2022학년도 대학수학능력시험 대비

꽃전 모의평가

해설

꼰대ver

CHOCOLATTE MATH LAB

초코라떼 수학연구소

성공은 조용히 와서 시끄럽게 깨우지

수퍼비 RAP LEGEND 2 Kidk kidk 中

1. $5^{\sqrt{2}+1} \times \dfrac{1}{\sqrt{5^{2\sqrt{2}}}}$ 의 값은?

$5^{\sqrt{2}+1} \times \dfrac{1}{\sqrt{5^{2\sqrt{2}}}} = 5^{\sqrt{2}+1} \times \left(5^{2\sqrt{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} = 5^{\sqrt{2}+1} \times 5^{-\sqrt{2}}$

$= 5^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = 5$

Comment)

계산실수 주의

2. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2\,dx - a\int_{0}^{2} x^2\,dx = 0$일 때, 상수 a의 값은?

적분범위가 대칭이면 함수를 관찰해 볼 필요가 있다.

$\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2 dx$에서 x^2이 우함수고 적분 범위가 대칭이므로,

$\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2 dx = 2\int_{0}^{2} x^2 dx$ 로 바꿀 수 있다.

즉, $\displaystyle 2\int_{0}^{2} x^2 dx - a\int_{0}^{2} x^2 dx = 0$ 이므로 $a = 2$이다.

혹시 적분범위의 대칭을 발견하지 못하였고, 함수가 우함수임을 발견하지 못하였어도 아래와 같이 계산하여 풀어도 상관없다. 하지만 난이도가 높은 문제에서 발견하지 못한다면, 큰일 날 수도 있으므로 습관적으로 범위와 함수를 체크하는 연습을 하자!

$\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2 dx - a\int_{0}^{2} x^2 dx$

$= [\frac{1}{3}x^3]_{-2}^{2} - a[\frac{1}{3}x^3]_{0}^{2}$

$= \dfrac{16}{3} - \left(a \times \dfrac{8}{3}\right) = 0$이므로

$\dfrac{16}{3} = a \times \dfrac{8}{3}$,

$\therefore a = 2$이다.

Comment)

우함수 : x축기준 대칭인 함수

$f(x) = ax^n + bx^{n-2} + \circ\circ\circ + cx^0$ (단, n은 짝수)인 다항함수는 항상 우함수이며, 적분범위가 $x=0$ 기준으로 대칭일 때, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$로 변형할 수 있다.

기함수 : 원점기준 대칭인 함수

$f(x) = ax^{n-1} + bx^{n-3} +$ ∘ ∘ ∘ $+ cx$ (단, n은 짝수)인 다항함수는 항상 기함수이며, 적분범위가 $x = 0$ 기준을 대칭일 때, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ 으로 변형할 수 있다.

3. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4 - a_3 = 2, a_6 = 13$일 때, a_{10}의 값을 구하시오.

$a_4 - a_3 = 2$라는 조건을 보면 공차가 2라는 것을 알 수 있다.

$a_{10} = a_6 + (4 \times d) = 13 + 8 = 21$

$\therefore a_{10} = 21$이다.

(혹시 이해가 안되신다면 개념을 다시 공부해야합니다! 반드시!)

Comment)
너무 쉽죠잉?

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.
$\lim_{x \to 1+} f(f(x)) - \lim_{x \to 0-} f(x)$의 값은?

$\lim_{x \to 1+} f(f(x)) = \lim_{x \to -1} f(x) = 0$

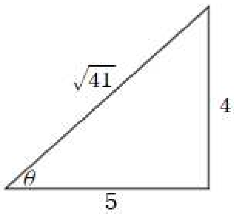
$\lim_{x \to 0-} f(x) = -1$

$\lim_{x \to 1+} f(f(x)) - \lim_{x \to 0-} f(x) = 0 - (-1) = 1$

Comment)
물론 이 문제는 함정이 없지만,
합성함수의 극한을 다룰 때는 항상 좌극한값, 우극한값 주의하기!
또한 이와 같은 유형의 문제에서 합성되어 있는 함수는 항상 동적으로(?) 접근할 것

5. $\dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$인 θ에 대하여 $\cos\theta = \dfrac{5}{\sqrt{41}}$일 때,

$\cot\theta$의 값은?



$\dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 일 때, $\tan\theta$는 항상 음수이다.

$\cot\theta$는 $\tan\theta$의 역수이므로, $\dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$의 범위에서, $\cot\theta$ 역시 항상 음수이다.

이때 $\tan\theta$의 값은 $-\dfrac{4}{5}$이므로, $\cot\theta = -\dfrac{5}{4}$이다.

Comment)
삼각비를 구할 땐 직각삼각형을 그리고, 비율을 바로 대입하여 피타고라스 법칙을 사용하자!
(꼭 이렇게 해야할 필요는 없으니까 본인스타일대로 해도 좋다.)
단, 부호는 반드시 주의하여야한다!
항상 삼각비가 나오면 '**부호와 각의 범위**'에 대해서 예민해지자!
그래야 실수를 하지 않는다!

6. 함수 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + mx + 1$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 m의 최솟값은?

역함수가 존재하려면 원함수는 일대일대응 함수이어야 한다. $f(x)$가 일대일대응 함수일려면 $f(x)$는 단조증가함수 또는 단조감소함수이어야 한다. 즉, 도함수의 부호가 항상 0보다 크거나 같거나, 작거나 같아야한다.
이 때, 주어진 함수 $f(x)$는 최고차가 양수인 삼차함수이므로 도함수인 이차함수 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 0보다 크거나 같아야 한다.
$f'(x) = x^2 + 4x + m \geq 0$
이때, 최고차항의 계수가 양수인 이차함수가 항상 0보다 크거나 같으려면, 이차함수가 중근 또는 근을 가지면 안되므로 판별식$D \leq 0$이어야 한다. 즉, $D = 4^2 - 4 \times 1 \times m \leq 0$
$16 - 4m \leq 0$, $16 \leq 4m$이므로, $m \geq 4$이다. 즉 m의 최솟값은 4이다.

Comment)
개념도 쉽고, 딱히 실수할 구간이 없는 문제
이런건 깔끔하게 점수 받아먹어주자. 계산실수는 절대 안되는 문제
혹시 몰라서 틀렸다면 도함수의 의미와 이차함수 판별식 개념정리하십시오 !

7. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2\ (x<a) \\ 9x+t \quad (x\ge a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분 가능할 때, $a+t$의 최댓값은?
(단, a와 t는 상수이다.)

미분가능하다. =〉 어떤 구간에서 원함수가 연속이고 좌미분계수와 우미분계수가 같아야한다.
연속 =〉 함수값 = 좌극한값 = 우극한값

먼저, x^3-3x^2과 $9x+t$는 둘 다 실수 전체 집합에서 미분가능한 함수이다. (당연하지, 다항함수니까, 다항함수는 특별한 변형이 없으면 그냥 미분가능하다.) 문제는 두 다항함수를 $x=a$라는 점을 기준으로 연결해버린것이고 당연히 $x=a$를 제외한 나머지 점들에서는 다 미분이 가능하므로, $x=a$에서 미분이 가능하면 $f(x)$는 미분이 가능하다. 즉 $x=a$에서 $f(x)$가 미분가능해야하므로, $f(x)$가 $x=a$에서 연속이어야하며, 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 한다. 즉, $f(x)$가 $x=a$에서 연속일려면, $\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$를 만족해야하므로,

$\lim_{x\to a-}f(x)=a^3-3a^2$

$\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)=9a+t$

$a^3-3a^2=9a+t$

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-6x\ (x<a) \\ 9 \qquad\quad (x\ge a) \end{cases}$$

이 역시, $\lim_{x\to a-}f'(x)=\lim_{x\to a+}f'(x)$ 이므로,

$\lim_{x\to a-}f'(x)=3a^2-6a$

$\lim_{x\to a+}f'(x)=9$

$3a^2-6a=9$

$3(a-3)(a+1)=0$

$a=3$ 또는 $a=-1$이다. 이때, $a+t$의 최댓값을 구해야하므로, 케이스를 나누어본다.

$i)\,a=3$일 때

$a^3-3a^2=9a+t$

$3^3-3\times3^2=9\times3+t$

$t=-27$이므로, $a+t$의 값은 -24이다.
(아무래도 이건 아닌 것 같다 인정?)

$ii)\, a = -1$일 때

$a^3 - 3a^2 = 9a + t$

$(-1)^3 - 3\times(-1)^2 = 9\times(-1) + t$

$t = 5$이므로, $a + t = 4$

즉, $a + t$는 $a = -1$일 때, 최댓값 4를 가진다.

Comment)

자세히 쓸려다보니 해설이 굉장히 길어졌지만 사실 굉장히 쉬운 문제

실제로 풀면 계산 몇 번 끄적이면 풀 문제

계산실수만 하지말자!

기억하고 넘어가야할 것은

미분가능 =〉 원함수 연속 그리고 좌미분계수=우미분계수

연속 =〉 함수값 = 좌극한값 = 우극한값

8. $\sum_{k=1}^{n}\left(\log_2(k+1) - \log_2 k\right)$ 의 값이 3 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은?

$\sum_{k=1}^{n}\left(\log_2(k+1) - \log_2 k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\log_2\left(\frac{k+1}{k}\right)\right)$

$= \log_2\frac{2}{1} + \log_2\frac{3}{2} + \log_2\frac{4}{3} + \ldots + \log_2\frac{n}{n-1} + \log_2\frac{n+1}{n}$

$= \log_2\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\ldots\times\frac{n}{n-1}\times\frac{n+1}{n}\right) = \log_2\left(\frac{n+1}{1}\right)$

3이하의 자연수는 1,2,3이므로,

$\log_2(n+1) = 1$일 때,

$\log_2(n+1) = \log_2 2$

$n = 1$

$\log_2(n+1) = 2$일 때,

$\log_2(n+1) = \log_2 4$

$n = 3$

$\log_2(n+1) = 3$일 때,

$\log_2(n+1) = \log_2 8$

$n = 7$

조건을 만족하는 모든 자연수 n의 값의 합은 $1+3+7=11$이다.

Comment)

<u>로그와 $\sum$의 관계를 생각해볼것!</u>

(로그의 합은 진수의 곱연산 이므로 시그마와 로그가 나온다면, '진수가 연속적으로 약분되지 않을까?' 라고 생각해볼 것. 하지만 혹시 바로 보이지 않거나, 좀 더 복잡한 시그마 식들은 시그마를 풀어보면서 분석하는 것도 좋습니다.)

보통 시그마나 절댓값같은 기호를 보면 당황해서 손도 못대는 친구들이 많은데, 당황하지 말고 침착하게 접근하면 된다. 시그마 식을 보았을 때 보자마자 모르겠으면, 시그마를 풀어서 덧셈식으로 바꾼 후, 규칙을 찾아보며 식을 분석하면 된다.

