함수 $y=ax^2+bx+c$와 $y=a'x^2+b'x+c'$의 교점의 x좌표를 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ 라고 하면 두 이차함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이

$$S=\frac{|a-a'|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

65) 정답 147

$$0<\int_0^3\{xf(x)\}'dx<6$$

$\rightarrow\ 0<\Big[\ xf(x)\ \Big]_0^3<6\ \rightarrow\ 0<3f(3)<6$

$\rightarrow\ 0<f(3)<2$

따라서 다항함수 $f(x)$는 다음과 같이 세 가지로 생각할 수 있다.

(i) $f(x)=ax(x-2)\ \ (a\neq0)$

$$\int_0^3 f(x)dx=a\int_0^3(x^2-2x)dx$$
$$=a\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^3=0$$

이므로 모순

(ii) $f(x)=ax^2(x-2)\ \ (a\neq0)$

$$\int_0^3 f(x)dx=a\int_0^3(x^3-2x^2)dx$$
$$=a\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right]_0^3$$
$$=\frac{9}{4}a=\frac{3}{4}$$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{3}$

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^2(x-2)$에서 $f(3)=3$으로 $0<f(3)<2$을 만족하지 못하므로 모순

(iii) $f(x)=ax(x-2)^2\ \ (a\neq0)$

$$\int_0^3 f(x)dx=a\int_0^3(x^3-4x^2+4x)dx$$
$$=a\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_0^3$$
$$=\left(\frac{81}{4}-36+18\right)a=\frac{9}{4}a=\frac{3}{4}$$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{3}$

$f(x)=\dfrac{1}{3}x(x-2)^2$에서 $f(3)=1$으로 $0<f(3)<2$을 만족한다.

따라서 $f(9)=3\times49=147$

66) 정답 8

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

함수 $f(x)$는 이차함수이고 조건 (가)에서

$\displaystyle\int_0^{a-t}f(x)\,dx=\int_t^a f(x)\,dx$ 이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\dfrac{a}{2}$에 대하여 대칭이다. (∵ 좌변과 우변의 적분 구간의 길이가 $a-t$로 같고 그 정적분 값도 같으므로 이차함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=a$의 중점인 $x=\dfrac{a}{2}$에 대칭인 함수이다.)

조건 (나)에서 $0<\displaystyle\int_1^{\frac{a}{2}}|f(x)|dx$ 이므로 $\dfrac{a}{2}>1$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 점 $(k,\ 0)$, $(a-k,\ 0)$에서 만난다.

따라서 $\displaystyle\int_1^{a-k}f(x)=\alpha,\quad \int_{a-k}^{\frac{a}{2}}f(x)dx=\beta$라 두면

$\alpha<0,\ \beta>0$이다. (∵ 이차항의 계수가 음수)

(나)에서

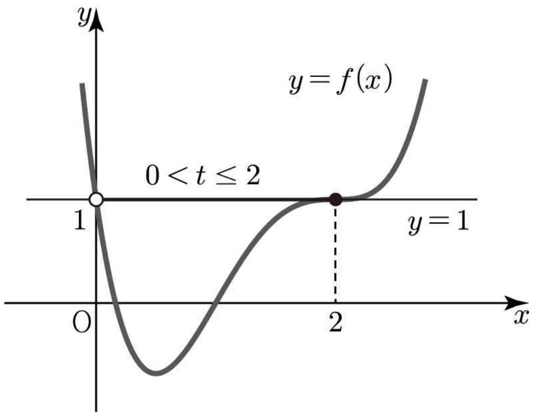
$\alpha+\beta=3,\ -\alpha+\beta=7$이므로 $\alpha=-2,\ \beta=5$

따라서

$$\int_1^k f(x)\,dx=\int_1^{a-k}f(x)dx+\int_{a-k}^{\frac{a}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{a}{2}}^k f(x)dx$$
$$=\alpha+\beta+\beta=-2+5+5=8$$

67) 정답 4
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]
[그림 : 최성훈T]

