20190921(나)

21. 사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$에 대하여

우함수, y축 대칭
$(f(-x)=f(x))$

$x \geq 0$에서 정의된 함수

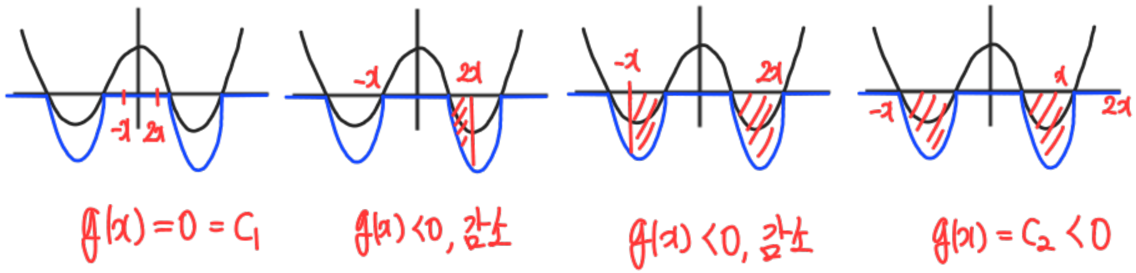
$$g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}dt$$

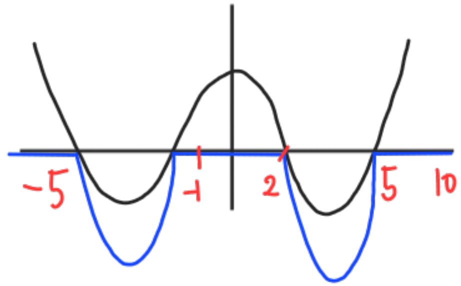
$$= h(t) = \begin{cases} 0, & f(t) \geq 0 \\ 2f(t), & f(t)<0 \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 $g(x)=c_1$ (c_1은 상수)
(나) $1<x<5$에서 $g(x)$는 감소한다.
(다) $x>5$에서 $g(x)=c_2$ (c_2는 상수)

$f(\sqrt{2})$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]





$$f(x)=(x+5)(x+2)(x-2)(x-5)$$
$$=(x^2-4)(x^2-25)$$

$$f(\sqrt{2})=2\times 23=46$$

$\boxed{46}$

#Comment

① $f(x)>0$이면 (정적분)$=$(넓이)>0

② $f(x)<0$이면 (정적분)$=-$(넓이)<0

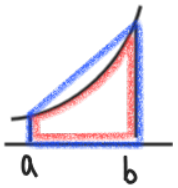
20201128(나)

28. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$\int_1^x f(t)\,dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$$ 이다.
>
> (나) $\int_0^2 f(x)\,dx = 5\int_{-1}^{1} x f(x)\,dx$

$f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

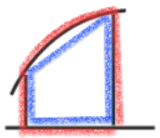
* 아래로 볼록한 함수 $(f''(x)>0)$



(사다리꼴) > (정적분)

$\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) > \int_a^b f(x)\,dx$

* 위로 볼록한 함수 $(f''(x)<0)$

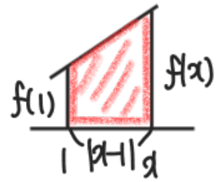


(사다리꼴) < (정적분)

$\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) < \int_a^b f(x)\,dx$

(가) $f(x) = a_n x^n + \cdots$ 라 하고 대입해도 되지만..

(사다리꼴 넓이) = (정적분) 이므로 위로 볼록 X, 아래로 볼록 X ⇒ 직선 !



$\frac{x-1}{2}(f(x)+f(1)) = \int_1^x f(t)\,dt$

따라서 $f(x) = ax+1$ ($\because f(0)=1$)

(나) $\int_0^2 f(x)\,dx = \left[\frac{a}{2}x^2+x\right]_0^2 = 2a+2$

$5\int_{-1}^{1} x f(x)\,dx = 5\int_{-1}^{1} ax^2+\cancel{x}\,dx = 5\times 2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{10}{3}a$