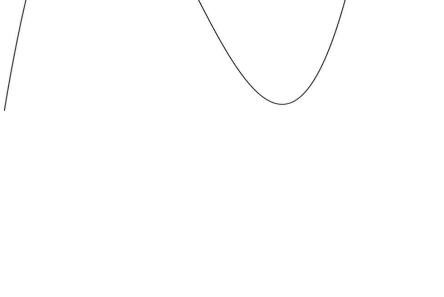
시그마기호는 덧셈이다. +기호를 보고 당황하지 말자!

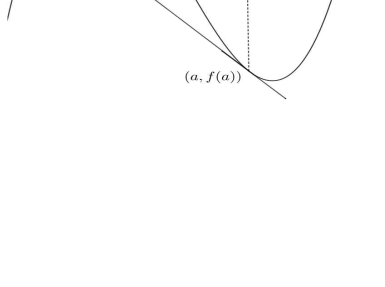
이 문제를 실수로라도 틀렸다면, 210621 또는 211227을 복습할 것.

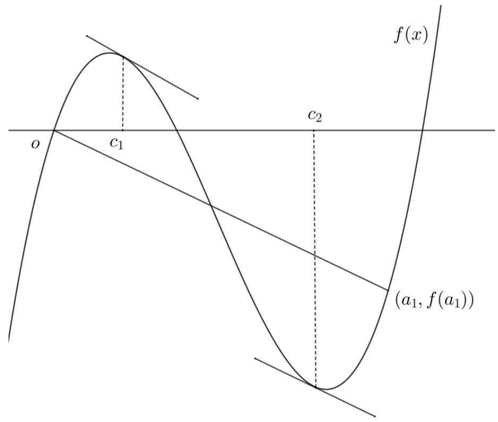
9. 함수 $f(x)=x^3-4x^2+3x$에서 $af'(c)=f(a)$를 만족하는 c의 개수가 2가 되도록하는 양수 a의 최솟값은? (단, $0<c\le a$)

$af'(c)=f(a)$이므로, $f'(c)=\dfrac{f(a)}{a}$이다.(Comment.1)(일단 깔끔하게 같은 미지수는 같은 변에 있도록 정리한다. 그 이후에 관찰!) 이 때, $f'(c)$는 $x=c$에서의 접선의 기울기이고, $f(0)=0$이므로, $\dfrac{f(a)}{a}=\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}$이다. 즉, 점$(0,0)$과 점$(a,f(a))$를 지나는 직선의 기울기와 같은 기울기를 가지는 점이 구간 $(0,a]$에서 두 개가 존재하도록 하는 최소의 a값을 찾는 문제이다.(Comment.2) 일단, 평균값정리에 의해 주어진 구간에서c는 무조건 한 개 이상 존재한다. 수식으로 다 확인하는 것은 어려울 것 같으므로, 그래프로 접근해보겠다.

원점에서 임의의 점$(a,f(a))$를 찍어서 직선을 그리면 위와 같이 그려진다. 처음에는 c의 개수가 1개이다가 임의의 한 점을 지난 이후에는 c의 개수가 2개가 된다. 그리고 그 경계가 되는 임의의 한 점은 원점을 지나는 접선이다. ($0<c\le a$이므로)







즉, 원점을 지나는 접선의 접점의 x좌표를 b라하였을 때, (평균변화율 = 순간변화율)이므로

$f'(b) = \frac{f(b)-0}{b-0}$ (단, $b>0$)이고, $3b^2-8b+3=b^2-4b+3$이다.

$2b^2-4b=0$, $2b(b-2)=0$이므로, $b=2$이다. 즉 $x=2$일 때, 함수 $f(x)$의 접선이 c의 개수가 1개에서 2개로 증가하므로, 양수 a의 최솟값은 2이다.

Comment)

1. 아무 생각 없이 나누는, 그냥 그런 식정리인가?

2개의 미지수, 하지만 식은 1개다. 따라서 미지수의 값을 직접적으로 구하는 것은 너무 힘들다. 하지만 미지수끼리의 비는 구할 수 있다.

ex) $2a-b=-3a$라는 식을 보면 어떻게 정리하는가? $5a=b$라 정리하지 않는가? 따라서 $a:b=1:5$라는 비를 구할 수 있다. 위에서 a를 양변에 나누는 식정리도 이와 다를 없다. 같은 미지수끼리 같은 곳에 두고 정리하는 것은 전혀 이상한 것이 아니다!

2. 분수를 기울기로 해석하는 능력

기울기 $= \frac{(y\text{값의 변화량})}{(x\text{값의 변화량})}$, 또한 식에 미분계수 $f'(c)$가 있으므로, 분수를 기울기로 생각하는 것은 당연하다!

3. 평균값 정리

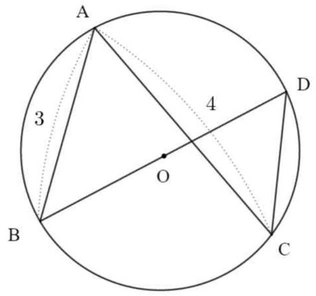
함수 $f(x)$가 열린구간 (a,b)에서 미분 가능할 때, 구간의 양 끝점을 이은 평균변화율과 그 구간 사이에 평균변화율과 같은 값을 가진 순간기울기가 적어도 하나 존재한다. 즉, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$를 만족하는 c가 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

4. 증명?

해설처럼 직관적 접근이 아니라 여러분께서 직접 이 문제를 논리적으로 해석해 보세요! (c가 a와 같을 수 있다는 조건을 생각한다.)

10. 그림과 같이 세 점 A, B, C를 지나는 원이 있다. 원 위의 점 D에 대하여 선분 BD가 원의 중심 O를 지난다.

$\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=4$, $\cos(\angle BAC)=\frac{3}{8}$일 때, 선분 CD의 길이는? [4점]



두 변과 그 사잇각이 주어졌으므로 선분 BC에 대하여 코사인법칙을 적용시킨다. (Comment.1)

$\overline{BC}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\frac{3}{8}$

$\overline{BC}=4$

선분 BC에 대하여 각 A와 각 D는 원주각 이므로 $\angle A=\angle D$, 선분 BD는 원의 지름이고 점 C는 원 위의 점 이므로 $\angle C=90^\circ$

따라서, $\tan(\angle D)=\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$

$\overline{CD}=4\times\frac{3}{\sqrt{55}}$

$=\frac{12\sqrt{55}}{55}$

Comment)

1. 사인법칙과 코사인 법칙을 사용하는 경우?

사인법칙을 사용하는 경우는 원에 내접하는 삼각형이 존재할 때, 삼각형의 한변의 길이와 마주보는 각의 크기가 주어졌을 때이다. 코사인법칙을 사용하는 경우는 삼각형의 두 변과 그 사잇각의 크기가 주어졌을 때와 삼격형의 세 변의 길이가 주어 졌을 때이다.

사인법칙과 코사인법칙을 문제의 상황에 맞게 잘 사용함과 동시에 삼각형의 넓이를 구하는 방법, 직각삼각형을 만들어 문제를 해결하는 방법 등이 중요한 능력이다. 최근 평가원에서 도형 관련 문제를 쉽지 않은 난이도로 출제하고 있기 때문에 반드시 도형(사인, 코사인 법칙)에 익숙해져야 한다.

11. 이차함수 $f(x)$가 어떤 정수 m에 대하여
$\lim_{x\to8}\frac{f(x)}{x-8}=\left|\lim_{x\to6}\frac{f(x)+m}{x-6}\right|=1$을 만족시킬 때, $f(10)+m$의 값은?

$\lim_{x\to8}\frac{f(x)}{x-8}=1$

극한값이 일정한 값으로 수렴하고, 분모가 0으로 수렴하므로, 분자 역시 0으로 수렴해야한다.

$\Rightarrow f(8)=0$이고 $\lim_{x\to8}\frac{f(x)-f(8)}{x-8}=f'(8)=1$이다.

(극한값으로 된 분수식을 보고 미분계수로 접근하는 것은 아주 당연한 접근!)

$\left|\lim_{x\to6}\frac{f(x)+m}{x-6}\right|=1$이므로, $\lim_{x\to6}\frac{f(x)+m}{x-6}=1$ 또는 $\lim_{x\to6}\frac{f(x)+m}{x-6}=-1$이다. 하지만 이차함수의 도함수인 일차함수(즉 기울기)는 일대일대응 함수이므로 $\lim_{x\to6}\frac{f(x)+m}{x-6}=-1$이다. (자세한 설명은 Comment.1)

(시간이 좀 더 걸리겠지만, 절댓값을 풀어서 $\lim_{x\to6}\frac{f(x)+m}{x-6}=1$인 경우와, $\lim_{x\to6}\frac{f(x)+m}{x-6}=-1$인 경우를 따져서 풀어도 됨. 풀이에서는 생략하겠음)

역시, 극한값이 일정한 값으로 수렴하고, 분모가 0으로 수렴하므로, 분자 역시 0으로 수렴해야한다.

$\Rightarrow f(6)=-m$이고 $\lim_{x\to6}\frac{f(x)-f(6)}{x-6}=f'(6)=-1$이다.

(이차함수의 대칭성으로 $m=0$임을 바로 알 수 있지만 우선 모른다는 가정하에 풀이를 이어나가겠음. 자세한 설명 역시 Comment.2)

이때, $f'(6)=-1$이고, $f'(8)=-1$이므로, $f'(x)=ax+b$라고 식을 세운 후 조건을 대입하여 미지수를 구한다.

$f'(6)=6a+b=-1$

$f'(8)=8a+b=1$

두 식을 연립하여서 a와 b의 값을 구하면 $a=1, b=-7$이다.

즉 $f'(x)=x-7$이므로, $f(x)=\frac{1}{2}x^2-7x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(8)=0$이므로, $f(8)=\frac{1}{2}\times8^2-7\times8+C=0$, $C=24$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2-7x+24$

$f(10)+m=f(10)-f(6)=4$

(m값은 결국 0이 맞았죠?? 이해가 안된사람은 Comment로 ㄱㄱ)

Comment)

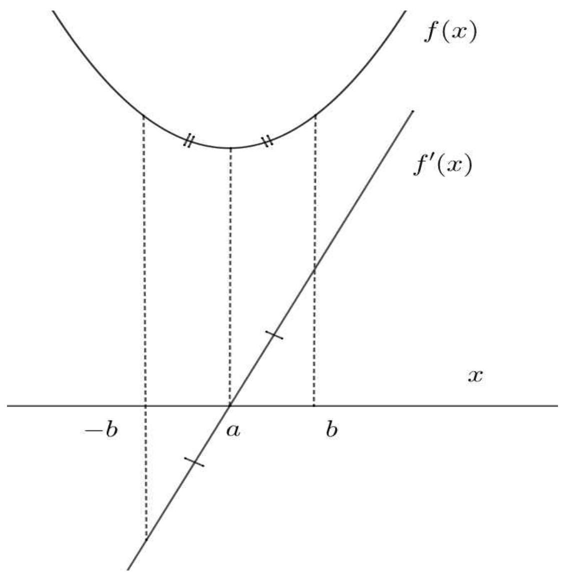
1. 왜 $\left|\lim_{x\to6}\frac{f(x)+m}{x-6}\right|=-1$인가?

