제 2 교시

수학 영역

5 지 선 다 형

1. $\log_3 x = 3$일 때, x의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 9 ④ 27 ⑤ 81

$x = 3^3 = 27$

2. $\int_0^3 (x+1)^2 dx$의 값은? [2점]

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

x축 방향 +1 평행이동

$\int_0^3 (x+1)^2 dx = \int_1^4 x^2 dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^4$

$= \frac{64-1}{3} = 21$

3. 함수 $y = \tan\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$의 주기는? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

$\tan(ax)$ 주기는 $\frac{\pi}{|a|}$

$\frac{\pi}{\pi} = 1$

4. 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 $n^2 - 5n$일 때, $a_1 + d$의 값은? [3점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

$S_n = n^2 - 5n$

$a_1 = S_1 = -4$

$a_1 + a_2 = S_2 = -6$, $a_2 = -2$

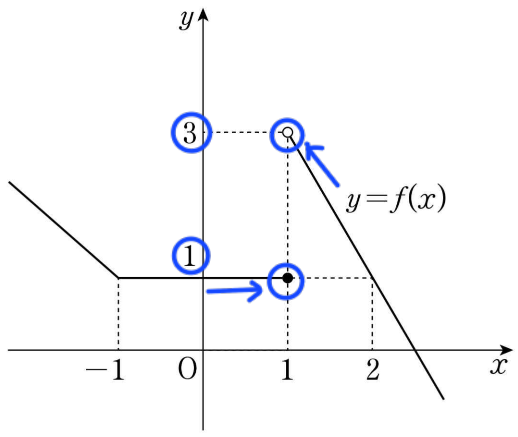
) $d = 2$

* $S_n = pn^2 + qn + r$ 이차식이면

a_n은 $d = 2p$인 등차수열

($r \neq 0$ 이면 $n \geq 2$ 등차)

5. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



함수 $(x^2+ax+b)f(x)$가 $x=1$에서 연속일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 실수이다.) [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$x=1 \quad (1+a+b)\times 1$

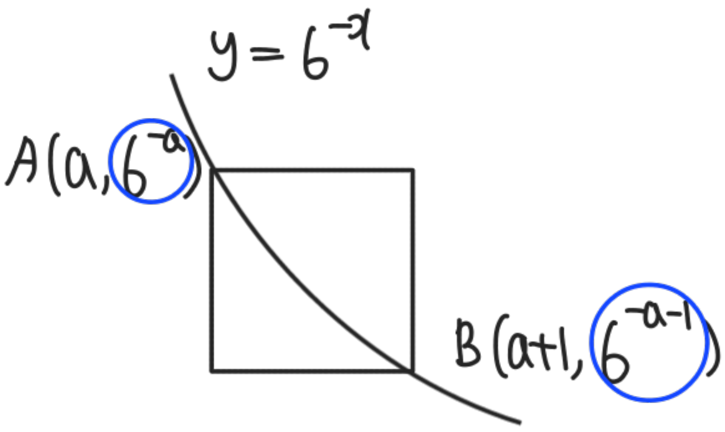
$x\to 1- \quad (1+a+b)\times 1 \quad \|$

$x\to 1+ \quad (1+a+b)\times 3 \quad \| \to 1+a+b=0$

$a+b=-1$

6. 곡선 $y=6^{-x}$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 6^{-a})$, $\mathrm{B}(a+1,\ 6^{-a-1})$에 대하여 선분 AB는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선이다. 6^{-a}의 값은? [3점]

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{9}{5}$ ⑤ 2



$6^{-a}-6^{-a-1}=1$

$6^{-a}-\frac{1}{6}\cdot 6^{-a}=1$

$\frac{5}{6}\cdot 6^{-a}=1$

$6^{-a}=\frac{6}{5}$

7. 두 함수 $f(x)=|x+3|$, $g(x)=2x+a$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$h(x)=f(x)g(x)=|x+3|(2x+a)$

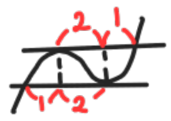
$$=\begin{cases} \boxed{(x+3)(2x+a)} & x\ge -3 \\ -\boxed{(x+3)(2x+a)} & x<-3 \end{cases}$$

$$h'(x)=\begin{cases} \boxed{1\cdot(2x+a)+2\cdot(x+3)} & x\ge -3 \\ -\boxed{1\cdot(2x+a)+2\cdot(x+3)} & x<-3 \end{cases}$$

$h'(-3+)=h'(-3-)$

$a-6=-(a-6)$

$a=6$



① 삼차함수 비율관계

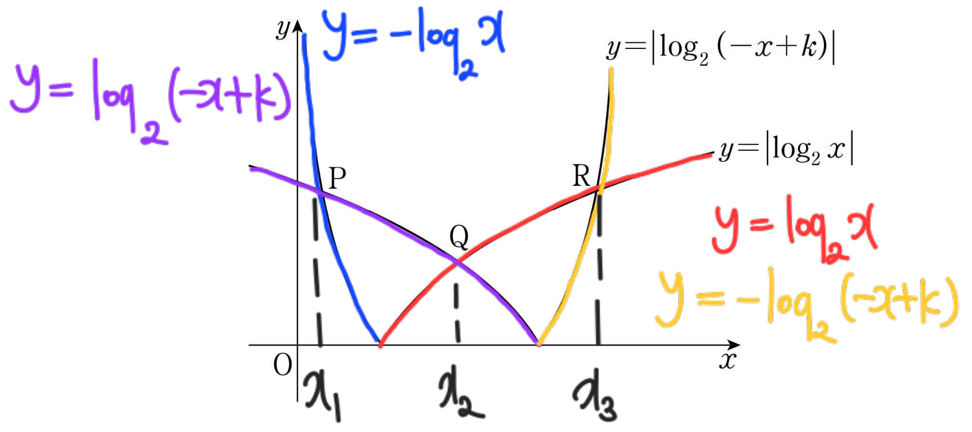
② 절댓값 함수의 미분가능성

$|h(x)|$가 $x=a$ 미분가능 ($h(a)=0$)

$\Leftrightarrow h'(a)=0$ (단 $h(x)$는 미·가)

8. 2보다 큰 상수 k에 대하여 두 곡선 $y=|\log_2(-x+k)|$, $y=|\log_2 x|$가 만나는 세 점 P, Q, R의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 하자. $x_3-x_1=2\sqrt{3}$일 때, x_1+x_3의 값은? (단, $x_1<x_2<x_3$) [3점]

① $\frac{7}{2}$　② $\frac{15}{4}$　③ 4　④ $\frac{17}{4}$　⑤ $\frac{9}{2}$



x_1은 $-\log_2 x=\log_2(-x+k)$ 근

x_3는 $\log_2 x=-\log_2(-x+k)$ 근

같은 방정식

$\log_2 x+\log_2(-x+k)=0$, $x(-x+k)=1$ 의 두 실근 x_1, x_3

$x^2-kx+1=0$, $x_1+x_3=k$, $x_1x_3=1$

$(x_3-x_1)^2=12=(x_1+x_3)^2-4x_1x_3=k^2-4$, $k^2=16$

$k=4$

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n+a_{n+1}=2n$$

$a_{n+1}=-a_n+2n$

을 만족시킬 때, a_1+a_{22}의 값은? [4점]

① 18　② 19　③ 20　④ 21　⑤ 22

$\boxed{풀이 1}$ 대입, 나열, 관찰

$a_2=-a_1+2\cdot 1$

홀 $a_3=+a_1-2\cdot 1+2\cdot 2$

짝 $a_4=-a_1+2\cdot 1-2\cdot 2+2\cdot 3$

⋮

$a_{22}=-a_1+2\cdot 1-2\cdot 2+\cdots+2\cdot 21$

$a_1+a_{22}=2\cdot(1-2+3-4+\cdots+19-20+21)$

$=2\times(-10)+2\cdot 21$

$=22$

$\boxed{풀이 2}$ 수식

$\sum_{k=1}^{22} a_k=\sum_{k=1}^{11}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=\sum_{k=1}^{11}(4k-2)$

$=264-22=242$

$\sum_{k=2}^{21} a_k=\sum_{k=1}^{10}(a_{2k}+a_{2k+1})$

$=\sum_{k=1}^{10}4k$

$=220$

$a_1+a_{22}=242-220$

$=22$

10. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 3보다 작은 실수 a에 대하여 함수 $g(x)=|(x-a)f(x)|$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않다. 함수 $g(x)$의 극댓값이 32일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

$h(x)$

① 7　② 9　③ 11　④ 13　⑤ 15

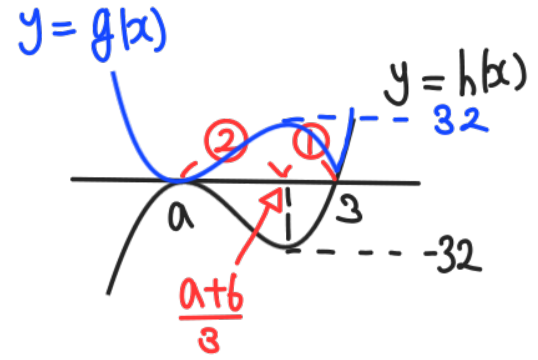
$h(x)=(x-a)f(x)$는 미분 가능 (다항함수)

$x=3$ 미분불가 이므로 $h(3)=0$, $h'(3)\neq 0$, $\therefore f(3)=0$

$x=a$ 미분가능이므로 $h(a)=0$, $h'(a)=0$, $\therefore f(a)=0$

$f(x)=1\cdot(x-a)(x-3)$

$h(x)=(x-a)^2(x-3)$



$h\left(\frac{a+6}{3}\right)=-32=\left(\frac{-2a+6}{3}\right)^2\left(\frac{a-3}{3}\right)$