$f(a)=f'(a)(a-t)+1 \Rightarrow 1=f'(a)(t-a)+f(a)$
이 식은 $y=f(x)$위의 점 $(a, f(a))$에서 접선의 방정식 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$에 $(t, 1)$을 대입한 식이므로 사차함수 $f(x)$의 접선이 $(t, 1)$을 지나는 접점이 $(2, f(2))$로 하나뿐인 경우이다.
따라서 등식 $1=f'(2)(t-2)+f(2)$이 $0<t \le k$의 t에 대해 항상 성립하기 위해서는
$f'(2)=0, f(2)=1$이고 사차함수 $f(x)$의 아래로 볼록 안쪽 부분에 t가 존재해야 한다.
따라서 $f(0)=1$, $k=2$이다.
$\therefore$ $f(x)=x(x-2)^3+1$



따라서
$f(k+1)=f(3)=4$

68) 정답 640
$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$의 양변에 $x=a$을 대입하면
$g(a)=0$
(가)에서 $g(-2a)=0$이므로 $x=-2a$을 대입하면
$\int_a^{-2a} f(t)dt=0$
(나)에서 $\int_a^x f(t)\,dt \ge 0$이고
$\int_a^{-2a} f(t)dt=0$이므로 삼차함수 $f(x)$는 $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$에 대칭인 그래프다.
$g(x)=(x+2a)^2(x-a)^2$ 라 두면 $g'(x)=f(x)$이므로
$f(x)=(x+2a)\left(x+\frac{a}{2}\right)(x-a)$ 이다.
$f(-a)=a\times\left(-\frac{a}{2}\right)\times(-2a)=a^4=64$
$\therefore$ $a=4$
그러므로 $f(x)=(x+8)(x+2)(x-4)$이다.
$f(2a)=f(8)=16\times 10\times 4=640$

69) 정답 ④
조건 (가)에 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$4x^2f(x)=3x^2f(x)+3x^2f(0)+x^3f'(x)$
$4f(x)=3f(x)+3f(0)+xf'(x)$
즉, $f(x)=3f(0)+xf'(x)$ $\cdots$㉠
㉠의 좌변인 $f(x)$의 최고차항을 ax^n (a는 0이 아닌 상수, n은 자연수)
라 하면 ㉠의 우변의 최고차항은
$x\times anx^{n-1}=anx^n$
이므로 $ax^n=anx^n$에서 $n=1$이므로 $f(x)$는 일차함수이다.
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$이므로
$f(x)=ax$ 로 놓을 수 있다.
이때
$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 ax\,dx=\left[\frac{a}{2}x^2\right]_0^1=\frac{a}{2}=1$
따라서 $a=2$이다.
$f(x)=2x$
$\therefore$ $f(2)=4$

70) 정답 56
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

(나)의 양변에 $x=-2$을 대입하면
$\int_{-2}^{2} f(t)dt=-2a+4$이다.
(가)에 $\int_{-2}^{2} f(t)dt=0$이므로 $-2a+4=0$에서 $a=2$ 이다.
따라서 $\int_x^{x+4} f(t)dt=2x+4$에서

$\int_{-5a}^{9a} f(x)dx$

$= \int_{-10}^{18} f(x)dx$

$= \int_{-10}^{10} f(x)dx + \int_{10}^{18} f(x)dx$

$= \int_{10}^{18} f(x)dx$

$= \int_{10}^{14} f(x)dx + \int_{14}^{18} f(x)dx$

$= 24 + 32$

$= 56$

71) 정답 14

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

삼차함수 비율관계와 정적분으로 주어진 함수의 그래프 개형을 추론 하면

[랑데뷰 세미나(173) 참고]

이차함수 $f(x)=-3x(x-2a)$ $(a>0)$라 할 수 있다.

삼차함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 -1이고 $x=0$에서 중근을 갖는다.

$x=2a$에서 극댓값 $\frac{1}{2}$을 가지며 함수 $g(x)$와 x축과의 0이 아닌 교점은 $3a$

[랑데뷰 세미나(92),(93) 참고 비율 ⇨ 2:1]

따라서 $g(x)=-x^2(x-3a)$이다.

$g(2a)=-4a^2\times(-a)=4a^3=\frac{1}{2}$에서

$a^3=\frac{1}{8}$

$a=\frac{1}{2}$이다.

따라서 $g(x)=-x^2\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$g(-2)=-4\times\left(-\frac{7}{2}\right)=14$

72) 정답 2

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

조건에서 사차함수 $f(x)$는 $f(x)=x^2(x^2-t^2)$ $(t>0)$ 꼴이다.