이차함수의 도함수인 일차함수는 일대일대응 함수이다. 일대일대응 함수이므로 치역이 겹칠 수 없다. **즉 이차함수에서 대응하는 점이 같지 않는 이상, 서로 다른 점에서의 접선의 기울기는 같을 수 없다는 뜻이다.** 앞에서

$f'(8)=1$이라는 식으로, 이미 1이라는 기울기 값이 나왔기 때문에 $\left|\lim_{x\to6}\frac{f(x)+m}{x-6}\right|=1$이 될 수 없는 것이다.
(이해했어요?? 이해가 안되면 직접 이차함수와 일차함수를 그려보고 값을 대입해보세요!)

2. 이차함수의 대칭성으로 $m=0$을 어떻게 바로 알 수 있는가?

이차함수는 축을 기준으로 대칭인 함수이다. $x=a$를 축으로 가지는 이차함수는 $x=a$라는 직선을 기준으로 선대칭을 이룬다. 그러므로 이차함수의 도함수인 일차함수는 점대칭이다. 당연히 대칭의 기준이 되는 x좌표는 원함수와 같다. 즉 점$(a,0)$를 기준으로 점대칭을 이룬다. 위에서 $f'(8)=1$, $f'(6)=-1$이고 $f(8)=0$이므로, $f(6)=0$임을 바로 알 수있다. 위에서 설명한 바와 같이 도함수가 점$(7,0)$을 기준으로 점대칭을 이루고 있으므로 원함수인 이차함수는 $x=7$을 기준으로 선대칭을 이루고 있다. 따라서, $f(8)=0$이므로 $f(6)=0$이 되는 것이고. 대응되는 점에서의 기울기는 절댓값은 같고 부호만 다른 것이다. 밑의 이차함수를 보고 한번 이해해보자. 이해가 잘 되지 않으면, 이차함수와 그 도함수를 그려놓고 y축과 평행한 직선을 그어가면서 축을 기준으로 비교해보면 이해가 쉽게 될 것이다.



12. 양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_{0}^{2n} f(x)\,dx = 2n^2$

(나) $\int_{2n-2}^{2n-1} (f(x)-x)\,dx = n$

$\int_{1}^{2021} (f(x)-x)\,dx$의 값은?

이런 식을 보고 바로 기하적인 의미를 파악한다? 쉽지않다. **<u>처음보는 식, 복잡해보이는 식은 처음부터 하나씩 해봐서 식을 분석한다는 마인드를 가지고 접근해야한다.</u>** 앞에 시그마 문제처럼 똑같이 하나씩 해보면서 접근하면 된다. **"겁먹지말고 당황하지말자."**

우선 문제에서 원하는 답은 $\int_{1}^{2021} (f(x)-x)\,dx$이므로 (가)조건보다는, (나)조건을 먼저 접근하는 것이 좋다고 판단된다. 왜냐하면 적분식 안의 식의 형태가 똑같기 때문이다. 식이 무엇을 의미하는지 모르니 (나)조건에 $n=1$부터 적당히 대입하여보겠다.

$n=1$)

$\int_{0}^{1} (f(x)-x)dx = 1$

$n=2$)

$\int_{2}^{3} f(x) - xdx = 2$

$n=3$)

$\int_{4}^{5} (f(x)-x)dx = 3$

문제에서 원하는 $\int_{1}^{2021} (f(x)-x)\,dx$를 구하기에는 중간중간에 구멍이 뚫려있는 것을 알 수있다. 딱 이정도까지만 분석하면 된다. 그냥 (나)조건의 기하학적의미는 이게 끝이다. 여기서 수식적으로나 기하적으로나 더 알 수 있는 것이 없으므로, (가)조건으로 넘어간다. 만약에 (가)조건을 분석하였을 때, (나)조건의 비어있는 부분을 메꿔줄 수 있으면, 그쪽 방향으로 잡으면된다. 만약에 그렇게 나오지 않으면 다른 방법을 찾아가면 된다.(Comment.1)

(가)조건의 적분식은 $f(x)-x$가 아닌 $f(x)$이다. (가)조건을 (나)조건이나 문제에서 원하는 값과 연결지을려면, (가)조건식에서 $f(x)$를 $f(x)-x$로 변형해야한다. 하지만 적분값 안에서 저런식의 식변환은 쉽지 않다. 따라서 **<u>(가)를 다른 조건에 맞춘다는 쪽보다는 다른 조건들을 (가)에 맞추는 쪽으로 가는 것이 맞다.(Comment.2)</u>** 즉 (나)와 $\int_{1}^{2021} (f(x)-x)\,dx$를 (가)의 형태로 변형하는 쪽으로 풀이를 이어나간다.

(나)와 $\int_{1}^{2021} (f(x)-x)\,dx$는 적분식안에 $f(x)-x$형태의 식을 가지고 있으므로, 이를 $f(x)$형태로 바꾼다. 변

형하다보면 뒤에 $-x$부분의 적분식이 상수로 바뀐다는 것을 알 수 있다.

(나)의 식

$$\int_{2n-2}^{2n-1}(f(x)-x)dx=\int_{2n-2}^{2n-1}f(x)dx-\int_{2n-2}^{2n-1}xdx$$

$$\int_{2n-2}^{2n-1}f(x)dx-\frac{1}{2}=n$$

$$\therefore\int_{2n-2}^{2n-1}f(x)dx=n+\frac{1}{2}$$

(사실 어렵게 계산할 필요없이 $y=x$직선을 그리고 직접 넓이를 통해 적분값을 구하는 것이 더 빠르다. n이 자연수범위이고 적분값이 음수가 나올수가 없으므로, 그냥 삼각형의 넓이를 구하면 된다. 기울기가 1임을 이용하여 구하면 삼각형의 넓이를 쉽게 구할 수 있다.)

문제에서 원하는 답)

$$\int_{1}^{2021}(f(x)-x)\,dx=\int_{1}^{2021}f(x)dx-\int_{1}^{2021}xdx$$

$$=\int_{1}^{2021}f(x)dx-(\frac{1}{2}\times 2020^2)$$

(이 역시 수식으로 된 계산보다는, 그래프를 그리고 삼각형 그려서 삼각형넓이를 구하는 것이 더 빠르다. 이렇게 숫자가 클 때는 굳이 계산하기 보다는 계산식으로 놔두는 것이 더 편하다. 어차피 마지막계산에서 어떤식으로든 지워질 것이라는 믿음을 가지고 풀이를 계속 이어나가겠다.(Comment.3))

이제 $\int_{1}^{2021}f(x)dx$의 값만 알면 답을 구할 수 있다. 변형한 조건식을 이용하면, 아주 쉽게 구할 수 있지 않을까? **(결국 여기서 기하학적인 관점으로 접근하는 것보다, 단순 수식을 이용한 계산의 관점이 더 유리하다는 것을 알 수 있다.)**

$$\int_{1}^{2021}f(x)dx=\int_{0}^{2020}f(x)dx+\int_{2020}^{2021}f(x)dx-\int_{0}^{1}f(x)dx$$

(가)조건을 이용하여, $\int_{0}^{2020}f(x)dx=2\times(1010)^2$

아까 변형한 (나)조건을 이용하여, $\int_{2020}^{2021}f(x)dx=1011+\frac{1}{2}$

$$\int_{0}^{1}f(x)dx=1+\frac{1}{2}$$

구하는 답인 $\int_{1}^{2021}f(x)dx-(\frac{1}{2}\times 2020^2)$

$$=\left(2\times(1010)^2\right)+1011+\frac{1}{2}-\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\times 2020^2$$

$$=\left(2\times(1010)^2\right)-(\frac{1}{2}\times 4\times 1010^2)+1011+\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}$$

$$=1010$$

(사실 이 모의고사의 제작자는 (가) 조건의 $\int_0^{2n} f(x)\,dx = 2n^2$를 $\int_0^{2n}(f(x)-x)\,dx = 2n^2 - \int_0^{2n} x\,dx$ $\int_0^{2n}(f(x)-x)\,dx = 0$으로 조작하는 것도 좋다고 생각하였다. 문제에서 $\int_1^{2021}(f(x)-x)dx$를 구하라고 하였으니...)

Comment)

1. <u>미지수(n값)이 들어간 난해한 적분식에 대한 접근</u>

쫄 필요없다. 처음보는 식이고, 난해한 식일수록 당황하지 않고 차근차근 접근하면된다. 처음보는 $\sum$식을 덧셈식으로 풀어해치고, 처음보는 절댓값식을 0을 기준으로 $\pm$로 나누어서 풀 듯이 처음보는 적분식도 똑같이 접근하면 된다.

$n=1$)

$$\int_0^1 f(x) - xdx = 1$$

$n=2$)

$$\int_2^3 f(x) - xdx = 2$$

$n=3$)

$$\int_4^5 f(x) - xdx = 3$$

해설 초반부에 있었던 이 과정은 해설지에 필요없는 부분이다. 하지만 나는 단순한 문제해설이 아닌 문제 풀 때의 나의 생각을 보여주고 싶었다. 이 의미없어 보이는 과정이 이러한 문제를 푸는데 제일 중요한 과정이라 생각한다. **하나씩 대입하므로써, 문제를 이해하고, 문제푸는 방향을 설정하는 이 과정은 없어서는 안된다고 생각한다.**

2. 결국 이 문제의 핵심

이 문제의 조건 분석의 핵심이다.

결국 (가)조건과 (나)조건을 연결짓는게 이 문제의 핵심 포인트였고 저렇게 식조작을 못하면 문제를 풀 수 없다. **'저렇게 식 바꾸는거는 너무 창의적인 방법아니야?'** 라고 생각하는 사람들이 물론 있을 수 있다. 그래서 해설을 적을 때 내가 조건을 보고 하는 생각들을 적어놓은 것이다. 문제를 풀기위해서 주어진 조건들을 유기적으로 연결시키는 것은 당연하다. **식을 변형하지 않으면 조건을 사용할 수가 없는데 내가 다루기 쉬운 형태로 변형하는 것은 당연한게 아닌가?** 절대로 기발한 아이디어가 아니고 창의적인 방법이 아니다. 당연한 것이다.