$-8=\left(\frac{a-3}{3}\right)^3$

$\frac{a-3}{3}=-2$, $a=-3$

$f(x)=(x-a)(x-3)=(x+3)(x-3)$

$f(4)=7$

$y=f(x-a)+b$
$y=-f(x-a)+b$ 그래프 그리는 연습

닮음비 이용한 넓이비

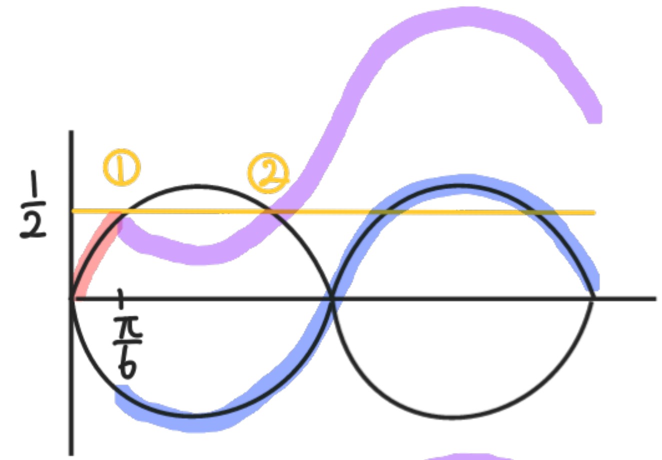
11. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \sin x & \left(0 \le x \le \frac{k}{6}\pi\right) \\ 2\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)-\sin x & \left(\frac{k}{6}\pi < x \le 2\pi\right) \end{cases} \rightarrow$$

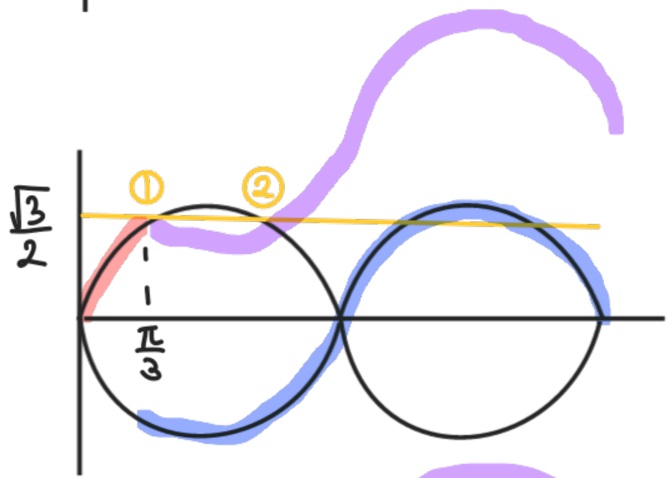
경계에서 $\left(\frac{k\pi}{6}, \sin\frac{k\pi}{6}\right)$ 연속

이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\boxed{\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)}$의 교점의 개수를 a_k라 할 때, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$의 값은? [4점]

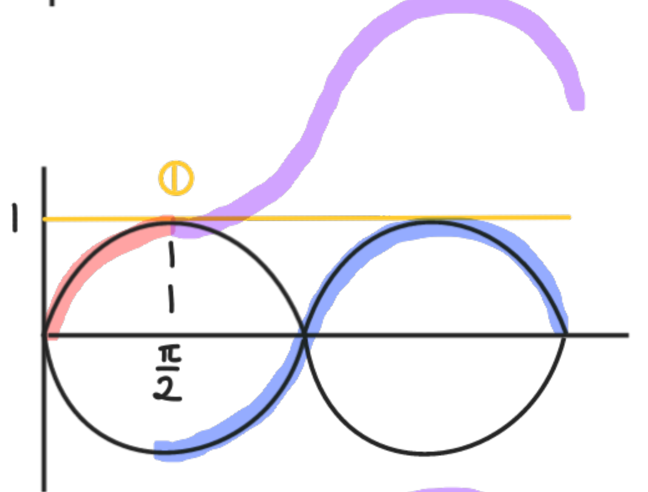
① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10



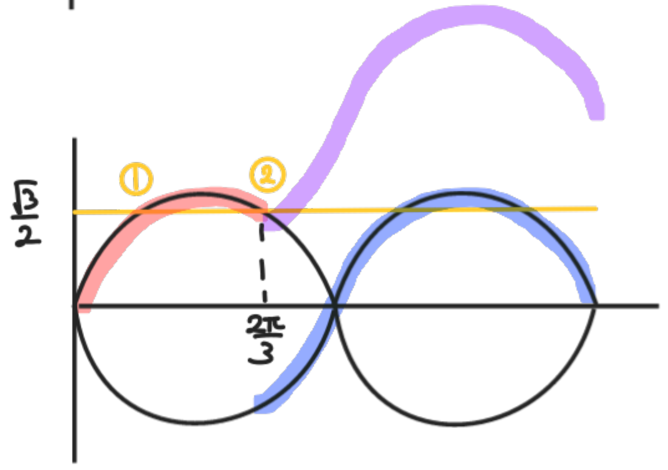
$k=1$
$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$
$a_1=2$



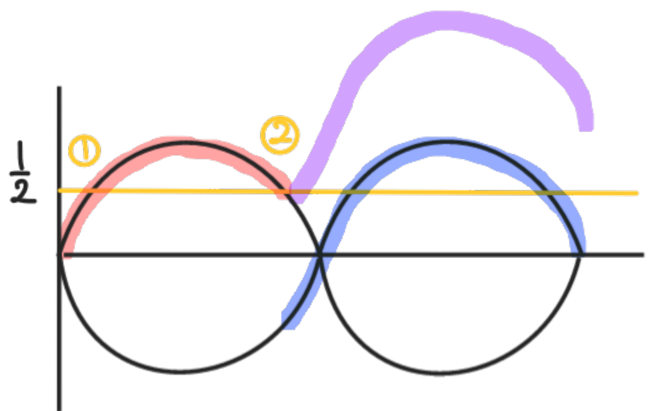
$k=2$
$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$a_2=2$



$k=3$
$\sin\frac{\pi}{2}=1$
$a_3=1$



$k=4$
$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$a_4=2$



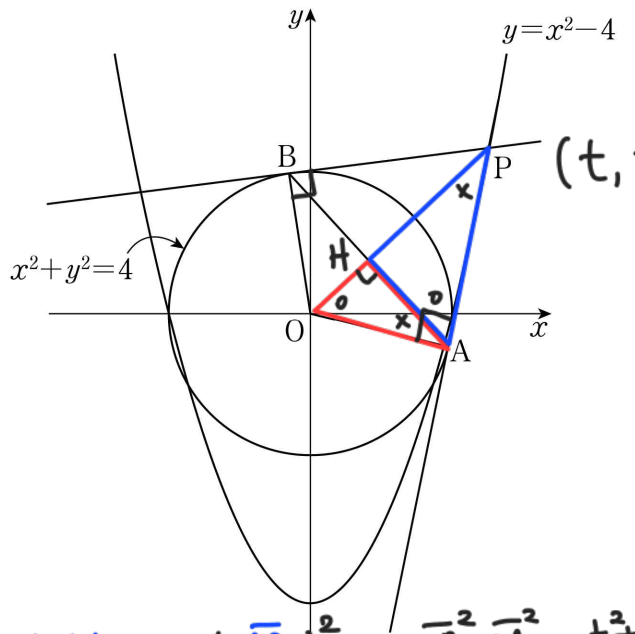
$k=5$
$\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$
$a_5=2$

12. 곡선 $y=x^2-4$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, t^2-4)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $S(t)$, 삼각형 PBA의 넓이를 $T(t)$라 할 때,

$$\lim_{t\to 2+}\frac{T(t)}{(t-2)S(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{T(t)}{(t^4-2)S(t)}$$

의 값은? (단, O는 원점이고, $t>2$이다.) [4점]

① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2



$$\frac{T(t)}{S(t)}=\frac{\triangle \mathrm{AHP}}{\triangle \mathrm{OHA}}=\left(\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{OA}}}\right)^2=\frac{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OA}}^2}{4}=\frac{t^2+(t^2-4)^2-4}{4}$$

$$=\frac{t^4-7t^2+12}{4}=\frac{(t^2-3)(t+2)(t-2)}{4}$$

$$\lim_{t\to 2+}\frac{T(t)}{(t-2)S(t)}=\lim_{t\to 2+}\frac{(t^2-3)(t+2)}{4}=1$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{T(t)}{(t^4-2)S(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-3)(t+2)(t-2)}{4(t^4-2)}=\frac{1}{4}$$

$$1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

$g'(x) \geq 0$

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$와 ~~역함수가 존재하는~~ 삼차함수 $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 x에 대하여 $2f(x)=g(x)-g(-x)$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

$f(x)$: 기함수

< 보 기 >

ㄱ. $a^2 \leq 3b$

ㄴ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 가지면 $g'(1)=1$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ $g'(x)=3x^2+2ax+b$

$g(x)$ 역함수 존재 → $g(x)$ 증가 OR 감소

→ 최고차항 계수 1이므로 증가 → $g'(x) \geq 0$.

$3x^2+2ax+b \geq 0$, $D/4 = a^2-3b \leq 0$.

ㄴ $2f(x) = g(x)-g(-x)$

$= (x^3+ax^2+bx+c)-(-x^3+ax^2-bx+c)$

$= 2x^3+2bx$

$f(x) = x^3+bx$,

$f'(x) = 3x^2+b$ → $D' = -12b$

ㄱ에서 $3b \geq a^2 \geq 0$ 이므로 $b \geq 0$, $D' \leq 0$

ㄷ ㄴ에서 $D' \leq 0$, 실근 가지려면 $D'=-12b=0$,

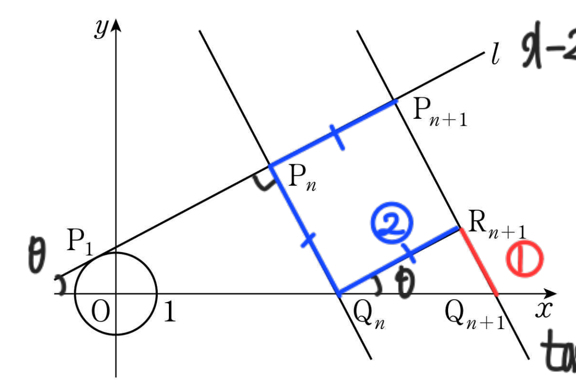
$b=0$, ㄱ에서 $3b \geq a^2 \geq 0$ 이므로 $a=0$.