$g(x)=\int_k^x f(s)ds$에서 양변 미분하면

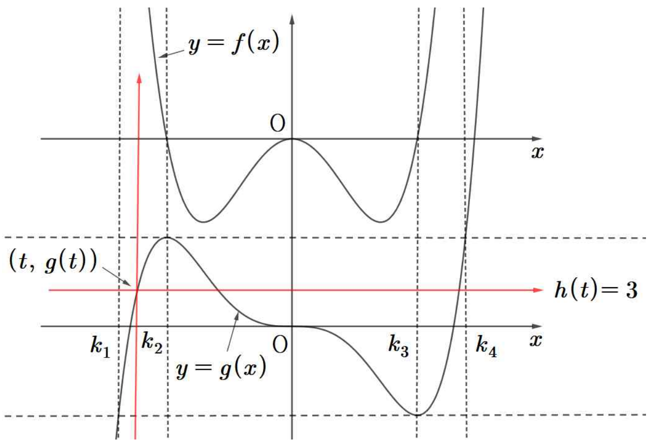
$g'(x)=f(x)$이고 $g'(x)=0$의 해는 $x=-t$, $x=0$, $x=t$이다.

함수 $g(x)$는 극댓값 $g(-t)$, 극솟값 $g(t)$를 갖는다.

$g(x)=\int_k^x f(s)ds$의 양변에 $x=k$를 대입하면

$g(k)=0$이므로 다음 그림과 같이 $y=g(x)$ 그래프 개형에서 점 $(k, g(k))$가 원점인 좌표평면을 생각할 수 있다.

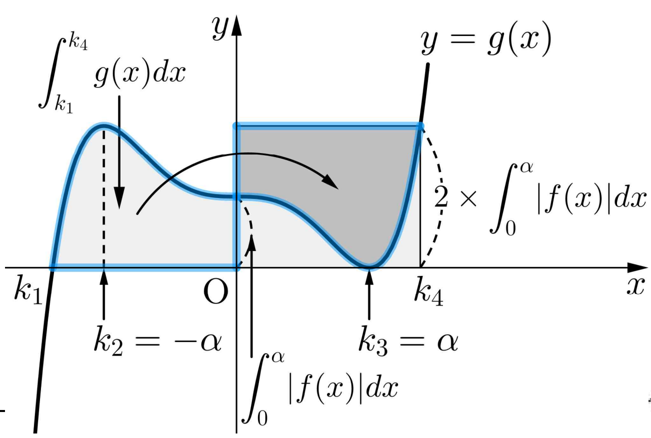
[그래프 개형 파악하기⇨ 랑데뷰(173) 참조]



곡선 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 k의 값은 k_1, k_2, k_3, k_4로 $k_m=k_4$이다.

$k=k_1$일 때, 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 가지므로 $t=\alpha=k_3$이다.

곡선 $y=g(x)$그래프는 다음 그림과 같다.



따라서

$$\int_{k_1}^{k_m} g(x)dx = \int_{k_1}^{k_4} g(x)dx = 2 \times k_m \times \int_0^{\alpha} |f(x)|dx$$

$$\frac{\int_{k_1}^{k_m} g(x)dx}{k_m \times \int_0^{\alpha} |f(x)|dx} = 2$$

73) 정답 24

[풀이 작성 : 유승희T]

삼차함수 $f(x)$의 그래프는 조건 (가)에서 점 $(1, 0)$에 대하여 대칭인 모양임을 알 수 있다.

또한, $g(x) = \int_a^x f(t)dt$에서 $g'(x) = f(x)$이므로

사차함수 $g(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭인 함수이다.

조건 (나)를 고려하면 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로

곡선 $y=g(x)$의 개형은 다음과 같은 경우가 있다.