3. 숫자가 크거나, 연산이 복잡한 식의 계산

내가 계산을 하지 않을 때는 두가지 경우가 있다.

첫째, 식을 그대로 보존하여 식에서 어떠한 규칙같은 것을 찾아야 될 경우 ex) 부분분수식..

이때는 식의 값보다는 식의 형태가 중요하기 때문에 계산하지 않고 식의 형태를 그대로 보존하고 문제를 푼다.

둘째, 숫자가 너무 크거나 계산이 복잡할 때

굳이 복잡한 계산을 해서 하나의 숫자로 적어놓을 필요가 없다

식을 마지막까지 쓴 이후에 정리가 안되면 그때가서 계산해도 늦지않는다. 분명 여러분이 더럽다고 생각한 계산은 마지막에 가면 아주 깔끔하게 약분이 되거나 인수분해가 되어서 간단히 계산될 확률이 높다. **<u>굳이 미리미리</u>**

계산해서 시간을 낭비하지말자! 나중에 해도 늦지 않는다!

4. 결국 내가 말하고 싶은건..

차근차근 n값에다가 자연수를 대입해보면서 문제를 이해하고, 문제 푸는 방향을 설정하고, 중간중간 비어있는 적분값을 메울려고 (가)조건에 접근하였지만, 결국 나온 조건식은 아무런 관련이 없다는 것을 알아내고, 다른 방향으로 틀어서 문제를 풀었다. 나는 위의 풀이를 통해서 물흐르듯이 푸는 능력도 보여주었고, 관점을 전환하는 방법도 보여주었고, 매몰되지않고 다른 방법으로 돌리는 능력도 보여주었다. 내가 중간중간에 비어있는 적분값을 찾겠다고, 이 방법에만 매몰되있었다면, 문제를 풀 수 있었을까? **한 가지 관점에서만 매몰되지 않았으면 좋겠다. 물흐르듯이 푸는 것도 중요한 능력이고 여러 가지 관점에서 문제를 바라보는 것도 능력이다.**

13. $0 \le \theta \le 2\pi$인 θ와 실수 k $(k \ne 0)$에 대하여 함수 $f(x) = k\sin\theta x^2 + \cos\theta x + 1 - \sin^2\theta$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $g(\theta)$라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $k > \dfrac{1}{4}$ 인 k에 대하여 $g(\theta) = 1$이 되도록 하는 모든 θ값의 합은 3π이다.

ㄴ. 주어진 범위의 모든 θ에 대하여 $g(\theta) \ge 1$을 만족시키는 k의 범위는 $-\dfrac{1}{4} \le k \le \dfrac{1}{4}$ $(k \ne 0)$이다.

ㄷ. $k = \dfrac{1}{2}$일 때, $\left|\lim\limits_{\theta \to a} g(\theta) - g(a)\right| = 1$을 만족시키는 모든 실수 a의 곱은 $\dfrac{3}{4}\pi^2$이다.

조건을 정리한 이후에 ㄱ,ㄴ,ㄷ을 들어가보자

1) $0 \le \theta \le 2\pi$, $(k \ne 0)$

2) $g(\theta)$ 는 $f(x)$의 서로 다른 실근의 개수

3) $f(x) = k\sin\theta x^2 + \cos\theta x + 1 - \sin^2\theta$

함수 $f(x)$는 θ라는 문자도 들어가있지만, 어찌됐건 x에 대한 이차방정식이다. 즉 $g(\theta)$의 공역은 $2, 1, 0$ 이다.
(당연하죠, 이차방정식은 서로 다른 두 실근, 중근 ,서로 다른 두 허근(즉 해가 없다)이 존재하기 때문이죠)
문제를 정리(이해)했으면, 이제 ㄱ부터 들어가보자.

ㄱ. $k > \dfrac{1}{4}$ 인 k에 대하여 $g(\theta) = 1$이 되도록 하는 모든 θ값의 합은 3π이다.

우선 $g(\theta)$는 이차방정식의 서로 다른 근의 개수이므로, 판별식을 이용하는 것이 좋을 것 같다. 이때, $f(x)$의 상수부분을 간단히 바꿀 수 있으므로 $f(x)$를 정리하면,

$f(x) = k\sin\theta x^2 + \cos\theta x + \cos^2\theta$이다.

$D = (\cos\theta)^2 - 4 \times ksin\theta \times \cos^2\theta = \cos^2\theta(1 - 4ksin\theta)$

이때, $D > 0$이면, $g(\theta) = 2$이고, $D = 0$이면, $g(\theta) = 1$이며, $D < 0$이면, $g(\theta) = 0$이다.

즉, 판별식 D의 부호가 $g(\theta)$의 함숫값을 결정한다는 것을 알 수 있다.

이제 판별식D의 부호에 집중해서 문제를 접근하면 될 것 같다.

$g(\theta)=1$이면 ,$D=\cos^2\theta(1-4ksin\theta)=0$이므로, $\cos^2\theta=0$ 또는 $1-4ksin\theta=0$이다.

$Case_1$) $\cos^2\theta=0$ 일 때

$\cos\theta=0$ 일 때, 즉, $\theta=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\theta=\frac{3\pi}{2}$이다.

$Case_2$) $1-4ksin\theta=0$

$1=4ksin\theta$

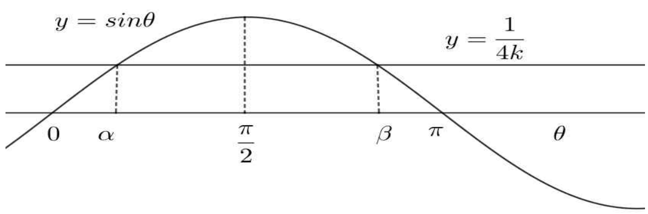
$k>\frac{1}{4}$,즉, k가 양수이므로 k를 이용하여 자유롭게 식조작을 할 수 있다.

$\frac{1}{4k}=\sin\theta$

이때, $k>\frac{1}{4}$이므로, $4k>1$, $0<\frac{1}{4k}<1$이므로, **(역수 돌릴 때, 범위 주의!!)**

$0<\frac{1}{4k}<1$에서, $\frac{1}{4k}=\sin\theta$를 만족하는 θ의 값은 k값에 따라서 계속 변한다.

하지만 θ의 값이 $x=\frac{\pi}{2}$를 기준으로 항상 대칭이므로, $Case_2$에서 $\alpha+\beta$값의 합은 항상 π로 일정하다.



(삼각함수의 대칭성 생각하기!!)

즉, $g(\theta)=1$이 되도록 하는 모든 θ값의 합은 $\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}+\pi=3\pi$이므로,

ㄱ은 참이다.

ㄴ. 주어진 범위의 모든 θ에 대하여 $g(\theta)\geq 1$을 만족시키는 k의 범위는 $-\frac{1}{4}\leq k\leq\frac{1}{4}(k\neq 0)$이다.

$g(\theta)\geq 1$이면, 판별식 $D=\cos^2\theta(1-4ksin\theta)\geq 0$이고, $\cos^2\theta\geq 0$이므로, 주어진 범위의 모든 θ에 대하여 $(1-4ksin\theta)\geq 0$을 만족해야 한다.

$1\geq 4ksin\theta$

$\frac{1}{4k}\geq\sin\theta$

$-1\leq\sin\theta\leq 1$이므로, $\frac{1}{4k}\geq 1, 0<k\leq\frac{1}{4}$이므로 ㄴ은 거짓이다.

<u>라고 시험장에서 풀면 뚝배기가 개박살난다. (Comment.1)</u>

k가 양수일 때, 음수일 때 범위를 나누어보면

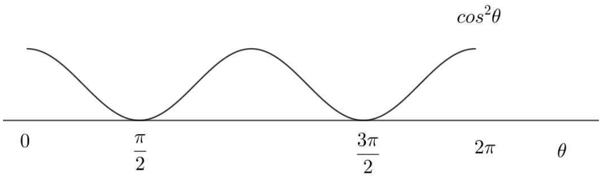
$Case_1$) $k>0$일 때,

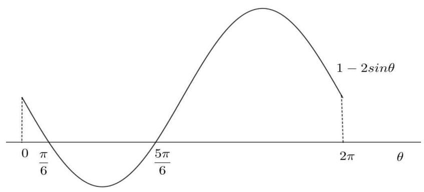
$1 \geq 4ksin\theta$

$\dfrac{1}{4k} \geq \sin\theta$

$-1 \leq \sin\theta \leq 1$이므로, $\dfrac{1}{4k} \geq 1, 0 < k \leq \dfrac{1}{4}$

$Case_2$) $k < 0$일 때,





$1 \geq 4ksin\theta$

$\dfrac{1}{4k} \leq \sin\theta$

$-1 \leq \sin\theta \leq 1$이므로, $\dfrac{1}{4k} \leq -1$, $-\dfrac{1}{4} \leq k < 0$

따라서 ㄴ도 참이다.

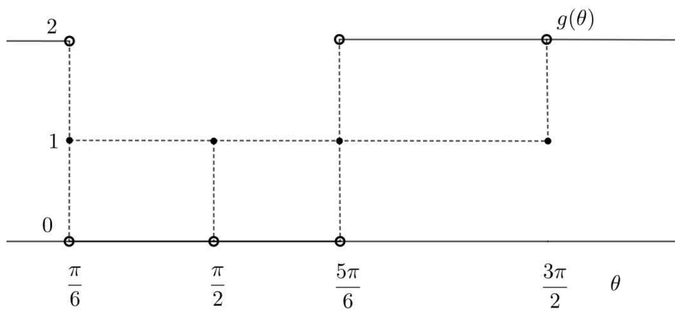
ㄷ. $k = \dfrac{1}{2}$일 때, $\left| \lim_{\theta \to a} g(\theta) - g(a) \right| = 1$을 만족시키는 모든 실수 a의 곱은 $\dfrac{3}{4}\pi^2$이다.

$k = \dfrac{1}{2}$일 때, 판별식 $D = \cos^2\theta(1-2\sin\theta)$이다. $g(\theta)$는 판별식D의 부호의 따라 달라지므로, $\cos^2\theta$의 그래프와 $1-2\sin\theta$의 그래프를 그려봐서 부호변동을 파악한다.

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$	2π
부호	+	+	0	−	0	−	0	+	0	+	+

따라서, 판별식 D의 부호 변화는 다음과 같다.

이를 바탕으로 $g(\theta)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



이 때, $\lim_{\theta \to a} g(\theta)$의 값이 존재하므로 a에서 $g(\theta)$의 좌극한 값과 우극한 값이 같아야 된다는 것을 전제로 한다.

따라서 위의 그래프에서 극한값과 함숫값의 차이가 1이 되는 a값은 $\frac{\pi}{2}$와 $\frac{3\pi}{2}$이다. 따라서, 모든 a값의 곱은 $\frac{3\pi^2}{4}$, 고로 ㄷ은 참이다.