$a=b=0$, $g'(x)=3x^2$, $g'(1)=3$

14. 모든 자연수 n에 대하여 직선 $l: x-2y+\sqrt{5}=0$ 위의 점 P_n과 x축 위의 점 Q_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> • 직선 P_nQ_n과 직선 l이 서로 수직이다.
>
> • $\overline{P_nQ_n}=\overline{P_nP_{n+1}}$이고 점 P_{n+1}의 x좌표는 점 P_n의 x좌표보다 크다.

다음은 점 P_1이 원 $x^2+y^2=1$과 직선 l의 접점일 때, 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 삼각형 OQ_nP_n의 넓이를 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)



$x-2y+\sqrt{5}=0$

$\tan\theta = \frac{1}{2}$

자연수 n에 대하여 점 Q_n을 지나고 직선 l과 평행한 직선이 선분 $P_{n+1}Q_{n+1}$과 만나는 점을 R_{n+1}이라 하면 사각형 $P_nQ_nR_{n+1}P_{n+1}$은 정사각형이다.

직선 l의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로　$\frac{1}{2}=p$

$\overline{R_{n+1}Q_{n+1}} = \boxed{(가)} \times \overline{P_nP_{n+1}}$

$\frac{3}{2}$: 공비

이고

a_{n+1}　$\overline{P_{n+1}Q_{n+1}} = \left(1+\boxed{(가)}\right) \times \overline{P_nQ_n}$　a_n : 등비

이다. 이때, $\overline{P_1Q_1}=1$이므로 $\overline{P_nQ_n}=\boxed{(나)}$이다.　$1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

첫항 a_1

그러므로 2 이상의 자연수 n에 대하여

$S_n = \overline{P_1P_n} = \sum_{k=1}^{n-1} \overline{P_kP_{k+1}} = \boxed{(다)}$　$\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{3}{2}}$

이다. 따라서 2 이상의 자연수 n에 대하여 삼각형 OQ_nP_n의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{P_nQ_n} \times \overline{P_1P_n} = \frac{1}{2} \times \boxed{(나)} \times \left(\boxed{(다)}\right)$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(6p)+g(8p)$의 값은? [4점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

$p=\frac{1}{2}$, $f(3)+g(4)$

$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^3}{1-\frac{3}{2}}$

$= \frac{9}{4} - 2\left(1-\frac{27}{8}\right) = \frac{1}{4}+\frac{27}{4} = 7$

15. 최고차항의 계수가 4이고 $f(0)=f'(0)=0$을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}\int_0^x f(t)dt+5 & (x<c)\\ \left|\int_0^x f(t)dt-\frac{13}{3}\right| & (x\ge c)\end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 c의 개수가 1일 때, $g(1)$의 최댓값은? [4점]

① 2 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

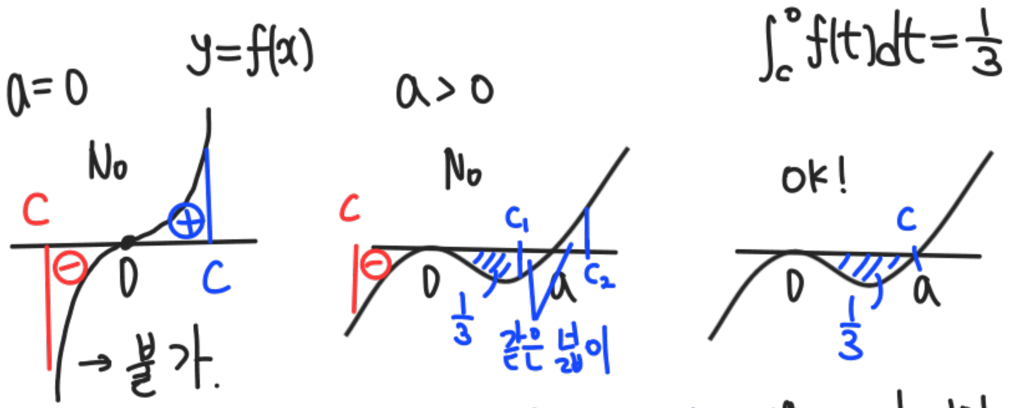
$f(x)=4x^2(x-a)$
$=4x^3-4ax^2$

연속인 $g(x)$에 대하여

$g(x)$가 $x=c$에서 연속이려면 $g(c+)=g(c-)$

$\int_0^c f(t)dt+5=\left|\int_0^c f(t)dt-\frac{13}{3}\right|$, $\int_0^c f(t)dt=-\frac{1}{3}$

$\int_c^0 f(t)dt=\frac{1}{3}$

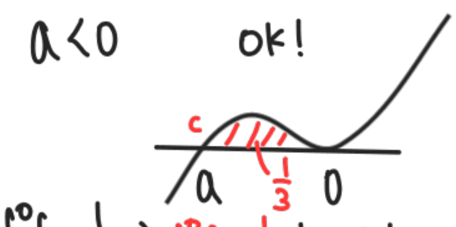


$\int_c^0 f<0$, $\int_0^c f>0$

$\int_c^0 f<0$, $\int_0^{c_1} f=\int_0^{c_2} f=-\frac{1}{3}$
c_1, c_2 두개

$\int_0^a f=-\frac{1}{3}$ 이면
$\int_0^c f=-\frac{1}{3}$인 c 유일!

$a<0$



$\int_a^0 f=\frac{1}{3} \Rightarrow \int_c^0 f=\frac{1}{3}$인 c 유일

$\int_0^a f(x)dx=\left[x^4-\frac{4a}{3}x^3\right]_0^a=-\frac{1}{3}a^4=-\frac{1}{3}$, $a=\pm1$

따라서 $f(x)=4x^3-4x$ 또는 $f(x)=4x^3+4x$

$g(x)$ 연속이려면 $c=1$ 또는 $c=-1$

$g(1)=\left|\int_0^1 4x^3-4x^2dx-\frac{13}{3}\right|$ 또는 $\left|\int_0^1 4x^3+4x^2dx-\frac{13}{3}\right|$

$=\frac{14}{3}$ $=2$

최댓값 $\frac{14}{3}$.

* $g(1)$ 최댓값 구할 때는 $g(x)$가 연속이라는 보장없다.

추가로 가능한 $g(1)$의 값 $\int_0^1 4x^3-4x^2dx+5=\frac{14}{3}$

$\int_0^1 4x^3+4x^2dx+5=\frac{22}{3}$

최댓값은 $\frac{22}{3}$.

* 문제 표현이 애매하지만 연속인 $g(x)$에 대해 $g(1)$ 최댓값 구하는 것이 의도.

단답형

16. 함수 $f(x)=2x^2+ax+3$에 대하여 $x=2$에서의 미분계수가 18일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

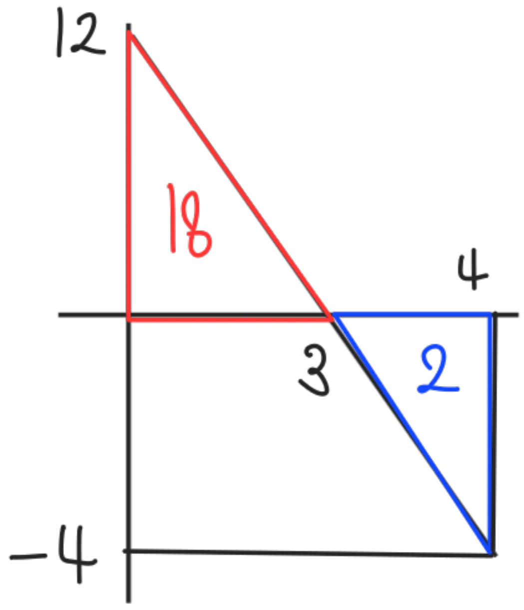
$\boxed{10}$

$f'(x)=4x+a$

$f'(2)=8+a=18$, $a=10$

17. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\ge0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=12-4t$일 때, 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [3점]

$\boxed{20}$



$\int_0^4 |v(t)|dt=\int_0^3 v(t)dt+\int_3^4 -v(t)dt$

$=18+2$

$=20$

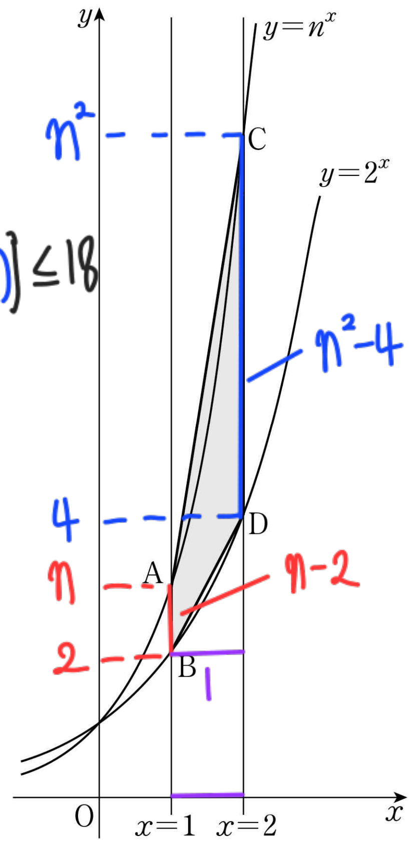
$f(a-x)+f(a+x)=2b$

(a,b) 점대칭.