$2a+2 = \frac{10}{3}a,\quad a=\frac{3}{2} \quad \therefore f(x)=\frac{3}{2}x+1$

$f(4)=7 \quad \boxed{7}$

#Comment

① (가) 조건을 사다리꼴 넓이로 해석하기

② (사다리꼴 넓이) VS (정적분) 대소 비교 → 위/아래 볼록성

2022예시12

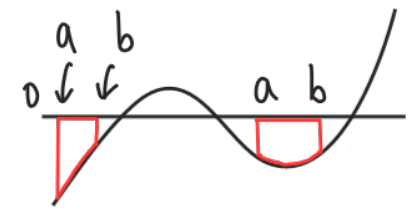
12. $0<a<b$인 모든 실수 a, b에 대하여

$$\int_a^b (x^3-3x+k)\,dx>0$$

이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

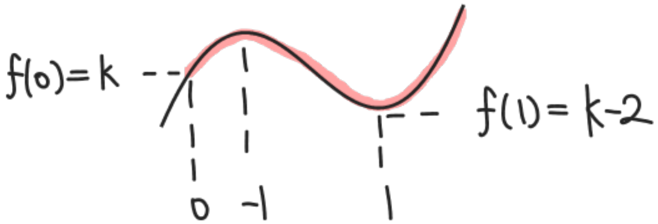
$f(x)=x^3-3x+k$

$f(x)<0$ 인 x $(x\geq 0)$ 있으면 $\int_a^b f(x)dx<0$ 인 a, b 존재



$x\geq 0$ 에서 $f(x)\geq 0$ 이다.

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$



$f(0)=k\geq 0$, $f(1)=k-2\geq 0$

$\therefore$ $k\geq 2$ $\boxed{2}$

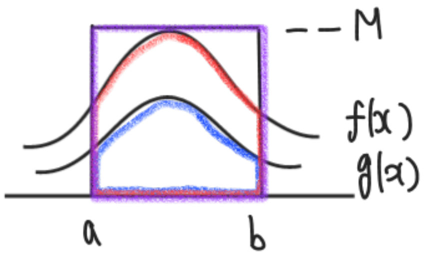
#Comment

① $f(x)\geq 0$이면 $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

② $f(x)\geq g(x)$이면 $\int_a^b f(x)dx\geq \int_a^b g(x)dx$

③ $m\leq f(x)$이면 $\int_a^b f(x)dx\geq m(b-a)$

④ $f(x)\leq M$이면 $\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$



$0\leq g(x)\leq f(x)\leq M$

$0\leq \int_a^b g(x)dx\leq \int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$

20210918(가)

18. 함수

$\{\log_e(1+x^4)\}^{10}$ $(e=2.71xxx)$

미적 미선택자는 밑이 2.7인 로그로 이해

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ \{\ln(1+x^4)\}^{10} & (x>0)\end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x \underbrace{f(t)f(1-t)}_{=h(t)}\,dt$$

☆ 보자마자 $h(x)$는 $x=\frac{1}{2}$ 대칭!!

$(h(1-x)=f(1-x)f(x)=h(x))$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x\le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=0$이다.

ㄴ. $g(1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. $g(a)\ge 1$인 실수 a가 존재한다.

ㄱ $x\le 0$ 이면 $x\le t\le 0$ 에서 $f(t)=0$

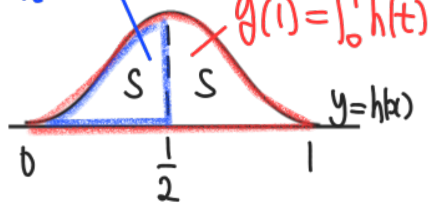
$$g(x)=\int_0^x \underbrace{f(t)}_{=0}f(1-t)\,dt=\int_0^x 0\,dt=0$$

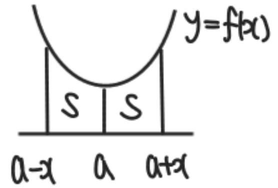
ㄴ 대칭성 있는 함수의 정적분 → 넓이로 생각해보자.