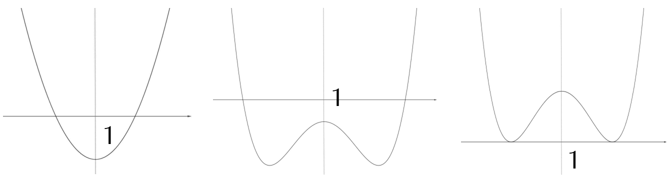


그림1 그림2 그림3

$\lim_{t\to1-} h(t) - \lim_{t\to1+} h(t) = 2$에서 곡선 $y = |g(x)-t|$가

$t=1$의 좌극한에서 미분불가능한 점의 개수 $\lim_{t\to1-} h(t)$이

$t=1$의 우극한에서 미분불가능한 점의 개수 $\lim_{t\to1+} h(t)$ 보다 2개 더 있다.

따라서 만족하는 그래프 개형은 그림3에서 극댓값이 1이면 가능하다.

그림1, 그림2는 $t>0$인 t에 대하여 미분불가능한 점이 항상 2개로

$\lim_{t\to1} h(t) = 2$이므로 조건을 만족하지 않는다.

곡선 $y=g(x)$가 $x=1$에 대하여 대칭이고 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 4이므로

$g'(x) = f(x)$에서 사차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.

이제 $g(x) = \{x-(1-c)\}^2\{x-(1+c)\}^2$ ($c>0$인 상수)라 놓으면

$\lim_{t\to1-} h(t) - \lim_{t\to1+} h(t) = 2$에서 $y=g(x)$의 극댓값이 1이므로

$g(1) = c^4 = 1$에서

$\therefore c = 1$

$\therefore\ g(x) = x^2(x-2)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

$f(x) = g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$

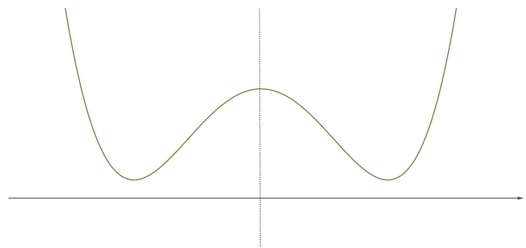
$\therefore\ f(3) = 24$

[참고]

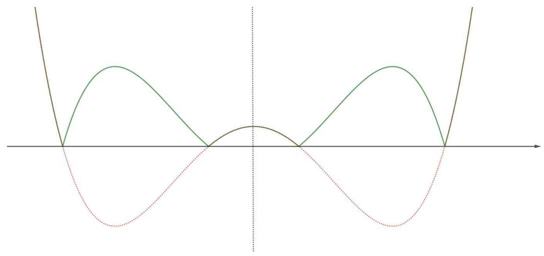
(1) $h(t) = \begin{cases} 0 & (t \le 0) \\ 4 & (0 < t < 1) \\ 2 & (t \ge 1) \end{cases}$

(2) t의 범위에 따른 $y=g(x)-t$(빨간색)와 $y=|g(x)-t|$(초록색)의 그래프이다.

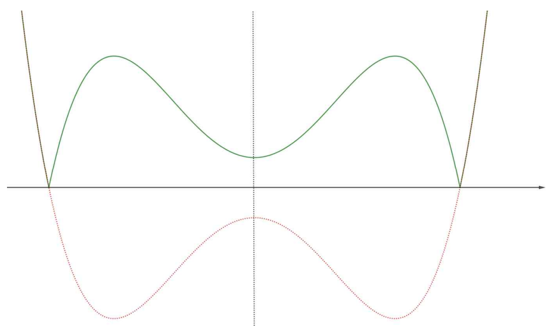
(ⅰ) $t \le 0$일 때,



(ⅱ) $0 < t < 1$일 때,



(ⅲ) $t \ge 1$일 때,



74) 정답 4

[출제자 : 황보백 송원학원]

$g(x)=\int_a^x f(t)dt$에서

$g(a)=0\cdots㉠$

$g'(x)=f(x)=(x+2)(x-1)^2$

$g(-2)$이 최솟값 $\cdots㉡$

$g(x)\geq 0\cdots㉢$

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=-2$이다.

$\therefore\ a^2=4$

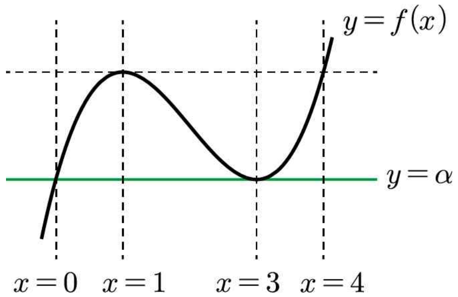
75) 정답 ④

[출제자 : 황보백 송원학원]

[그림 : 최성훈T]

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$는 $f(0)=f(3)$이고, $f(a)=f(b)$이어야 하고 $x=a$에서 극댓값을, $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 $f(x)=kx(x-3)^2+\alpha\ (k>0)$이다.