$n\geq 3$

18. 그림과 같이 3 이상의 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y=n^x$, $y=2^x$이 직선 $x=1$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 곡선 $y=n^x$, $y=2^x$이 직선 $x=2$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 사다리꼴 ABDC의 넓이가 18 이하가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [3점]

$\boxed{18}$



$\frac{1}{2}\times 1\times\{(n-2)+(n^2-4)\}\leq 18$

$n^2+n-6\leq 36$

$(n+7)(n-6)\leq 0$

문제조건 $3\leq n\leq 6$

$n=3,4,5,6$

19. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+2}=\begin{cases}a_n-3 & (n=1,3)\\ a_n+3 & (n=2,4)\end{cases}$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+6}$이 성립한다. → 주기

$\sum_{k=1}^{32}a_k=112$일 때, a_1+a_2의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{7}$

① ② ③ ④ ⑤ ⑥

a_1 / a_2 / a_1-3 / a_2+3 / a_1-6 / a_2+6

합은 $3(a_1+a_2)$

⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫

… ㉚

㉛ ㉜

$\sum_{k=1}^{32}a_k=\sum_{k=1}^{30}a_k+a_{31}+a_{32}$

$=5\times(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)+a_1+a_2$

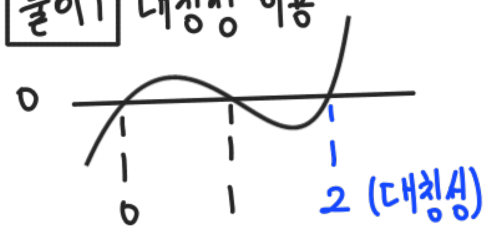
$=5\times 3(a_1+a_2)+a_1+a_2$

$=16(a_1+a_2)=112,\quad a_1+a_2=7$

20. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)=-f(1+x)$를 만족시킨다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=-6x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오. [4점]

$f(x)$는 $(1,0)$ 대칭.

$\boxed{풀이1}$ 대칭성 이용



⇒ $f(0)=f(1)=f(2)=0$ 이므로 $f(x)=x(x-1)(x-2)$
$=x^3-3x^2+2x$

$\boxed{풀이2}$ 대입,

$f(1-x)=-f(1+x)$, $x=0$: $f(1)=-f(1)$, $f(1)=0$

$x=1$: $f(0)=-f(2)$, $f(2)=0$.

$y=f(x)$, $y=-6x^2$ 교점 찾기

$x^3-3x^2+2x=-6x^2$, $x(x+1)(x+2)=0$, $x=-2,-1,0$

x^3+3x^2+2x

$\int_{-2}^{-1}x^3+3x^2+2x\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2\right]_{-2}^{-1}=\left(\frac{1}{4}-1+1\right)-(4-8+4)$

$=\frac{1}{4}$, $S_1=\frac{1}{4}$

$\int_{-1}^{0}x^3+3x^2+2x\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2\right]_{-1}^{0}=0-\left(\frac{1}{4}-1+1\right)$

$=-\frac{1}{4}$, $S_2=\frac{1}{4}$

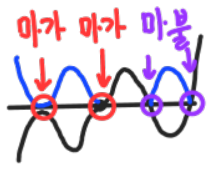
$S=S_1+S_2=\frac{1}{2}$

$4S=2$

$\boxed{2}$

① 각의 이등분선 성질 $a:b=c:d$
② 원주각 일정, 중심각 2배 성질 (꿀팁 알기)
③ 문자 많이 놓고 코사인 돌리기

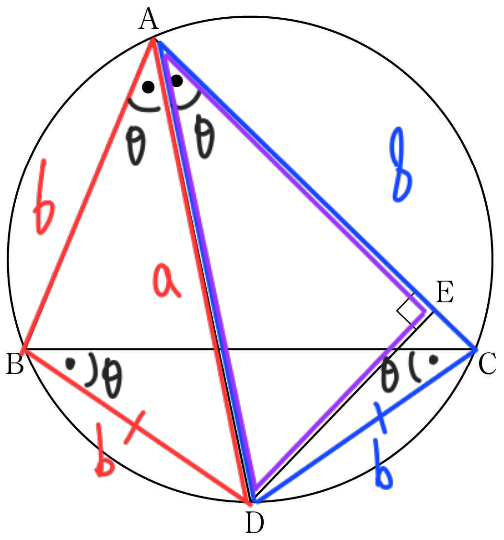
"접어 올린 함수의 미분가능성"
미분 가능한 $h(x)$에 대하여 $h(a)=0$ 일 때
$y=\begin{cases} h(x) & (x\ge a) \\ -h(x) & (x<a) \end{cases}$ 가 미·가 $\Rightarrow h'(a)=0$



$h'(a)\ne 0$ 이면 $x=a$ 에서 접으면 뾰족점.

21. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$인 예각삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 D, 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하자. 선분 AE의 길이를 k라 할 때, $12k$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{84}$



풀이1

원주각 일정 성질 → △BCD 이등변

△ABD 에서 $b^2=a^2+36-12a\cos\theta$ — ㉠

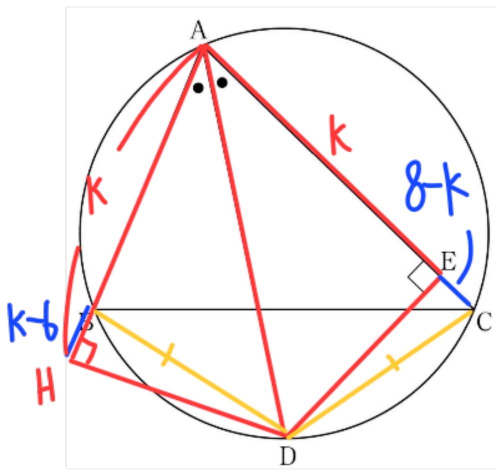
△ADC 에서 $b^2=a^2+64-16a\cos\theta$ — ㉡

㉠−㉡ : $0=-28+4a\cos\theta$

$a\cos\theta=7$

△ADE 에서 $k=\overline{AE}=\overline{AD}\cos\theta$
$=a\cos\theta=7$ $\boxed{84}$

풀이2



① △AHD, △AED 합동
→ $\overline{HD}=\overline{ED}$
② 원주각일정 → △BCD 이등변
→ $\overline{BD}=\overline{CD}$
①,② 에 의해 △BHD, △CED 합동,
→ $\overline{BH}=\overline{CE}$
$k-6=8-k$, $k=7$

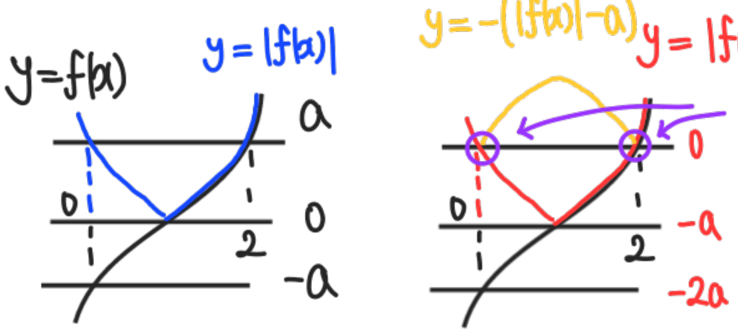
22. 양수 a에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$|x(x-2)|g(x)=x(x-2)(|f(x)|-a)$$
> 이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 미분가능하다.

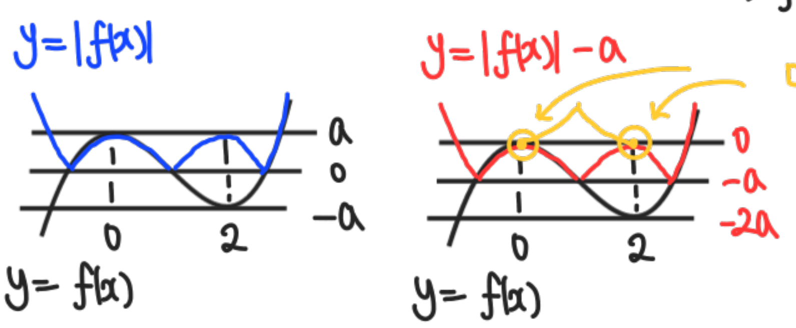
$g(3a)$의 값을 구하시오. [4점]

$$g(x)=\begin{cases} |f(x)|-a, & x<0,\ x>2 \\ -(|f(x)|-a), & 0\le x\le 2 \end{cases}$$

$g(0-)=|f(0)|-a$ $=0$, $g(0)=0$, $|f(0)|=a$
$\|$ $\qquad\|$
$g(0+)=-(|f(0)|-a)$, 같은 이유로 $g(2)=0$, $|f(2)|=a$



$x=0,2$ 에서 접어 올리므로 미·가이려면 미분계수 0이다.
→ $f'(0)=f'(2)=0$



미분 가능. OK !
$f'(0)=f'(2)=0$ 이었기 때문.