제작자는 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$이므로 D를 $\sin\theta$에 대한 삼차함수로 해석하여 풀어보는 것도 적극 권장한다.
$\Rightarrow$ 합성함수를 다루는 연습

Comment)

개인적인 평가로는 13번 치고는 많이 어려웠던 문제다.

1. ㄱ도 ㄴ도 부등호 주의! 이거 부등호 계산 못하면 틀리는 문제야

과연 풀이에서 뭐가 잘못되었을까? **왜 맘대로 k를 양수라고 단정지어버리고 왜 맘대로 식조작을 하는거지? 왜!!!** 문제에서 뭐라 그랬습니까? 예? k는 0이 아니라고 했고, $k > \frac{1}{4}$는 ㄱ에서만 해당하는 조건이자나 그치? 그니까 k는 양수가 아니야. 정확히 양수인지 음수인지 모르지 그치? 그러니까 뭐해야겠어? 범위를 나눈다음에 식조작을 해야겠지? 왜 맘대로 k를 양수라고 단정지어버리고 (**물론 k가 양수라고 생각도 안하고 아무생각없이 양변에 나눠버렸겠지**) 문제 풀어버리면 너도 너가 틀린줄모르고 '아 잘풀고있구나'이러고 넘어가. 이거 되게 아닌거 같은데... 이거못하자나? 이거 되게 무서운거야. 틀린줄도 몰라. 문제풀면서 풀다가 틀린걸 알면 다행인데 틀리게 풀고있는걸 모르자나? **그럼 그거 언제아는지 알아?** 수능장나와서 집가는 택시나 버스나 엄마차나 아빠차나 하튼 그런데에서 **가채점할 때 알아**. 이거 진짜 소름이지? 그니까 그냥 미지수를 양변에다가 나눌때는 그냥 습관적으로 그 미지수의 범위를 체크해야돼(특히 특히 부등식에서). 알겠어? 이거 아무것도 아닌거 같은데 진짜 중요한거야. 이게 안되면 ㄴ은 틀렸겠지? 이러고 4점 날리는거야 알겠어? **위에서 충분히 말했다?** 미지수를 양변에다가 나눌때는 그 미지수의 범위를 체크하자 알겠지?
(케이스 나누고 풀었으면 아주 잘하셨어요 ^ㅡ^)

(온화한 VER_)
부등호 계산과정에서 굉장히 실수할 수 있는 부분이 많다. 특히나 양변에 나눌때는 주의해야될 것이 많다. 나누는 미지수의 범위도 주의해야하며, 부등호 방향도 주의해야되고, 마지막에 설정해놓은 미지수 범위도 잘 연결해야한다.

2. 결국 이 문제의 Point는...
$D > 0$이면, $g(\theta) = 2$이고, $D = 0$이면, $g(\theta) = 1$이며, $D < 0$이면, $g(\theta) = 0$이다.
이걸 인지하지 못하고 문제를 풀었다면 아마 쉽지않았을 것이다. 이는 $f(x)$가 이차방정식이라는 것을 제대로 인지하지 못했으면,, θ를 함수의 정의역로 착각하고 문제를 들어갔으면.. 아마 풀지 못하였을 것이다. **함수 $f(x)$에서 정의역은 x임을 확실히 인지하고 풀었으면 물 흐르는데로 풀렸을 것이다! 이게 핵심!**

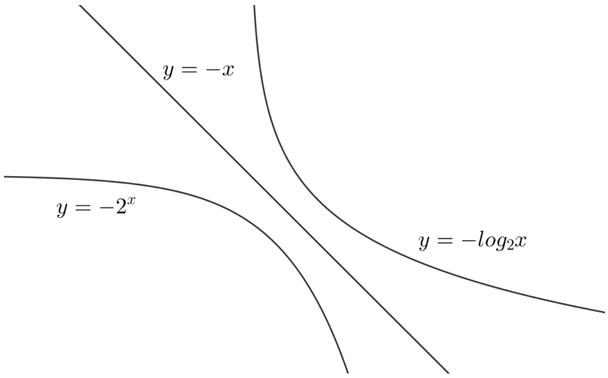
3. ㄱ,ㄴ,ㄷ **유형의 문제**

이 문제에서는 사실 크게 연관성은 없었지만, ㄱ→ㄴ, ㄴ→ㄷ으로, 또는 ㄱ,ㄴ→ㄷ으로 문제가 이어지는 경우가 있다. 직접적으로 이어지지는 않아도, ㄱ,ㄴ을 문제를 풀기위해서 문제를 이해하는 과정으로 만드는 경우도 있으므로, (이 문제가 딱 이러한 CASE) ㄱ,ㄴ,ㄷ을 절대로 따로 생각하지는 말자!

14. $k<0$인 실수 k에 대하여 직선 $y=x+k$가 두 곡선 $y=-2^x$, $y=-\log_2 x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 $\mathrm{P}(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$에 대하여 삼각형 PAB의 무게중심을 $\mathrm{G}(a, b)$라 하자. $a-b=1$일 때, 삼각형 PAB의 넓이는 $\dfrac{q}{p}+r\sqrt{2}$이다. $p+q+r$의 값은?

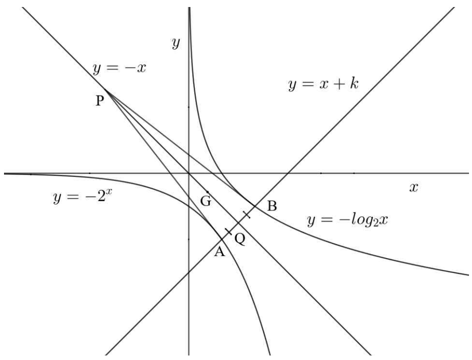
<u>**보자마자 $y=-x$에 대칭이라고 생각이 드셨나요?**</u> (Comment.1)

$y=-2^x$와 $y=-\log_2 x$는 $y=-x$에 대하여 대칭이므로, 그래프를 그릴 때, $y=-x$를 기준으로 대칭으로 그래프를 그려봅시다! 그리다 보면 아~주 예쁜 그림이 그려지지 않나요?



점 P가 $y=-x$위에 있고, 점 A와 점 B가 $y=x+k$위의 점이고, 따라서 $y=-x$기준 대칭이므로, 삼각형 PAB는 $y=-x$기준 대칭. 즉 $y=-x$기준으로 반으로 접으면 딱! 맞아떨어진다.

그 말은 $y=-x$기준으로 삼각형이 정확히 이등분되므로, 선분 AB와 $y=-x$의 교점을 점 Q라 하면 $\mathrm{AQ}=\mathrm{BQ}$임을 알 수 있다. 무게중심은 삼각형의 한 점에서 마주보는 변을 이등분하는 선분들의 교점이고, 선분 PQ는 선분 AB를 정확히 이등분하므로 무게중심 G는 $y=-x$ 위에 있다는 것을 알 수 있다. 이때 $\mathrm{PG}:\mathrm{GQ}=2:1$임을 알 수 있다. (무게중심의 성질:마주보는 변을 이등분하는 선분의 2:1내분점은 무게중심!)



분석끝!

이때, $a-b=1$이고, 무게중심 G는 $y=-x$위에 있으므로, $b=-a$이다. 즉 $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$이다.

따라서 무게중심 G의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$이다. 이제 이 무게중심을 이용해서 문제를 풀어보자! 무게중심의 좌표는 삼각형을 이루는 점들의 좌표의 합의 평균이므로, 점 A와 점 B의 좌표를 이용하여 식을 세울 수 있다. 점 A와 점 B는 $y=-x$를 기준으로 서로 대칭되는 점이며, 점 A는 $y=-2^x$위에 있는 점이므로, 점 A의 x좌표를 t라 하면, 점 A의 좌표는 $x=t, y=-2^t$이며, 점 B의 좌표는 $x=2^t, y=-t$이다.

무게중심 G의 x좌표 : $\frac{1}{2}=\frac{t+2^t-2\sqrt{2}}{3}$

$t+2^t=\frac{3}{2}+2\sqrt{2}$

$t=\frac{3}{2}$

이제 삼각형의 넓이를 구하기 위한 밑작업이 다 끝났다.

밑변인 $\overline{\mathrm{AB}}$는 좌표를 이용해서 길이를 구할 수 있고

높이인 $\overline{\mathrm{PQ}}$는 무게중심 성질을 이용해서 구하면

$S=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{PG}}\times\frac{3}{2})\times(\overline{\mathrm{AB}})$ (Comment.2)

계산이 좀 더럽긴 하지만, 답의 형태로 딱 떨어진다!

++)처음에 A와 B의 미지수를 잡았어도, 결국에는 일차함수식과 지수함수식을 연립하면 저 조건이 나올 거야. 아마 k값을 구하는 쪽으로 방향설정을 했을텐데, 사실이 문제는 k값을 구하지 않아도 풀리는 문제지. k값을 구했더라도 잘 연립했으면 문제는 풀렸을 거야. 좀 더 오래 걸렸겠지만, 사실 이 정도의 미지수선택은 개인 취향이라서 너무 크게 신경쓰지말기!

$\overline{\mathrm{PG}}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-(-2\sqrt{2})\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+2\sqrt{2}\right)$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}\left(2^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}\right)=\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)=4-\frac{3}{2}\sqrt{2}$

(기울기가 1또는 -1인 직선에서는 45° 이용! (Comment.3))

$S=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{2}+2\sqrt{2}\right)\times\left(4-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$

$=-3\sqrt{2}+\frac{87}{8}$

$p=8, q=87, r=-3$이므로, $p+q+r=92$이다.

Comment)

1. 지수함수와 로그함수의 관계

지수함수와 로그함수가 같이 나왔을 때는 당연히 역함수 관계임을 의심하여야 한다.

(물론, 이 문제에서 두 함수는 역함수 관계는 아니다. 로그 밑(또는 진수)의 범위에 어긋나기 때문이다.)

원래 $y=2^x$와 $y=\log_2 x$는 $y=x$에 대칭이다. 문제에서 $y=-2^x$는 $y=2^x$와 x축을 기준으로 대칭이고, $y=-\log_2 x$는 $y=\log_2 x$와 x축을 기준으로 대칭이므로,

$y=-2^x$와 $y=-\log_2 x$ 는 $y=x$와 x축대칭을 이루는 $y=-x$에 대하여 대칭이다.

(이해가 안되면 직접 그래프를 그려보면서 생각해보기!)

지수함수와 로그함수가 동시에 나오면

1. 역함수 관계

2. 직선에 대한 대칭

반드시 확인하기!!

2.삼각형의 넓이

1) $\frac{1}{2}\times(\text{밑변})\times(\text{높이})$

밑변과 높이는 수직관계이다. 즉 90°가 보일 경우, 이 방법으로 접근할 수 있다.