삼차함수 비율에서 $a=1$, $b=4$이다. [랑데뷰세미나(90), (91)참고]

$f(a+b)=ab\ \Rightarrow\ f(5)=20k+\alpha=4$

$f(ab)=b-a\ \Rightarrow\ f(4)=4k+\alpha=3$

$16k=1$에서 $k=\frac{1}{16}$, $\alpha=\frac{11}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{16}x(x-3)^2+\frac{11}{4}$이다.

그러므로 $f(-1)=-1+\frac{11}{4}=\frac{7}{4}$

76) 정답 64

[출제자 : 황보백 송원학원]

[그림 : 이정배T]

(가)에서 $f(0)=0$, $\lim_{x\to 2-}f(x)=4$

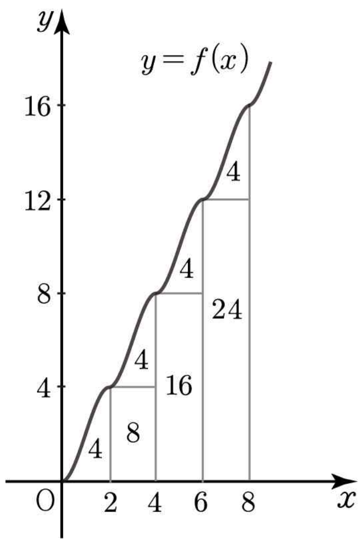
(나)에서 $x=0$을 대입하면 $f(2)=f(0)+a$이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(2)=4$이다.

따라서 $4=0+a$에서 $a=4$이다.

$$f(x)=\begin{cases}-x^2(x-3) & (0\leq x<2)\\ -(x-2)^2(x-5)+4 & (2\leq x<4)\\ -(x-4)^2(x-7)+8 & (4\leq x<6)\\ -(x-6)^2(x-9)+12 & (6\leq x<8)\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

이고 $\int_0^2 -x^2(x-3)\,dx=4$이므로 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 $x=2a$로 둘러싸인 부분의 넓이는 다음 그림과 같다.



넓이의 합은 $4+(4+8)+(4+16)+(4+24)=64$이다.

77) 정답 4

$f'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4)$

$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^2dt$

$=f(x)\int_a^x\{f(t)\}^2dt-\int_a^x\{f(t)\}^3dt$

$g'(x)=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^2dt+f(x)\times\{f(x)\}^2-\{f(x)\}^3$