$f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$
$f(x)=x^3-3x^2+a$, $(f(0)=a,\ f(2)=-a)$
$f(2)=-4+a=-a$, $a=2$
$g(3a)=g(6)=|f(6)|-a=6^3-3\cdot 6^2+a-a$
$=3\cdot 6^2$
$=108$

$\boxed{108}$

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(60, \frac{5}{12}\right)$를 따를 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [2점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

$$E(X) = np = 60 \times \frac{5}{12} = 25$$

24. 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B) = \frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(A \cup B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$$P(A^c) = \frac{2}{3},\quad P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (배반 사건)

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{7}{12}$$

25. 같은 종류의 공책 10권을 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 줄 때, A와 B가 각각 2권 이상의 공책을 받도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 공책을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 76 ② 80 ③ 84 ④ 88 ⑤ 92

$$a+b+c+d=10$$
$$\underset{\geq 2}{a}\ \underset{\geq 2}{b}$$

$$a=a'+2,\quad b=b'+2\ (a', b'\geq 0)$$

$$a'+b'+c+d=6\ (a', b', c, d\geq 0)$$

$$_4H_6={}_9C_6={}_9C_3$$
$$=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}$$
$$=3\cdot 4\cdot 7$$
$$=84$$

이산 변량 두 개는 표 그리면 정확

26. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, 두 수 a, b의 최대공약수가 홀수일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

$\boxed{\text{풀이 1}}$ 표 그리기

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	~~2~~	1	~~2~~	1	~~2~~
3	1	1	3	1	1	3
4	1	~~2~~	1	~~4~~	1	~~2~~
5	1	1	1	1	5	1
6	1	~~2~~	3	~~2~~	1	~~6~~

$$\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$$

$\boxed{\text{풀이 2}}$ 여사건

최대공약수

홀수, 홀수 → 홀수

홀수, 짝수 → 홀수

짝수, 짝수 → 짝수. → 이 경우만 제외

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

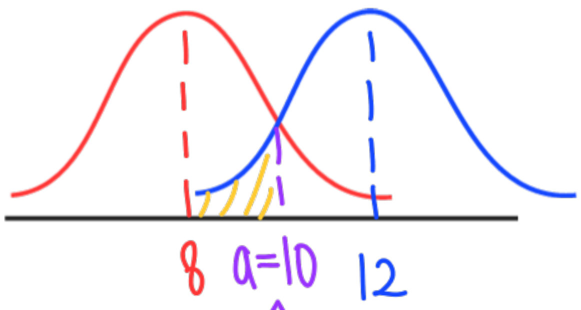
표준편차 같다.
모양 같다.
평행이동 관계다.

27. 확률변수 X는 정규분포 $N(8,\ 2^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $N(12,\ 2^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다.
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표를 a라 할 때, $P(8 \le Y \le a)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

10 =

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.1359 ② 0.1587 ③ 0.2417
④ 0.2857 ⑤ 0.3085



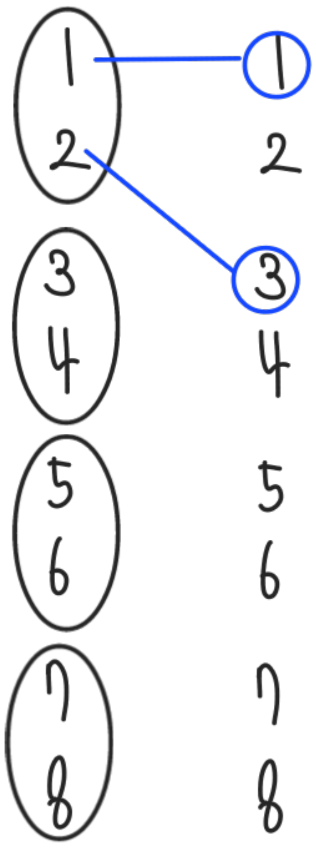
8, 12 의 평균(대칭성)

$P(8 \le Y \le 10)$
$= P\left(\frac{8-12}{2} \le Z \le \frac{10-12}{2}\right)$
$= P(-2 \le Z \le -1)$
$= P(0 \le Z \le 2)$
$- P(0 \le Z \le 1)$
$= 0.4772$
$- 0.3413$
$= 0.1359$

28. 집합 $X=\{x \mid x$는 8 이하의 자연수$\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택한다. 선택한 함수 f가 4 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $f(2n-1)<f(2n)$일 때, $f(1)=f(5)$일 확률은? [4점]

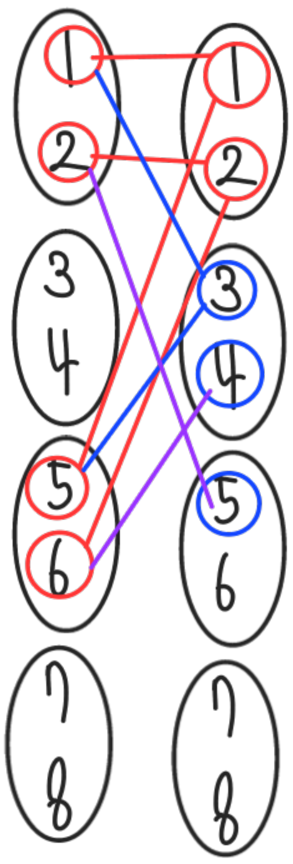
① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{5}{28}$ ③ $\frac{3}{14}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{2}{7}$

$f(1)<f(2),\ f(3)<f(4),\ f(5)<f(6),\ f(7)<f(8)$



① 전체
$f(1), f(2)$는 1~8 에서
2개 택하면 순서는 고정
$\rightarrow {}_8C_2 = 28$.
$f(3), f(4)\ /\ f(5), f(6)\ /\ f(7), f(8)$
마찬가지.
$\rightarrow 28^4$

② $f(1)=f(5)$



$f(3), f(4) \rightarrow 28$
$f(6), f(7) \rightarrow 28$

2-1. $f(2)=f(6)$인 경우
${}_8C_2$하여 작은 것 $f(1)=f(5)$,
큰 것 $f(2)=f(6)$
$\rightarrow {}_8C_2$

2-2. $f(2) \ne f(5)$인 경우
${}_8C_3$하여 가장 작은 것 $f(1)=f(5)$
중간 값, 큰 값은 $f(2), f(6)$ 할당
$(f(2), f(6)$ 바꾸기 가능 $\times 2) \rightarrow {}_8C_3 \times 2$

$$\frac{28^2 \times ({}_8C_2 + {}_8C_3 \times 2)}{28^4} = \frac{28+56\times 2}{28^2} = \frac{5}{28}$$

단답형

29. 숫자 1, 2, 3 중에서 모든 숫자가 한 개 이상씩 포함되도록 중복을 허락하여 6개를 선택한 후, 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수 중 일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 같은 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

□ □ □ 1 □ 1

1, 2, 3 중 택1 $\rightarrow 3^4$

3개 중 택1 $\rightarrow$ 3

$3\times(3^4-2^4-2^4+1)$

2 없이 $\boxed{1, 3}$ 만

2, 3 없이 $\boxed{1}$ 만

3 없이 $\boxed{1, 2}$ 만

$= 3\times(81-16-16+1)$

$= 3\times 50$

$= 150$ $\boxed{150}$

n개의 합 → 표본평균 떠올리기

30. 주머니에 12개의 공이 들어 있다. 이 공들 각각에는 숫자 1, 2, 3, 4 중 하나씩이 적혀 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 4개의 수의 합을 확률변수 X라 할 때, 확률변수 X는 다음 조건을 만족시킨다.

확률변수 Y

$\frac{X}{4}$는 표본 평균

> (가) $P(X=4)=16\times P(X=16)=\frac{1}{81}$
>
> (나) $E(X)=9$

$V(X)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$X=4=1+1+1+1,$

$P(X=4)=\frac{1}{81}=\left(\frac{1}{3}\right)^4=P(Y=1)^4,\quad P(Y=1)=\frac{1}{3},$

$X=16=4+4+4+4,$

$P(X=16)=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{81}=\left(\frac{1}{6}\right)^4=P(Y=4)^4,\quad P(Y=4)=\frac{1}{6}$

Y	1	2	3	4
	$\frac{4}{12}$	$\frac{a}{12}$	$\frac{6-a}{12}$	$\frac{2}{12}$

이때 $\frac{X}{4}=\bar{Y}$ $(n=4)$

$E(X)=E(4\bar{Y})=4E(\bar{Y})=4E(Y)$

$=4\times\frac{4+2a+3(6-a)+8}{12}=\frac{-a+30}{3}=9,$

$\therefore a=3.$

$E(Y)=\frac{9}{4},$

$E(Y^2)=\frac{1^2\times4+2^2\times\cancel{a}^{3}+3^2\times(\cancel{6-a})^{3}+4^2\times2}{12}$

$=\frac{4+12+27+32}{12}=\frac{25}{4}$

$V(X)=V(4\bar{Y})=16V(\bar{Y})=16\times\frac{1}{4}V(Y)$

$=4V(Y)=4(E(Y^2)-E(Y)^2)$

$=4\left(\frac{25}{4}-\frac{81}{16}\right)$

$=25-\frac{81}{4}=\frac{19}{4}$ $\boxed{23}$

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\int_{2}^{4} \frac{6}{x^2} dx$ 의 값은? [2점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

$$\left[-\frac{6}{x}\right]_2^4 = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$$

24. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - 4n}{n} = 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{5n+a_n}{3n-1}$의 값은? [3점]

$\to 0$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$* \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - 4n}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 4$$

$$\frac{5n+a_n}{3n-1} = \frac{5+\frac{a_n}{n}}{3-\frac{1}{n}} \to \frac{5+4}{3-0} = 3$$

$\frac{a_n}{n} \to 4$, $\frac{1}{n} \to 0$

25. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>2)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=t\ln t,\quad y=\frac{4t}{\ln t}$$

이다. 시각 $t=e^2$에서 점 P의 속력은? [3점]

① $\sqrt{7}$　② $2\sqrt{2}$　③ 3　④ $\sqrt{10}$　⑤ $\sqrt{11}$

$$\frac{dx}{dt}=\ln t+1 \xrightarrow{t=e^2} 3$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{4\ln t-4\cancel{t}\times\frac{1}{\cancel{t}}}{(\ln t)^2} \xrightarrow{t=e^2} 1$$