제일 일반적인 방법이므로 나는 항상 이 방법을 쓸 수 있는지 없는지부터 체크한다.

2) $\frac{1}{2}\times(\sin\theta)\times(\text{변})\times(\text{변})$

수직은 보이지 않지만, 두 변의 길이를 알고, 두 변의 사잇각을 알면 이 방법을 사용할 수 있다. 위 문제에서는 수직이 보이기도 하였고, 두 변 사이의 각을 알 수도 없었으므로, 사용할 수 없었다.

3) 사인법칙과 코사인법칙

3. 기울기 1,-1인 직선

$y=x, y=x+k, y=-x, y=-x+k$

네 개의 직선 모두 공통적으로 기울기의 절댓값이 1이다. 이러한 직선들은 기하학적인 의미로 접근하였을 때 45°를 이용할 수 있다. 이를 삼각형으로 확장하면 $1:1:\sqrt{2}$라는 특수비도 사용할 수 있다. 이러한 직선이 보이면 기하학적으로 접근, 또는 좌표의 관점으로 접근하여 문제를 푸는 것도 괜찮은 방법이다!

4. 문제 총평

220921과 굉장히 유사한 문제

해설 처음에 있는 분석, 그 분석이 **이 문제의 Point!**

직접 손으로 그려보면서 이해해보기!

또한, 점 A와 점 B의 좌표를 잡는 과정은 200915(가)를 참고할 것.

15. 첫째항이 정수인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases}2a_{n+1}-a_n-\frac{1}{2}a_4 & (1\le a_{n+2})\\ 2a_{n+1}+3 & (a_{n+2}<1)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_2=-2$이고 a_5는 4이하의 자연수일 때, a_1+a_6의 값은?

뭔소리를 하는지 모르겠으니까 하나씩 해보자(Comment.1에서)

$n=1$일 때,

$$a_3=\begin{cases}2a_2-a_1-\frac{1}{2}a_4 & (1\le a_3)\\ 2a_2+3 & (a_3<1)\end{cases}$$

(혹시라도, $n=0$을 넣고 a_1을 구하는 바보같은 짓은 하지말자, n은 자연수이다...)

$a_2=-2$이므로,

$$a_3=\begin{cases}-4-a_1-\frac{1}{2}a_4 & (1\le a_3)\\ -4+3=-1 & (a_3<1)\end{cases}$$

$1\le a_3$일 때는 만족하는지 알 수 없지만, $a_3<1$일 때는 만족하는 것을 알 수 있다.
그러므로 두 가지 경우 다 따지면서 해야한다.

$n=2$일 때,

$$a_4=\begin{cases}2a_3-a_2-\frac{1}{2}a_4 & (1\le a_4)\\ 2a_3+3 & (a_4<1)\end{cases}$$

$Case_{1-1}$) $1\le a_3, 1\le a_4$

$a_4=2a_3-a_2-\frac{1}{2}a_4$　$a_2=-2$이므로

$a_4=\frac{4}{3}(a_3+1)$　$1\le a_3$이므로　$\frac{8}{3}\le a_4$

이는 $1\le a_3, 1\le a_4$라는 조건에 만족한다.

$Case_{1-2}$) $1\le a_3, a_4<1$

$a_4=2a_3+3$

이 때, $1\le a_3$이므로 $5\le a_4$이다. 따라서 조건에 모순이다.

$Case_{2-1}$) $a_3<1, 1\le a_4$

$a_3=-1,\ a_2=-2$이므로

$a_4=2a_3-a_2-\frac{1}{2}a_4$

$a_4=-\frac{1}{2}a_4$

$a_4=0$

즉, $a_3<1, 1\le a_4$일때는 성립하지 않는다.

$Case_{2-2}$) $a_3<1, a_4<1$

$a_3=-1$이므로

$a_4=2a_3+3$

$a_4=1$

이때, $a_4<1$이므로 역시 성립하지 않는다.

즉, $Case_{2-1}$)과 $Case_{2-2}$), 둘 다 성립하지 않으므로, $Case_2$)는 성립하지 않는다. 당연히 $a_3<1$일때가 안되니 $1\le a_3$일 때, 하나는 맞겠구나.. 라고 생각하면서 $n=3$일때로 내려가봅시다.
(이렇게 케이스가 굉장히 많이 나뉘고, 계산이 긴 문제는 정리하면서 내가 뭘 계산하고 있는지 인지하면서 풀어야합니다. 그냥 영혼없이 계산하면 내가 뭘하고있는지 놓치면서 굉장한 혼란에 빠지게 됩니다.)

$n=3$ 일 때,

$$a_5=\begin{cases}2a_4-a_3-\frac{1}{2}a_4 & (1\le a_5)\\ 2a_4+3 & (a_5<1)\end{cases}$$

$Case_{1-1-1}$) $1\le a_3,\ \frac{8}{3}\le a_4, 1\le a_5$

계산이 길어질수록, 그전에 조건을 정리를 잘해야한다.

$a_5=2a_4-a_3-\frac{1}{2}a_4$ 이 때, $a_4=\frac{4}{3}(a_3+1)$이므로 $a_3=\frac{3}{4}a_4-1$

$a_5=\frac{3}{4}a_4+1$ $\frac{8}{3}\le a_4$이므로 $3\le a_5$ $a_5=3$또는 4

$n=4$일 때,

$$a_6=\begin{cases}2a_5-a_4-\frac{1}{2}a_4 & (1\le a_6)\\ 2a_5+3 & (a_6<1)\end{cases}$$

a_5가 $3,4$일 때 각각 $1<a_6$이다.

따라서, $a_5=3$일 때,

$a_6=2a_5-a_4-\frac{1}{2}a_4$, $a_4=\frac{8}{3}$이므로 $a_6=2$, $a_5=3$, $a_4=\frac{8}{3}$, $a_3=1$, $a_2=-2$, $a_1=-\frac{19}{3}$

$\Rightarrow$ a_1이 정수가 아니므로 모순이다.

$a_5=4$일 때,

$a_6=2$, $a_5=4$, $a_4=4$, $a_3=2$, $a_2=-2$, $a_1=-8$

$\Rightarrow a_1+a_6=-6$이다.

(당연히 답이 1개이므로 사실 나머지 case는 체크할 필요가 없지만 나머지 case들이 안된다는 것을 증명하기 위해..)

$Case_{1-1-2}$) $1 \le a_3, 1 \le a_4, a_5 < 1$

애초에 문제에서 a_5는 4이하의 자연수라고 했으므로 모순이다.

Comment)

1. 계속 반복해서 말하는 것 같지만, 시그마든 적분이든 복잡한 수열이든 문제를 읽었을 때 무슨소리인지 모르겠으면 그냥 해라!

진짜 중요한 마인드이다. 하나씩 해보면서 이해하는 과정은 생각보다 중요하다. 특히 확통선택자들은 더더욱 중요하다!

2.그냥 흘러가는대로 풀면 풀리는문제이지만...

사실 양이 굉장히 많기 때문에 계산하면서 '아, 내가 이걸하고있구나' 체크하면서 풀자! 풀이과정에 트리형식의 그림을 괜히 그려놓은게 아니다. 복잡하고 긴 계산일수록 내가 왜 이 계산을 왜 하고있는지, 뭘 계산하고있는지를 잊어버리면 안된다! 또한 생각보다 모순은 빨리 나올 수 있다는 것을 항상 생각하자.

3.문제 총평

시간은 오래걸렸을수도있지만, 풀면 풀리는 문제! 그냥 해보자는 마인드!

아마 역추적을 하는 것도 좋은 풀이라고 생각한다.

이 문제를 틀렸다면 220915, 211221(가), 210921(나)를 풀어볼 것!

a_2		a_3		a_4		a_5
					$Case_{1-1-1}$	$\frac{3}{4}a_4+1$
			$Case_{1-1}$	$\frac{4}{3}(a_3+1)$		
	$Case_1$	a_3			$Case_{1-1-2}$	모순
			$Case_{1-2}$	모순		
-2						
			$Case_{2-1}$	모순		
	$Case_2$	-1				
			$Case_{2-2}$	모순		

위로 가는 것이 $1 \le a_{n+2}$, 아래로 가는 것이 $a_{n+2} < 1$인 $Case$이다.

16. $\log_6 4 + \dfrac{2}{1+\log_3 2}$의 값을 구하시오.

$\log_6 4 + \dfrac{2}{1+\log_3 2}$

$= \log_6 4 + \dfrac{2}{\log_3 3 + \log_3 2} = \log_6 4 + \dfrac{2}{\log_3 6}$

$= \log_6 4 + 2\log_6 3$

$= \log_6 4 + \log_6 9$

$= \log_6 36 = 2$

Comment)

크게 어려운거 없죠

로그는 밑이 같을 때 연산할 수 있다는 점과 로그의 밑변환 공식을 항상 생각하기.

17. $\displaystyle\sum_{k=1}^{11}(k+1)^2 - \sum_{k=2}^{10}k^2$의 값을 구하시오.

$\sum_{k=1}^{11}(k+1)^2-\sum_{k=2}^{10}k^2$

$\sum_{k=1}^{11}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{9}(k+1)^2$

$=\sum_{k=10}^{11}(k+1)^2$

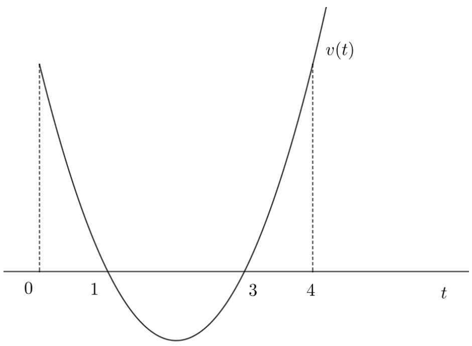
$=\sum_{k=11}^{12}k^2$

$=121+144=265$

Comment)
쉽죠, 혹시라도 안보이거나 확신이없으면 노가다로 다 계산해서라도 맞춥시다!
(시험장에서는 이런 마인드로!)

18. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=t^2-4t+3$이다. 점 P가 원점에서 출발할 때, $t=0$에서 $t=4$까지 점 P의 총 이동 거리를 구하시오.

속도 $v(t)$의 적분값은 변위이고 $|v(t)|$의 적분값은 이동거리이다.(Comment.1)
따라서, 속도가 음수인 경우와 양수인 경우로 나눠야한다.



$t=0$부터 $t=1$까지의 속도는 양수이고, $t=1$부터 $t=3$까지의 속도는 음수이고, $t=3$부터 $t=4$까지의 속도는 양수이다.