$=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^2dt$

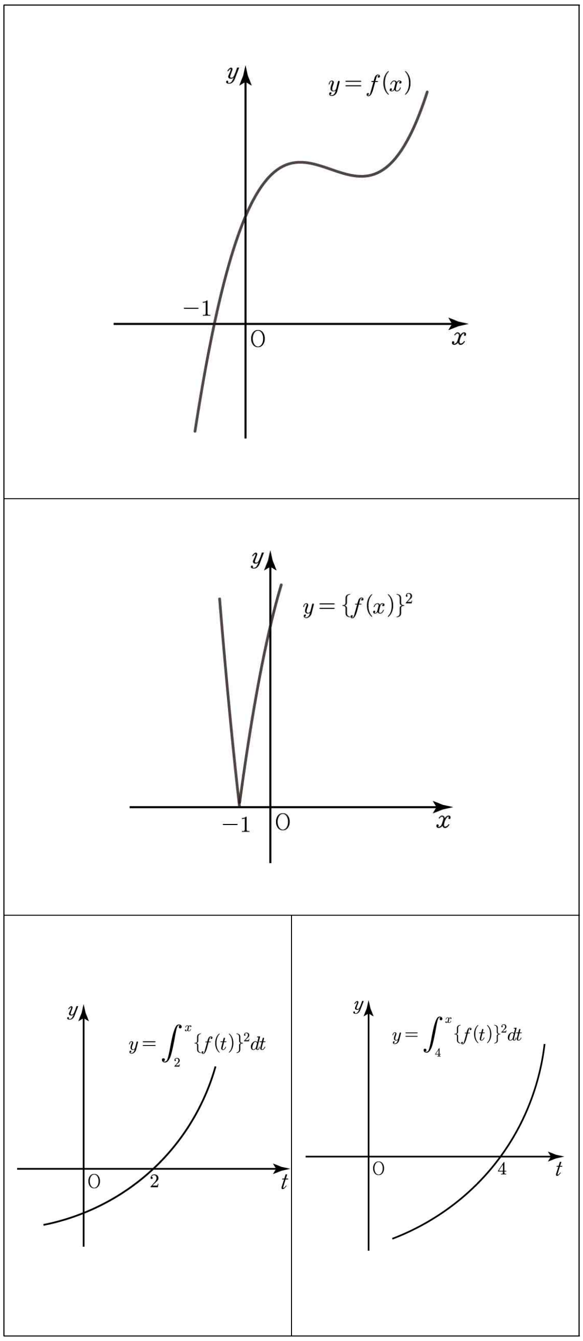
$=3(x-2)(x-4)\int_a^x\{f(t)\}^2dt$

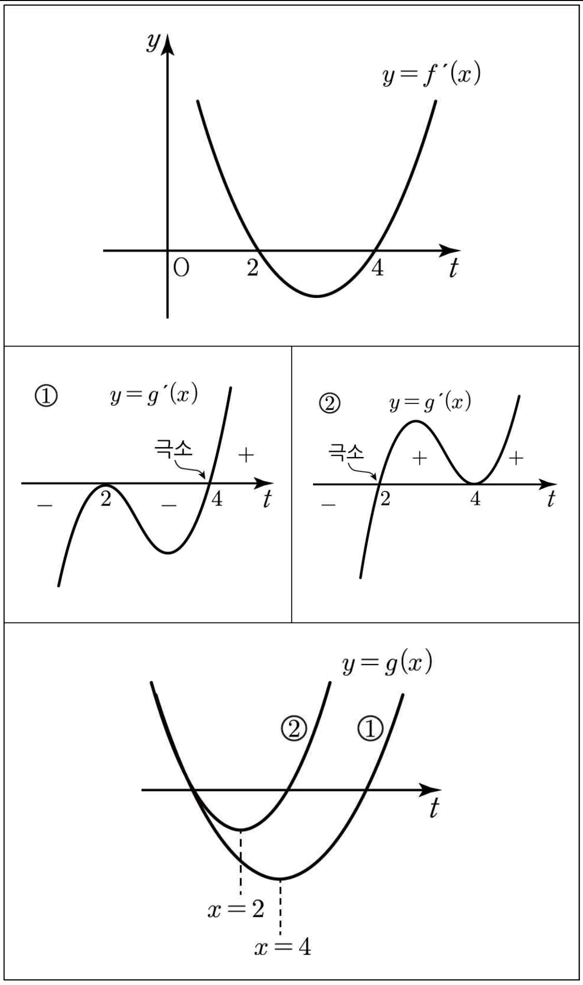
$g'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $\int_a^x \{f(t)\}^2 dt=0$

극값이 오직 하나이므로 $g'(x)=0$의 근은 오직 하나이어야 한다.

즉, $\int_a^x \{f(t)\}^2 dt=0$에서, $x=2$ 또는 $x=4$를 반드시 근으로 가져야 한다.

함수 $g'(x)$와 함수 $g(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.





따라서 함수 $g(x)$는 $a=2$일 때. $x=4$에서 극솟값을 갖고 $a=4$일 때 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 $m=0$, $n=2$이다.

$m^2+n^2=0+4=4$

78) 정답 2

[출제자 : 황보백 송원학원]

[그림 : 최성훈T]

$A=\int_a^b \{f(x)-k\}dx$, $B=\int_b^{a+4}\{k-f(x)\}dx$이므로

$A-B$

$=\int_a^b \{f(x)-k\}dx-\int_b^{a+4}\{k-f(x)\}dx$

$=\int_a^b \{f(x)-k\}dx+\int_b^{a+4}\{f(x)-k\}dx$

$=\int_a^{a+4}\{f(x)-k\}dx$

$= \int_a^{a+4} f(x)dx - \Big[\ kx\ \Big]_a^{a+4}$

$= \int_a^{a+4} f(x)dx - 4k = 4k$

따라서 $\int_a^{a+4} f(x)dx = 8k$이다.