$g(1)=\int_0^1 h(t)\,dt$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\,dt$

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\,dt=S$

$g(1)=\int_0^1 h(t)\,dt=2S$





$f(a-x)=f(a+x)$

$\int_{a-p}^{a+p} f(x)\,dx=2\int_a^{a+p} f(x)\,dx$

$\ln 2<1$ (미적분)

~~ㄷ~~ $0\le x\le 1$ 에서 $1+x^4\le 2$, $f(x)=\{\ln(1+x^4)\}^{10}\le(\ln 2)^{10}<1$

$0\le x\le 1$ 에서 $0\le 1-x\le 1$ 이므로 $0\le f(1-x)<1$

따라서 $0\le x\le 1$ 에서 $h(x)=f(x)f(1-x)<1$

$a=1$ 일때 최댓값 $g(1)=\int_0^1 h(t)\,dt<1\cdot(1-0)=1$

$\boxed{ㄱ, ㄴ}$

#Comment

① $f(a-x)=f(a+x)$이면 $x=a$ 선대칭

② $f(x)=f(2a-x)$이면 $x=a$ 선대칭

③ $x=a$ 선대칭이면 $\int_{a-p}^{a+p} f(x)dx=2\int_a^{a+p} f(x)dx$

④ $f(x)\le M$이면 $\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

20220914

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-f(0) & (x\le 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x>0) \end{cases}$$

(0, 0) 지나

② −p 이동

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

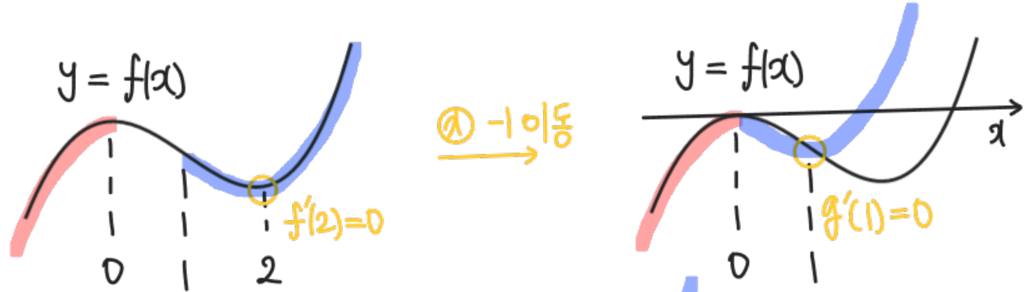
ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1)=0$이다.

ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.

ㄷ. $p\ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \ge 0$이다.

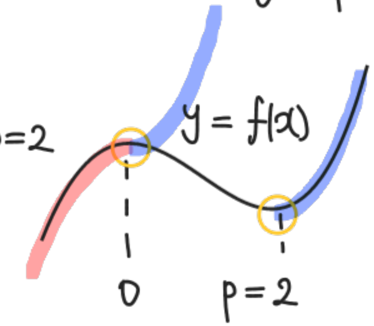
$\boxed{ㄱ, ㄴ, ㄷ}$

ㄱ

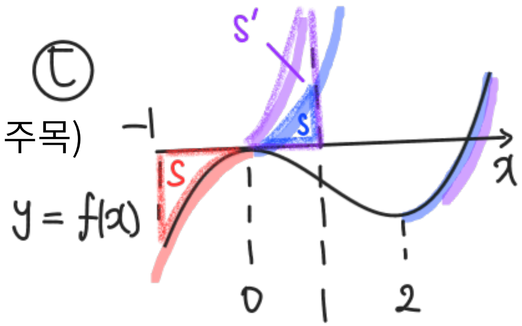


ㄴ $g'(0-)=f'(0)=0,$

$g'(0+)=f'(p)$ // , $f'(p)=0.$ $p=2$

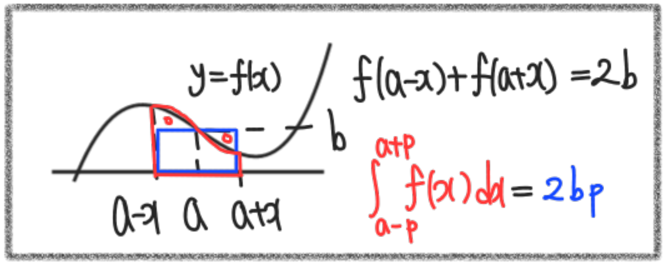


ㄷ



p=2 일때 대칭 S=S, $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx=0$

p>2 일때 S'>S, $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx>0$



#Comment

① $y=f(x-a)+b$그래프 그리는 방법(경계점에 주목)