1) $t=0$부터 $t=1$까지의 이동거리

$\int_0^1 v(t)dt$

$=\int_0^1 t^2-4t+3dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1=\frac{4}{3}$

2) $t=1$부터 $t=3$까지의 이동거리

$$\left|\int_1^3 v(t)dt\right|$$

$$=-\int_1^3 t^2-4t+3dt=-\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_1^3$$

$$=\frac{4}{3}$$

3) $t=3$부터 $t=4$까지의 이동거리

$$\int_3^4 v(t)dt$$

$$=\int_3^4 t^2-4t+3dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_3^4=\frac{4}{3}$$

(Comment.2,3)

$\therefore$ $t=0$부터 $t=4$까지의 이동거리 P는 $\frac{4}{3}\times3=4$이다.

Comment)

1. 변위와 이동거리

는 다르죠. 변위는 처음시작과 마지막의 차이. 즉 결과를 중요시 하는 값이라면, 이동거리는 처음시작부터 마지막까지 진짜로 이동한 거리를 뜻하기 때문에(즉, 과정에 좀 더 무게를 둔 값), 차이를 주의합시다!

2. 속도와 미적분

간단하게 개념정리 하고 넘어갑시다

(변위)$'$=(속도)

(속도)$'$=(가속도)

|(속도)|=(속력)

|(가속도)|=(가속도의 크기)

3. 이차함수의 대칭성

$t=2$에 대해서 대칭인 이차함수의 적분범위가 $t=0$부터 $t=4$까지다?

위의 풀이에서 굳이 $t=3$부터 $t=4$까지의 이동거리를 구할 필요가 있었을까?

$t=2$기준으로 대칭인데?

$t=0$부터 $t=2$까지의 이동거리구하고 2배하기

왜? 대칭이니까

19. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x와 상수 a에 대하여

$$\int_1^x (x-t)f(t)\,dt=ax^3+\frac{1}{2}f(0)x^2-x+\frac{7}{12}$$ 을 만족시킬 때,

$\{f(-5)\}^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

부정적분 접근은 0으로 만들거나 미분하기!(Comment.1)

먼저 위의 적분식에서 적분변수인 t와 적분기호 내에서 상수인 x를 분리하면,

$\int_1^x (x-t)f(t)\,dt = x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt$(Comment.2)

$x=1$대입)

$1\times\int_1^1 f(t)dt - \int_1^1 tf(t)dt = a+\frac{1}{2}f(0)-1+\frac{7}{12}=0$

$a+\frac{1}{2}f(0)=\frac{5}{12}\cdots(1)$

x에 대하여 미분)

$\left(x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt\right)' = xf(x)+\int_1^x f(t)dt - xf(x)$

$\Rightarrow \int_1^x f(t)\,dt = 3ax^2+f(0)x-1$

$x=1$대입)

$0=3a+f(0)-1\cdots(2)$

(1), (2)를 연립해서 a와 $f(0)$를 구하면,

$a=\frac{1}{6},\ f(0)=\frac{1}{2}$

$\int_1^x f(t)dt = 3ax^2+f(0)x-1$를 x에 대하여 미분)

$f(x)=6ax+f(0)$

$\Rightarrow\ x+\frac{1}{2}$

$\{f(-5)\}' = \left(-\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$

$p+q=81+4=85$

Comment)

1.부정적분의 접근

0으로 만들기

적분의 범위가 같으면 적분값은 0이된다는 성질을 이용하여 x의 알맞은 값을 대입하여 조건을 구할 수 있다.
(단, k는 상수)

$\int_k^x f(t)dt = g(x)$, $x=k$대입, $g(k)=0$

-미분하기

부정적분을 미분하면 적분식안에 있는 함수를 뽑아낼 수 있다. (단, k는 상수)

$\int_{k}^{x} f(t)dt = g(x)$, $\left\{\int_{k}^{x} f(t)dt\right\}' = \left\{[F(t)]_{k}^{x}\right\}' = (F(x) - F(k))' = f(x) = g'(x)$

2. 적분식안에 다양한 변수 분리

먼저 적분을 하는 적분변수를 파악해야한다. 위의 식에서 적분변수는 t이므로, t를 제외한 나머지 모든 변수를 상수취급해주면된다. 즉 위의 식에서는 x를 상수취급하므로, 앞으로 빼낼 수 있는 것이다.

3.유사한 문제?

너무 유사한 문제가 많다... 일단 220912를 다시 풀어보자

20. 첫째항이 음수이고 공비가 정수인 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $a_8 - a_7$의 값을 구하시오.

(가) $\sum_{n=1}^{5}(a_n + |a_n|) = \frac{20}{9}$ (나) $\sum_{n=1}^{6}(a_n + |a_n|) = \frac{182}{9}$

공비가 양수일 때, 음수일 때 각각 나누어서 생각을 해보자 공비가 양수이면, 항이 계속해서 음수로 나올 것이며, 공비가 음수이면 음수와 양수가 번갈아가면서 나올 것이다. 그런데 (가),(나)조건을 보면, 공비가 음수인 것을 알 수 있다. 항이 음수일 때 시그마안의 식은 0이된다.

$a_n + |a_n| = a_n - a_n = 0$이기 때문이다. (Comment.1)

즉 공비가 양수면 항이 전부 음수이므로, (가),(나) 조건 둘 다 0이 되어야 한다.

공비가 음수이면 초항이 음수이므로 두 번째 항은 양수, 세 번째 항은 음수, 이런식으로 계속 부호가 바뀌고, 항이 음수인 경우의 $a_n + |a_n|$의 값은 0이된다.

반면에 항이 양수인 경우 $a_n + |a_n| = 2a_n$임을 알 수 있다. (Comment.2)

이렇게 문제 분석을 끝내놓고 나면 (가),(나) 조건이 아주 쉽게 정리된다.

(가) $\sum_{n=1}^{5}(a_n + |a_n|) = \frac{20}{9}$

n이 홀수일 때, $a_n + |a_n|$의 값이 0이고, n이 짝수일 때 $a_n + |a_n|$의 값은 $2a_n$이므로,

$\sum_{n=1}^{5}(a_n + |a_n|) = 2a_2 + 2a_4 = \frac{20}{9}$ .....(1)

(나) $\sum_{n=1}^{6}(a_n + |a_n|) = \frac{182}{9}$

마찬가지로, n이 홀수일 때, $a_n + |a_n|$의 값이 0이고, n이 짝수일 때 $a_n + |a_n|$의 값은 $2a_n$이므로,

$\sum_{n=1}^{6}(a_n + |a_n|) = 2a_2 + 2a_4 + 2a_6 = \frac{182}{9}$ .....(2)

(1),(2)를 연립하여 빼면, $2a_6=\frac{162}{9}, a_6=9$

초항을 a_1, 공비를 r라하면,

$a_6=a_1\times r^5=3^2=\frac{(-3)^5}{(-3)^3}$

이때, 초항과 공비 둘다 음수이고, 공비는 정수이므로 $a_1=\left(-\frac{1}{3^3}\right)$, $r=(-3)$이다.

$a_6=9$이므로, $a_7=-27, a_8=81$이다.

$a_8-a_7=81-(-27)=108$

Comment)

1. 절댓값 접근

간단하다. 절댓값 안의 값이 양수면 그대로, 음수면 ㅡ를 붙여서 벗기면 된다.

2. 시그마 접근

사실 나는 문제를 읽자마자 어떻게 풀어야 할지 바로 보여서 위의 풀이에 바로 써놨지만, 혹시 못봤다면, 공비가 양수일 때, 음수일 때를 따져가면서 시그마값에 대입해보자. 시그마식도 어렵다면 식을 다 전개해도 쓸 수 있는 양이므로, 전개한 이후에 절댓값을 벗기면 충분히 풀 수 있다!

3. 총평

191129(나)를 한 번 풀어볼 것.

21. 함수 $f(x)=-3x^2+6x+9$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

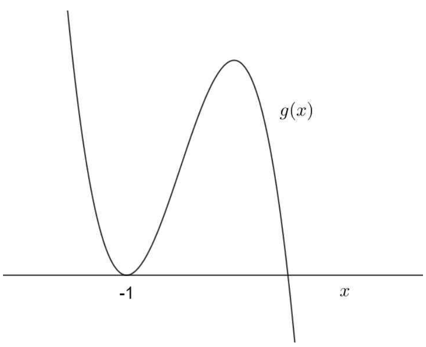
$$g(x)=\int_{-1}^{x}\{f(t)-f(k)\}\,dt$$

에 대하여 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 k값의 합을 α라 할 때, α^2의 값을 구하시오.

함수 $g(x)$는 -1부터 x까지 함수 $f(x)$를 $-f(k)$만큼 평행이동한 함수의 적분값이다. 이로써 함수 $g(x)$는 최고차항이 음수인 삼차함수임을 유추할 수 있다.

또한, 주어진 $g(x)$의 $x=-1$을 대입하면 $g(-1)=0$, $g(x)$를 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=f(x)-f(k)$를 얻을 수 있다. 함수 $g(x)$는 최고차가 음수인 삼차함수이므로 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때의 개형을 유추할 수 있다. 또한 삼차함수가 2개의 근을 가지려면 극값이 2개여야만 한다는 사실도 기억해 놓자.

$Case_1$) $x=-1$에서 $g(x)$가 중근을 갖는 경우



$g'(-1)=0$이므로

$\Rightarrow f(-1)-f(k)=0$

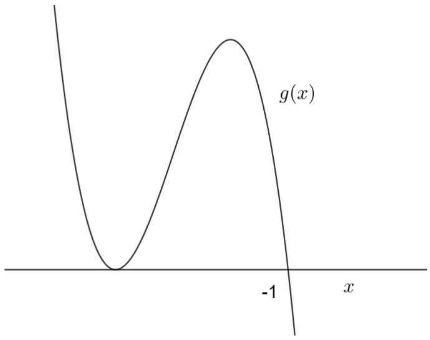
$\Rightarrow f(-1)=f(k)$

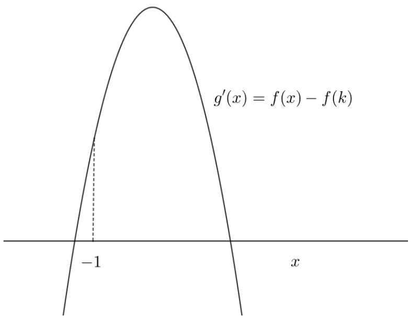
$\Rightarrow f(k)=0$

따라서 $Case_1$을 만족시키는 k의 값은 $-1, 3$이다.