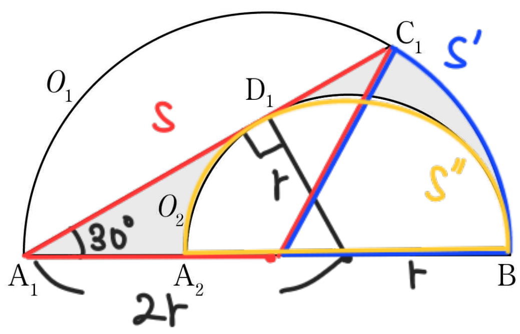
$$\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

26. 그림과 같이 길이가 2인 선분 A_1B를 지름으로 하는 반원 O_1이 있다. 호 BA_1 위에 점 C_1을 $\angle BA_1C_1=\frac{\pi}{6}$가 되도록 잡고, 선분 A_1B를 지름으로 하는 반원 O_2가 선분 A_1C_1과 접하도록 선분 A_1B 위에 점 A_2를 잡는다. 반원 O_2와 선분 A_1C_1의 접점을 D_1이라 할 때, 두 선분 A_1A_2, A_1D_1과 호 D_1A_2로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1과 두 호 BC_1, BD_1로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 호 BA_2 위에 점 C_2를 $\angle BA_2C_2=\frac{\pi}{6}$가 되도록 잡고, 선분 A_3B를 지름으로 하는 반원 O_3이 선분 A_2C_2와 접하도록 선분 A_2B 위에 점 A_3을 잡는다. 반원 O_3과 선분 A_2C_2의 접점을 D_2라 할 때, 두 선분 A_2A_3, A_2D_2와 호 D_2A_3으로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2와 두 호 BC_2, BD_2로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [3점]

R_1

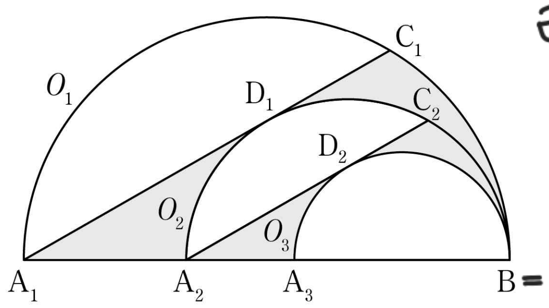


$3r=2$

$r=\frac{2}{3}$

닮음비 $\frac{r}{1}=\frac{2}{3}$

R_2



⋮　　　⋮

$$S=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S'=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$$

$$S''=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}\pi$$

$$\frac{S+S'-S''}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{9}{5}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\pi}{18}-\frac{4\pi}{18}\right)$$

$$\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{20}$$

① $\frac{4\sqrt{3}-\pi}{10}$　② $\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{20}$　③ $\frac{8\sqrt{3}-\pi}{20}$

④ $\frac{5\sqrt{3}-\pi}{10}$　⑤ $\frac{9\sqrt{3}-\pi}{20}$

① 각 이등분선 a:b = c:d

② 평행 → 동위각, 엇각

27. 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1) > f(x_2)$이다.
>
> (나) 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이고 최솟값은 -2이다.

감소

$f(-1)=1$

$f(3)=-2$

$\int_{-1}^{3} f(x)dx = 3$일 때, $\int_{-2}^{1} f^{-1}(x)dx$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$f(-1)=1,\ f^{-1}(1)=-1$

$f(3)=-2,\ f^{-1}(-2)=3$

$\int_{-2}^{1} f^{-1}(x)dx$

$f^{-1}(x)=t,$

$x=f(t),\ 1\cdot dx = f'(t)dt$

$x=1,\ t=-1$

$x=-2,\ t=3$

$= \int_{3}^{-1} t\cdot f'(t)dt$

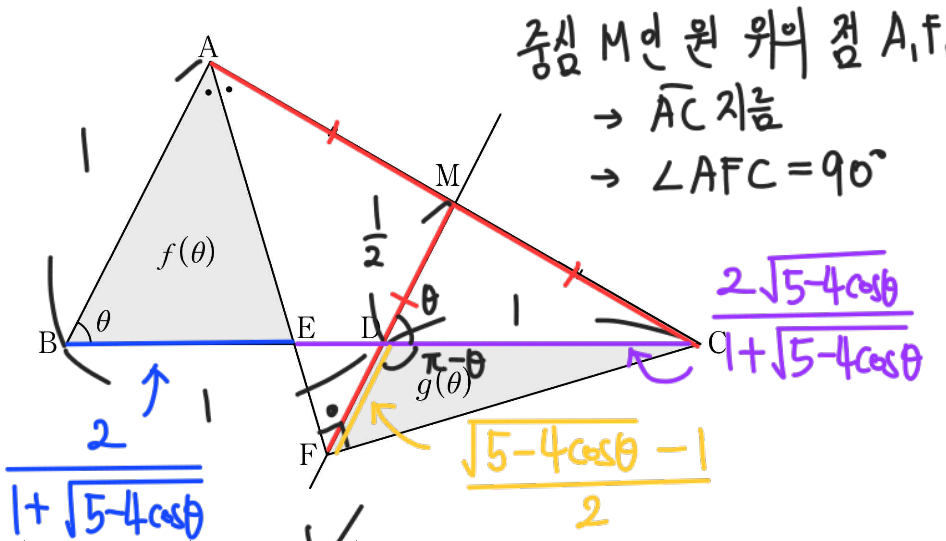
$= \left[tf(t)\right]_3^{-1} - \int_3^{-1} 1\cdot f(t)dt$

$= -f(-1) - 3f(3) + \int_{-1}^{3} f(t)dt$

$= -1 + 6 + 3$

$= 8$

28. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AC의 중점을 M이라 하고, 점 M을 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. $\angle BAC$의 이등분선이 두 직선 BC, DM과 만나는 점을 각각 E, F라 하자. $\angle CBA = \theta$일 때, 삼각형 ABE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 DFC의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$) [4점]



중심 M인 원 위의 점 A, F, C

→ $\overline{AC}$ 지름

→ $\angle AFC = 90°$

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

$\overline{AC}^2 = 1+4-2\cdot1\cdot2\cos\theta = 5-4\cos\theta$

$\overline{MF} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AC} = \frac{\sqrt{5-4\cos\theta}}{2}$

$\overline{AB}:\overline{AC} = 1:\sqrt{5-4\cos\theta} = \overline{BE}:\overline{CE}$

$\overline{BC}=2$ 이므로 $\overline{BE} = \frac{2}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}$, $\overline{CE} = \frac{2\sqrt{5-4\cos\theta}}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}$

$g(\theta) = \frac{1}{2}\cdot1\cdot\overline{DF}\cdot\sin(\pi-\theta)$

$f(\theta) = \frac{1}{2}\cdot1\cdot\overline{BE}\cdot\sin\theta$

$\frac{g(\theta)}{\theta^2\cdot f(\theta)} = \frac{\overline{DF}}{\theta^2\cdot\overline{BE}} = \frac{\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{2}}{\theta^2\cdot\frac{2}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}}$

$= \frac{1}{4\theta^2}\cdot\frac{\sqrt{\ }-1}{\frac{1}{1+\sqrt{\ }}}$

$= \frac{1}{4\theta^2}\times(\sqrt{\ }-1)\times(\sqrt{\ }+1)$

$= \frac{1}{4\theta^2}\times(\sqrt{\ }^2-1)$

$= \frac{1}{4\theta^2}(4-4\cos\theta) = \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} \to \frac{1}{2}$

① $f(x)$ 보자마자 기함수 (기함수 ÷ 우함수)
② 분수함수는 분자 ÷ 분모 몫 파악하여 점근선 확인 (이 문제에서는 중요 X)

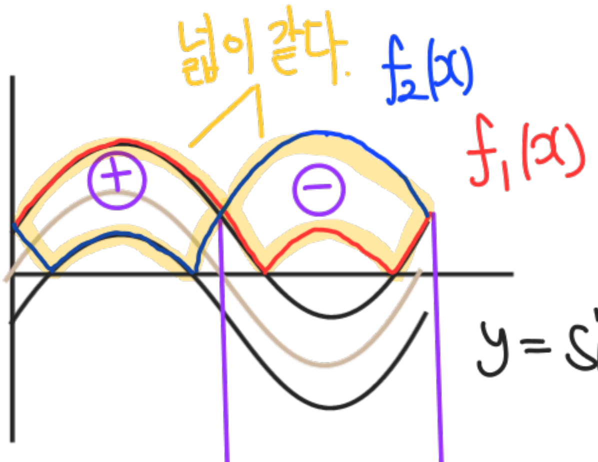
단답형

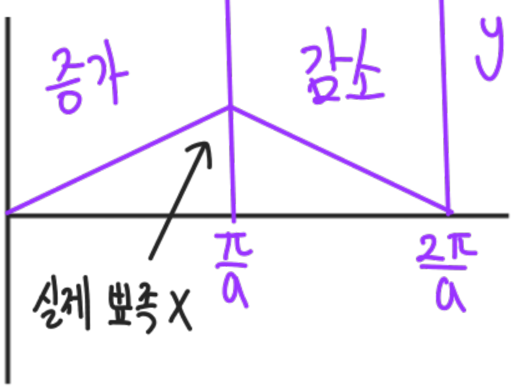
29. 함수 $f(x)=\sin(ax)\,(a\neq 0)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) $\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(x)dx \geq \frac{1}{2}$
>
> (나) $0<t<1$인 모든 실수 t에 대하여
> $$\int_0^{3\pi}\underbrace{|f(x)+t|}_{f_1(x)}dx=\int_0^{3\pi}\underbrace{|f(x)-t|}_{f_2(x)}dx$$
> 이다.

(가) $\left[-\frac{1}{a}\cos(ax)\right]_0^{\frac{\pi}{a}}=\frac{2}{a}\geq\frac{1}{2}$, $0<a\leq 4$

$\int_0^{3\pi} f_1(x)-f_2(x)\,dx=0$





$y=\int_0^x f_1(t)-f_2(t)\,dt$

x 값이 주기 $\frac{2\pi}{a}$의 정수 배일때만 정적분 값이 0이다.