$8k = 16$이므로 $k = 2$이다.

79) 정답 140

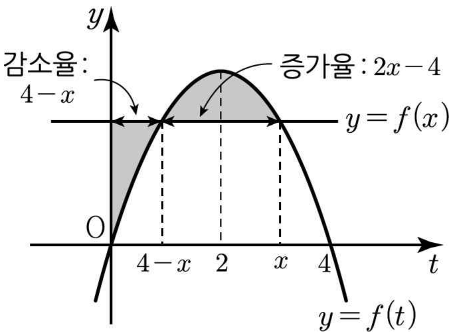
[출제자 : 황보백 송원학원]

[그림 : 이정배T]

[랑데뷰세미나(100) 참고]

$f(x) = -(x-2)^2 + 4$에서 함수 $f(x)$는 $x = 2$에 대칭이다.

함수 $g(x)$는 ty평면에서 $y = f(t)$와 상수함수 $y = f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이이다.



따라서 $0 < x < 2$에서 x가 증가할 때 $g(x)$가 증가하고 $2 < x < b$에서 x가 증가할 때 $g(x)$가 감소하므로 함수 $g(x)$는 $x = 2$에서 극댓값을 갖는다.

$\therefore\ a = 2$

$2 < x < 4$일 때, 함수 $f(t)$는 $t = 2$에 대칭이므로 $t = x$에 대칭인 점은 $t = 4 - x$이다.

넓이의 증가율은 $x - (4 - x) = 2x - 4$이고 넓이의 감소율은 $4 - x$이다.

따라서

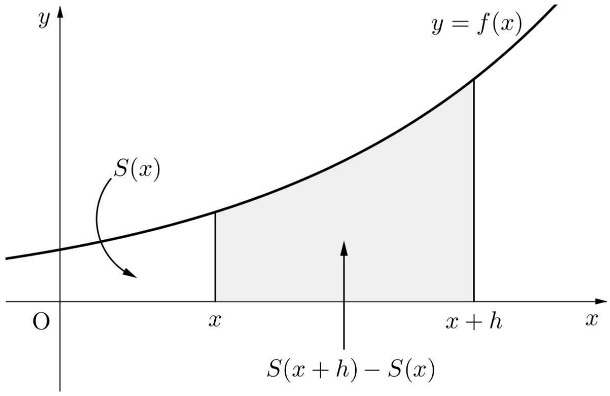
$2x - 4 = 4 - x$

$3x = 8$

$\therefore\ b = \frac{8}{3}$이다.

$30(a+b) = 30\left(2 + \frac{8}{3}\right) = 30 \times \frac{14}{3} = 140$

[랑데뷰팁]



$S(x+h) - S(x) = \int_0^{x+h} f(x)\,dx - \int_0^{x} f(x)dx$

$= F(x+h) - F(x)$

$\therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$

$\therefore\ S'(x) = f(x)$

⇨ 넓이의 변화율은 선분의 길이와 같다.

80) 정답 1

[출제자 : 황보백 송원학원]

(가)에서 $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\{f(a) + f(b)\}\cdots$㉠이고

이식의 우변은 윗변의 길이 $f(a)$, 아랫변의 길이 $f(b)$이고 높이가 $b-a$인 사다리꼴의 넓이를 뜻하므로 $f(x)$가 일차함수임을 알 수 있다.

따라서 $f(x) = mx + n$이라 두면

(나)에서 $m = 2$임을 알 수 있다. ($y = f(x)$와 $y = 2x + 1$가 평행할 때 만나는 점이 존재하지 않으므로)

따라서 $f(x) = 2x + n$

(다)에서 $x = 0$을 대입하면 $f(0) = 0$이다.