② 삼차함수는 점대칭(변곡점)

③ $f(a-x)+f(a+x)=2b$이면 $(a,\ b)$ 점대칭

④ $f(2a-x)+f(x)=2b$이면 $(a,\ b)$ 점대칭

⑤ $(a,\ b)$ 점대칭이면 $\int_{a-p}^{a+p} f(x)dx=2bp$

정적분의 넓이 관점

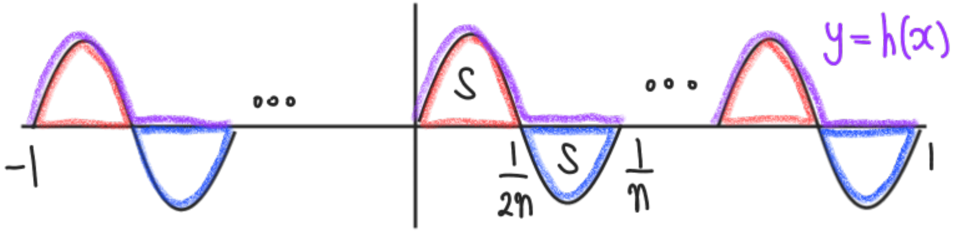
20211120(가)

20. 함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0, 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은? [4점]

> 함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
> $$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx=2,\quad \int_{-1}^{1} xh(x)\,dx=-\frac{1}{32}$$
> 이다.

$[-1, 1]$에서 $2n$개

$y=f(nx)=\pi\sin(2n\pi x)$: 기함수



$$S=\int_0^{\frac{1}{2n}} \pi\sin(2n\pi x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2n}\cos(2n\pi x)\right]_0^{\frac{1}{2n}}=\frac{1}{n}$$

미적

$$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx=\int_{-1}^{1} f(nx)\times(0\text{ 또는 }1)\,dx=2$$

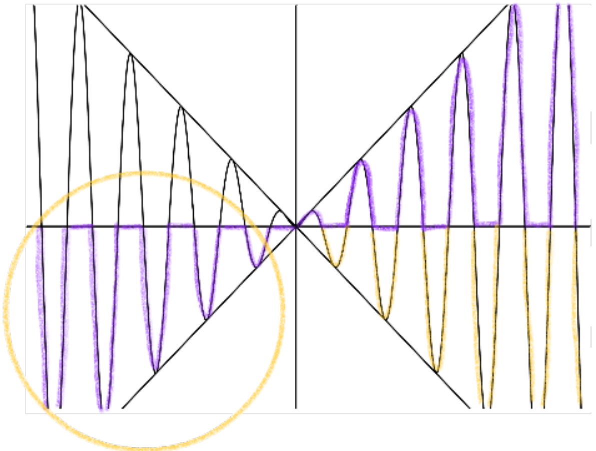
 → (윗부분 적분) $=\frac{1}{n}\times 2n=2$

 → (아랫 부분 적분) $=-2$

#Comment

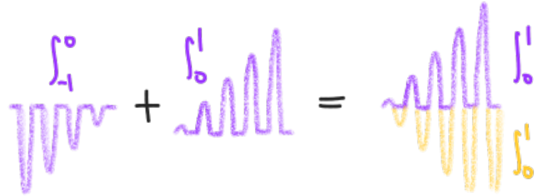
① (기함수)×(기함수)=(우함수)

② (일차함수)×(삼각함수) 꼴 정적분



$y=xh(x)$

$y=xf(nx)$
$=\pi x\sin(2n\pi x)$: 우함수

$\int_{-1}^{1} xh(x)\,dx=$  $=\int_0^1 xf(nx)\,dx$

$$\int_{-1}^{1} xh(x)\,dx=\int_0^1 xf(nx)\,dx=\int_0^1 \pi x\sin(2n\pi x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{x}{2n}\cos(2n\pi x)\right]_0^1-\int_0^1 -\frac{1}{2n}\cos(2n\pi x)\,dx$$

$$=-\frac{1}{2n}+\left[\frac{1}{4n^2}\sin(2n\pi x)\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{2n}$$

$$=-\frac{1}{32}\qquad n=16\qquad \boxed{16}$$

미적분