$\int_0^{3\pi}=0$ 이므로

$3\pi=\frac{2\pi}{a}\times n$ (n 자연수)

$a=\frac{2n}{3}$, $0<a\leq 4$이므로

$a=\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{6}{3},\frac{8}{3},\frac{10}{3},\frac{12}{3}$

합은 $\left(\frac{2}{3}+\frac{12}{3}\right)\times 3=14$

$\boxed{14}$

30. 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를 ($y=-ax$ 점근선)
$$f(x)=-\frac{ax^3+bx}{x^2+1}=-ax+\frac{(a-b)x}{x^2+1}$$
라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq 0$이고, 두 함수 $g(x)=f(x)-f^{-1}(x)$, $h(x)=(g\circ f)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$\boxed{10}$

> (가) $g(2)=h(0)$
>
> (나) $g'(2)=-5h'(2)$

$f(-x)=-f(x)\Rightarrow$ 기함수.
$f(0)=0$, $f^{-1}(0)=0$.

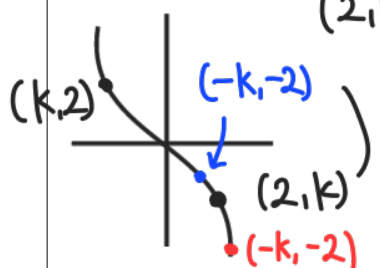
$4(b-a)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $g(2)=f(2)-f^{-1}(2)$
$h(0)=g(f(0))=g(0)=f(0)-f^{-1}(0)=0-0=0$
$\rightarrow f(2)=f^{-1}(2)$ 를 k라 하면 $f(2)=k$, $f(k)=2$

$f'(x)=\frac{(-3ax^2-b)(x^2+1)+(ax^3+bx)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-ax^4+(b-3a)x^2-b}{(x^2+1)^2}$

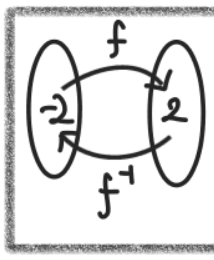
$f'(x)$는 실수 전체 연속이고 $f'(x)\neq 0$ 이므로 항상 양수 OR 음수.
$\lim_{x\to\infty} f'(x)=-a<0$ 이므로 항상 $f'(x)<0$, f는 감소

$(2,k),(k,2),(-k,-2)$는 $y=f(x)$ 위의 점



x 비교 $-k<2$, y 비교 $k<-2$) 모순. 빨간 경우도 모순.
$\therefore k=-2$.
$f(-2)=2$, $f(2)=-2$

(나) $g'(2)=f'(2)-\frac{1}{f'(-2)}$ ←



$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(k)}$

$-5h'(2)=-5g'(f(2))f'(2)$
$=-5g'(-2)f'(2)$
$=-5\left(f'(-2)-\frac{1}{f'(2)}\right)f'(2)=-5(f'(-2)f'(2)-1)$

$f'(2)-\frac{1}{f'(-2)}=\frac{\boxed{f'(-2)f'(2)-1}}{\boxed{f'(-2)}}=\boxed{-5}\boxed{(f'(-2)f'(2)-1)}$

$f'(-2)f'(2)=1$ 또는 $f'(-2)=-\frac{1}{5}$

이때 $f'(-2)=f'(2)$ 이므로 (대칭) $f'(2)=-1$ 또는 $-\frac{1}{5}$

① $f(2)=-2$ ② $f'(2)=-1$ ③ $f'(2)=-\frac{1}{5}$

$\Rightarrow 4a+b=5$ $\Rightarrow 28a-3b=25$ $\Rightarrow 28a-3b=5$

①,② 연립: $a=1$, $b=1$ (서로 다른 양수 a,b X)
①,③ 연립: $a=\frac{1}{2}$, $b=3$. $\therefore 4(b-a)=10$. $\boxed{10}$

제 2 교시

수학 영역(기하)

5 지 선 다 형

×3

23. 두 벡터 $\vec{a}=(m-2, 3)$과 $\vec{b}=(2m+1, 9)$가 서로 평행할 때, 실수 m의 값은? [2점]

×3

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

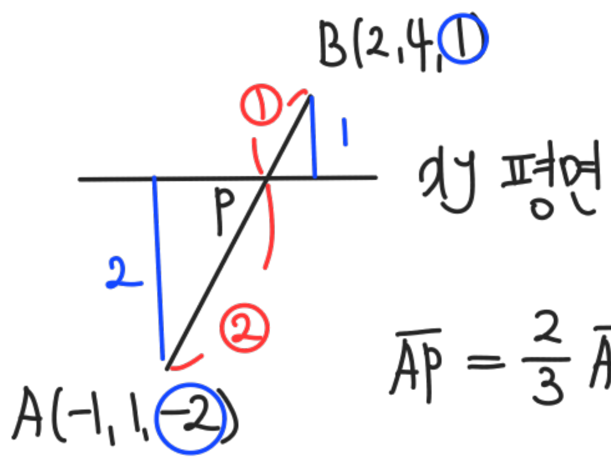
$3(m-2) = 2m+1$

$m = 7$

24. 좌표공간의 두 점 A$(-1, 1, -2)$, B$(2, 4, 1)$에 대하여 선분 AB가 xy평면과 만나는 점을 P라 할 때, 선분 AP의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{14}$ ④ $\sqrt{15}$ ⑤ 4

$\overline{AB} = \sqrt{(2-(-1))^2+(4-1)^2+(1-(-2))^2} = 3\sqrt{3}$



$\overline{AP} = \frac{2}{3}\overline{AB} = 2\sqrt{3}$

25. 양수 a에 대하여 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선이 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$과 포물선 $y^2=ax$에 동시에 접할 때, 포물선 $y^2=ax$의 초점의 x좌표는? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

$y=mx+\frac{p}{m}$

$y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{9+16}$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{a}{4}\cdot 2$) 일치

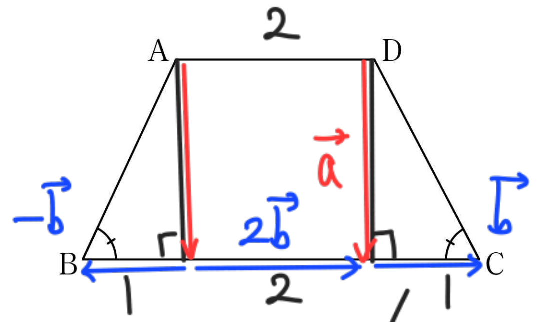
$5=\frac{a}{2}$, $a=10$.

$F(p,0)$, $p=\frac{a}{4}=\frac{5}{2}$

26. 그림과 같이 변 AD가 변 BC와 평행하고 $\angle CBA=\angle DCB$인 사다리꼴 ABCD가 있다.

$|\overrightarrow{AD}|=2$, $|\overrightarrow{BC}|=4$, $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{5}$

일 때, $|\overrightarrow{BD}|$의 값은? [3점]

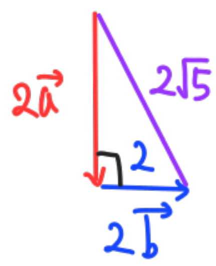


① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+3\vec{b}$

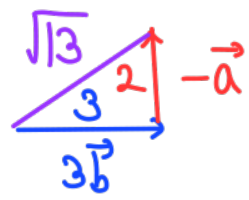
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\vec{a}+2\vec{b}$



$|2\vec{a}|=4$

$|\vec{a}|=2$

$\overrightarrow{BD}=-\vec{a}+3\vec{b}$

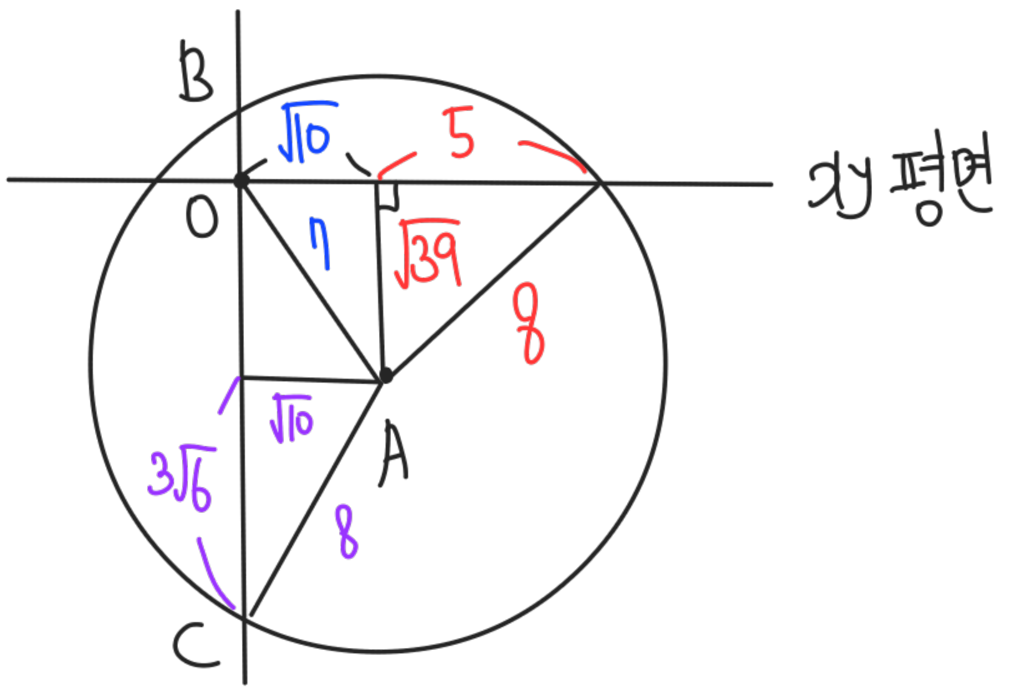


넓이비 이용한 내분비 찾기

27. 좌표공간에 $\overline{\mathrm{OA}}=7$인 점 A가 있다. 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 8인 구 S와 xy평면이 만나서 생기는 원의 넓이가 25π이다. 구 S와 z축이 만나는 두 점을 각각 B, C라 할 때, 선분 BC의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

$\pi \cdot 5^2$

① $2\sqrt{46}$ ② $8\sqrt{3}$ ③ $10\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{13}$ ⑤ $6\sqrt{6}$



z축 ① 빨 ② 파 ③ 보 순서로 구하였음.