따라서 $f(x) = 2x$

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1$

[랑데뷰팁]

조건 ㉠의 등식의 양변에 b 대신 t를 대입하면

$\int_a^t f(x)dx = \frac{t-a}{2}\{f(a)+f(t)\}$이고

이 식의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$f(t) = \frac{1}{2}\{f(a)+f(t)+(t-a)f'(t)\}$

$f(t) = f(a)+(t-a)f'(t)$

⇨ a 대신 x를 대입하면

$f(t) = f(x)+(t-x)f'(t)$

즉, $f(x) = f'(t)(x-t)+f(t)$

이때, $y = f'(t)(x-t)+f(t)$ 는 함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식이고,

$f(x) = f'(t)(x-t)+f(t)$에서

이 접선이 함수 $y = f(x)$의 그래프와 일치하므로 함수 $y = f(x)$의 그래프는 직선이다.

81) 정답 ①

[출제자 : 황보백 송원학원]

[그림 : 이현일T]

ㄱ. $g(x) = xf(x+1) - \int_1^{x+1} f(t)dt$에서

$g(0) = 0$이고

$g'(x) = f(x+1)+xf'(x+1)-f(x+1) = xf'(x+1)$

$g'(x) = xf'(x+1)$이다.…㉠

$x<0$에서 $f'(x)<0$에 의하여

$x<0$에서 $f(x)>f(0)$이므로 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}<0$

즉, $\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x} \le 0$

$0<x<2$에서 $f'(x)>0$에 의하여

$x>0$에서 $f(x)>f(0)$이므로 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}>0$

즉, $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x} \ge 0$

함수 $f(x)$가 다항함수이므로

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

따라서 $f'(0) = 0$

같은 방법으로 $f'(2) = 0$

따라서 ㉠에서 $g'(-1) = -f'(0) = 0$, $g'(1) = f'(2) = 0$

(ㄱ. 참)

ㄴ. $g'(x) = xf'(x+1)$…㉠에서

$f'(x)$는 $f'(0) = 0$, $f'(2) = 0$이고 $x = 0$과 $x = 2$의 좌우에서 부호가 바뀐다.

$f'(x+1)$은 $f'(x)$을 x축으로 -1만큼 평행이동한 함수이므로

$f'(x+1)$은 $x = -1$과 $x = 1$의 좌우에서 부호가 바뀐다.

따라서 $g'(x) = xf'(x+1)$에서 방정식 $g'(x) = 0$의 해는 $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$이고 각 점의 좌우에서 모두 부호가 바뀌므로 극점의 개수는 3이다. (ㄴ. 거짓)

ㄷ.

$g'(x) = xf'(x+1)$의 부호는 다음과 같다.

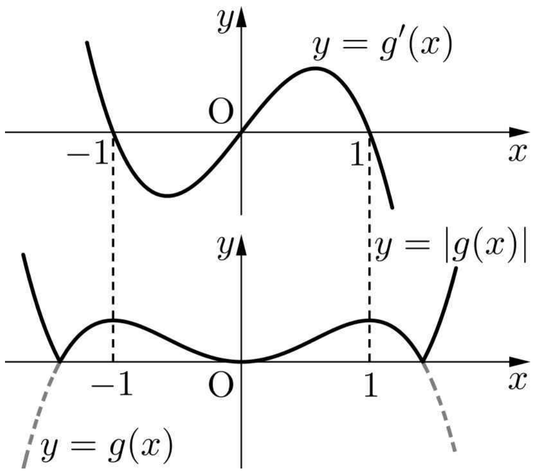
$x = -1$의 좌우에서 부호가 $+ \to -$

$x = 0$의 좌우에서 부호가 $- \to +$

$x = 1$의 좌우에서 부호가 $+ \to -$

즉, 함수 $g(x)$는 $x = -1$에서 극대, $x = 0$에서 극소, $x = 1$에서 극소이다.

$g(0) = 0$이므로 함수 $g(x)$와 함수 $|g(x)|$의 그래프 개형은 다음과 같다.



방정식 $g(x) = 0$의 해를 $\alpha(\alpha<0)$, 0, $\beta(\beta>0)$라 할 때, $(0,\ 0)$이 함수 $g(x)$의 극소점이므로

함수 $|g(x)|$는 $x = 0$에서 미분가능하고 $x = \alpha$, $x = \beta$에서 미분가능하지 않는다.

따라서 함수 함수 $|g(x)|$의 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다. (ㄷ. 거짓)