28. 삼각형 ABC와 삼각형 ABC의 내부의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}=0$, $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=3$

(나) $\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PB}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=-2|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2$

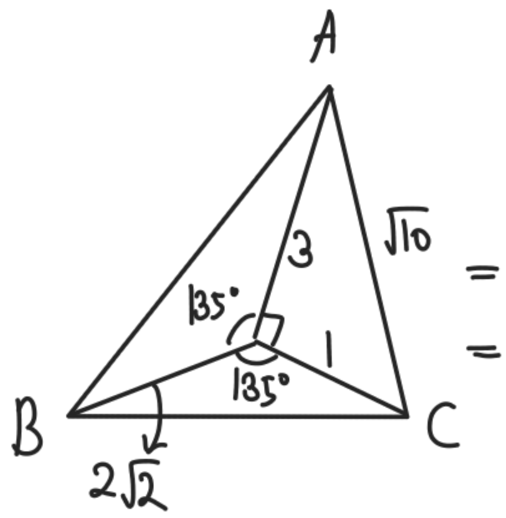
직선 AP와 선분 BC의 교점을 D라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=k\overrightarrow{\mathrm{PD}}$이다. 실수 k의 값은? [4점]

① $\dfrac{11}{2}$ ② 6 ③ $\dfrac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\dfrac{15}{2}$

(가) $\vec{PA}$, $\vec{PC}$ 90°, 크기 $3:1$

(나) $\vec{PB}\cdot\vec{PC}=-\frac{\sqrt{2}}{2}|\vec{PB}||\vec{PC}| \rightarrow \vec{PB}, \vec{PC}$ 135°

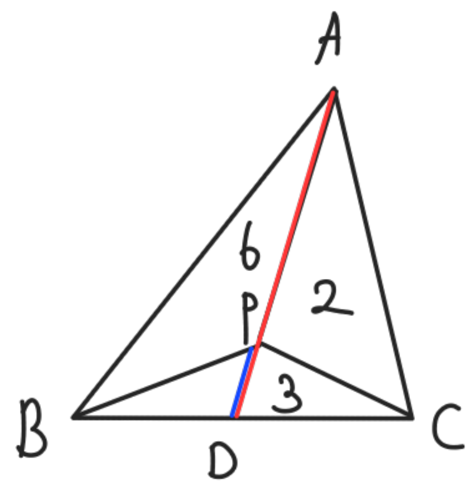
$-\frac{\sqrt{2}}{2}|\vec{PB}||\vec{PC}|=-2|\vec{PC}|^2 \rightarrow \vec{PB}, \vec{PC}$ 크기 $2\sqrt{2}:1$



$\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA$

$= 3\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sin 135^\circ : 2\sqrt{2}\cdot 1\cdot \sin 135^\circ : 3\cdot 1$

$= 6 : 2 : 3$



$\triangle ABC : \triangle PBC$

$= 11 : 3$

$= \overline{AD} : \overline{PD}$

$\overline{AD} = \frac{11}{3}\overline{PD}$

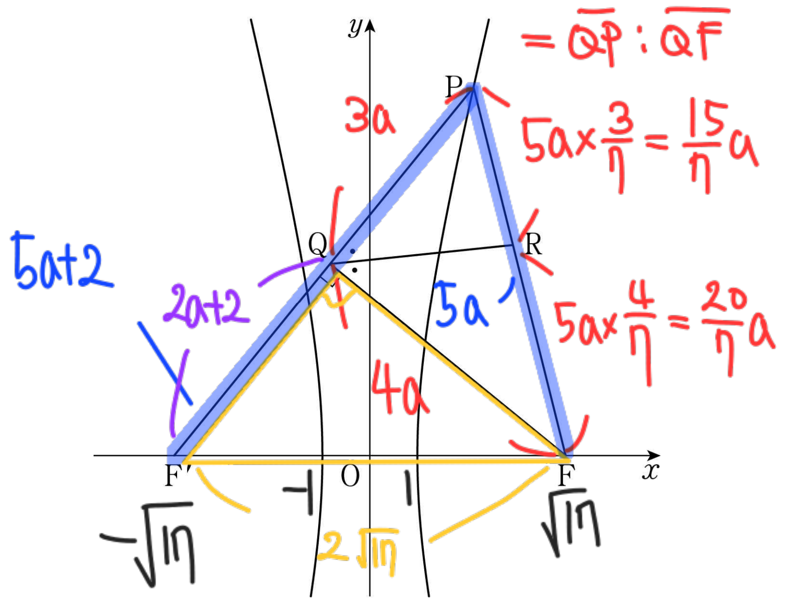
각의 이등분선 $a:b=c:d$

답만 맞추지 말고 논리 허점 없는지 복습하기
(여러 직각들 직각인 이유 설명할 수 있는지)

단답형

29. 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{16}=1$이 있다. 쌍곡선 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 점 F에서 선분 PF′에 내린 수선의 발을 Q라 하고, ∠FQP의 이등분선이 선분 PF와 만나는 점을 R라 하자. $4\overline{PR}=3\overline{RF}$일 때, 삼각형 PF′F의 넓이를 구하시오. (단, 점 F의 x좌표는 양수이고, ∠F′PF < 90°이다.) [4점]

$\overline{PR}:\overline{RF}=3:4$
$=\overline{QP}:\overline{QF}$



△QFF′ 피타. $4\times17=(4a)^2+(2a+2)^2$

$17=4a^2+a^2+2a+1$

$5a^2+2a-16=0$

$(5a-8)(a+2)=0$

$a=\frac{8}{5}$

△QFF′ + △PQF

$=\frac{1}{2}\times(2a+2)\cdot4a+\frac{1}{2}\cdot3a\cdot4a$

$=\frac{1}{2}\cdot(5a+2)\cdot4a=2a(5a+2)$

$=\frac{16}{5}\times10=32$

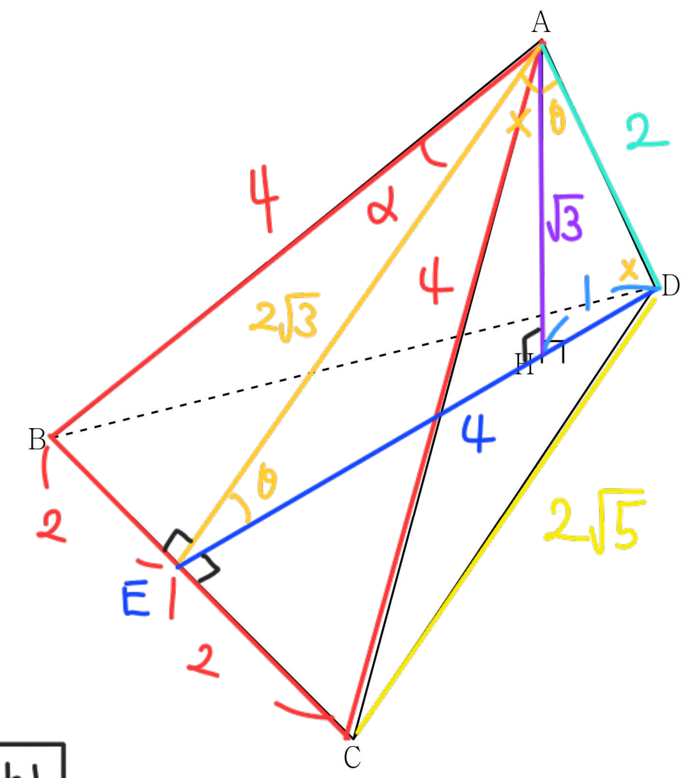
$\boxed{32}$

30. 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC를 한 면으로 하는 사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 놓여 있다. 직선 DH가 선분 BC와 만나는 점을 E라 할 때, 점 E가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) ∠AEH = ∠DAH
> (나) 점 E는 선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점이고 $\overline{DE}=4$이다.

이면각 α

삼각형 AHD의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



Check1

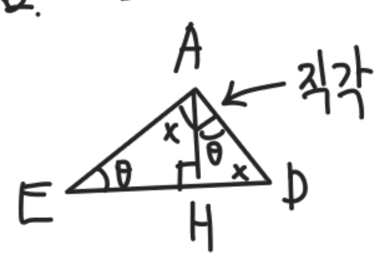
(나)에 의해 ∠DAC = 90°

$\overline{DE}$는 △BCD 수선. 삼수선 정리에 의해 $\overline{AE}$는 △ABC 수선

∴ E는 $\overline{BC}$ 중점. $\overline{CD}=2\sqrt{5}$

Check2

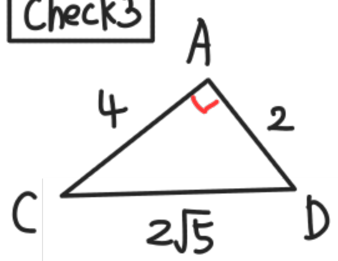
(가)에 의해



$\overline{AE}$, $\overline{AD}$ 수직

$\overline{AD}=2$

Check3



$1:2:\sqrt{5}\rightarrow\overline{AC},\overline{AD}$ 수직

△ABC, $\overline{AD}$ 수직

이면각
= 두 선분 $\overline{AB}$, $\overline{AE}$ 이루는 각

답 $\triangle AHD=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{3}{4}$ $\boxed{7}$