$Case_2$) $x \neq -1$에서 중근을 갖는 경우

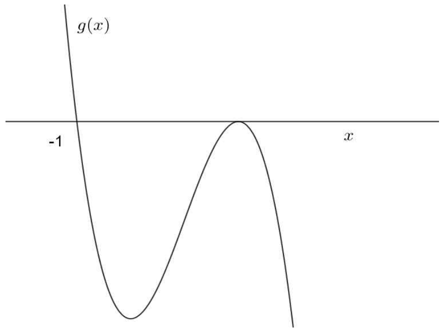
$Case_{2-1}$

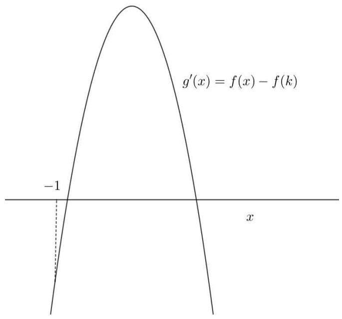




$f(k)$가 음수인 경우

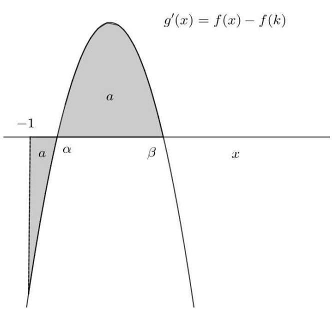
$Case_{2-2}$

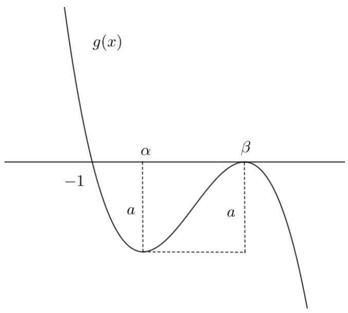




$f(k)$가 양수인 경우

$-1 < x$인 구간에서 $g(x)$가 단조감소하는 경우 즉 $g'(x)$의 함숫값이 항상 음수인 경우는 존재하지 않는다.
따라서 $Case_{2-1}$는 불가능하다. $Case_{2-2}$가 가능한 $g(x)$의 경우이며 $-1 < x$에서 함수$g'(x)$의 부호변화는 $- \rightarrow + \rightarrow -$이므로 $f(k)$는 양수이다.
그림과 같이 도함수의 적분값은 원함수의 함숫값의 변화량이다.





삼차함수의 비율관계에 따라서, $\alpha - (-1) = \dfrac{\beta - (-1)}{3} \Rightarrow 3\alpha - \beta = -2$

그리고 $f(x)-f(k)$는 y축으로만 평행이동하였으므로 여전히 축을 $x=-1$로 가진다. 따라서, $\frac{\alpha+\beta}{2}=1$

$\Rightarrow \alpha+\beta=2$

위 두 개의 식을 연립하면, $\alpha=0, \beta=2$이다. 따라서, $f(x)-f(k)=-3x(x-2)$

$\Rightarrow f(k)=9$이다.

따라서 $k=0, 2$

$Case_1$과 $Case_2$ 모두 만족시키는 k값은 $-1, 0, 2, 3$ $\alpha=4$

$\therefore \alpha^2=16$이다.

Comment)

1.삼차함수의 비율관계

22. 최고차항의 계수가 $-\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 P, 점 $(t, f(t))$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 원점 O에서 점 P까지의 거리와 점 A(1,0)에서 점 H까지의 거리 중 작은 값을 $g(t)$라할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

(나) $\alpha<1$인에 대하여 $0<g'(\alpha)$를 만족시키는 α가 존재한다.

(다) 방정식 $g(t)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(1)=\frac{5}{2}$일 때, $f(-2)\times g(13)$의 값을 구하시오.

음.. 처음에 어떻게 접근하셨는지 모르겠지만... 혹시라도 바로 $f(x)$를 구하려고 달려들었다면 잘못된 접근입니다. 왜? 문제 조건 (가),(나),(다)가 전부 함수$g(t)$에 관한 조건입니다. 아무리 $g(t)$가 $f(x)$부터 나온 함수여도, 현재 함수 $f(x)$에서 알 수 있는 것은 최고차항의 계수가 $-\frac{1}{2}$인 삼차함수뿐입니다. 따라서 문제에서 주어진 조건으로는 더 이상 $f(x)$를 추론할 수 없습니다. **조건 (가),(나),(다)가 전부 함수 $g(t)$에 관한 조건이면서, 함수 $g(t)$는 $f(x)$를 이용하여 충분히 표현할 수 있기 때문에 함수 $g(t)$를 먼저 접근하는 것이 맞습니다.**

먼저 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$이므로, 접선의 y절편, 즉 점P의 좌표는 $(0, -tf'(t)+f(t))$이다. 즉, 점 P부터 원점 O까지의 거리는 $|-tf'(t)+f(t)|$이다. 점H의 좌표는 $(t,0)$이므로 점 H부터 점 A까지의 거리는 $|1-t|$이다. (Comment.1)

즉 이를 통해 **함수 $g(t)$의 식을 쓰면,**

$$g(t)=\begin{cases} |f(t)-tf'(t)| & (|f(t)-tf'(t)| \le |t-1|) \\ |t-1| & (|t-1| < |f(t)-tf'(t)|) \end{cases}$$

이후, 조건 (가),(나),(다)를 이용하여 $g(t)$함수를 알아내면 된다.
우선, $f(t)-tf'(t)$를 $h_1(t)$, $t-1$를 $h_2(t)$라하자.
(원활한 설명을 위해서 각각의 거리에서 절댓값을 제거한 식을 새로운 함수로 정의하였지만, 문제 풀 때는 굳이 따로 정의할 필요 없습니다. 그냥 그래프 그리시면 됩니다.)
$g(t)$를 함수 h에 대하여 다시 쓰면,

$$g(t)=\begin{cases} |h_1(t)| \ (|h_2(t)| \geq |h_1(t)|) \\ |h_2(t)| \ (|h_2(t)| < |h_1(t)|) \end{cases}$$

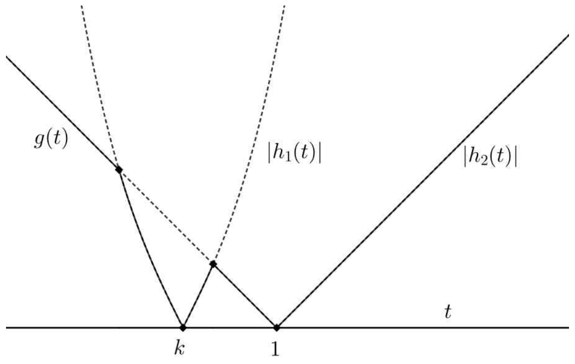
함수$|h_2(t)|$에서 $t=1$일 때, $g(1)=0$이다. **또한 $t=1$은 방정식 $g(t)=0$의 근이다.** (다)조건에 의하면, 방정식 $g(t)=0$은 서로 다른 실근 2개를 가지고, 방정식$|h_2(t)|=0$에서 $t=1$을 제외하고, 근이 없으므로, **나머지 근 한 개는 $|h_1(t)|=0$에서 나올 수 밖에 없다.** 그렇다면 **남은 한 개의 근을 알기위해서는 $h_1(t)$를 분석해야 한다.** $h_1(t)$는 $f(x)$로 구성되어져 있고 함수f의 최고차항의 계수와 차수를 알고있으므로, $h_1(t)$의 최고차항의 계수와 최고차항의 차수정도는 구할 수 있다.
(이 생각이 들면, '**$h_1(t)$가 몇차함수인지만 알면, 그래프 개형을 어느정도 때려박으면서 찾을 수 있겠다**' 라는 생각까지 이어나가실 수 있어야합니다.)

(Comment.2)
$f(t)=-\dfrac{1}{2}t^3+\cdots$이므로, $f'(t)=-\dfrac{3}{2}t^2+\cdots$이다. 따라서
$-tf'(t)+f(t)=\dfrac{3}{2}t^3+\cdots+\left(-\dfrac{1}{2}t+\cdots\right)=t^3+\cdots$이고, $h_1(t)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수인 것을 알 수 있다.
방정식 $|h_1(t)|=0$는 $t=1$을 제외하고, 무조건 한 개의 근을 가져야 하므로, $|h_1(t)|$와 x축과의 교점이 $t=1$을 포함하여 2개거나, $t=1$을 제외하고 교점이 1개이면 (다)조건에 성립함을 알 수 있다. 즉 방정식 $h_1(t)=0$는

1) $t=k(k\neq 1)$에서 하나의 근을 가지거나
2) $t=1$에서 중근을 가지고 $t=k$ (단, $k\neq 1$)에서 근을 가지거나
3) $t=k$(단, $k\neq 1$)에서 중근을 가지고 $t=1$에서 근을 가져야한다.
(세가지 경우는 모두 (다)조건을 충족시키는 경우이며, 이 세가지 경우 중 (가)와 (나)조건을 동시에 만족시키는 경우를 찾아야겠죠? 그렇게 찾은 함수의 개형을 토대로 함수의 식을 써내려가면 됩니다.)

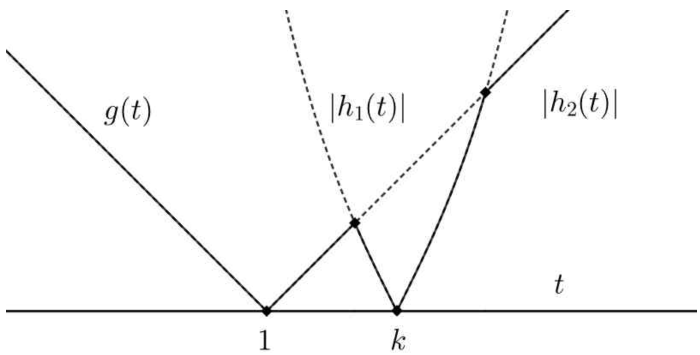
$Case_1$) **방정식 $h_1(t)=0$은 $t=k(k\neq 1)$에서 하나의 근을 가진다.**

근을 어디서 가질지 모르므로, $t=1$을 기준으로 케이스를 나눈다. (Comment.3)
$Case_{1-1}$) 근이 $k<1$일 때



그래프를 그려보면, $t<1$보다 작은 점에서 3군데, $t=1$에서 미분이 안된다는 것을 알 수 있다. 즉 미분불가능점이 4개 이므로 성립하지 않는다. (k에서 중근일 경우는 미분불가능점이 3개일 것이다.)

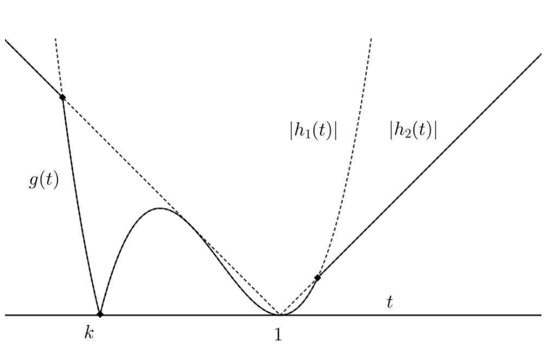
$Case_{1-2}$) 근이 $k>1$일 때

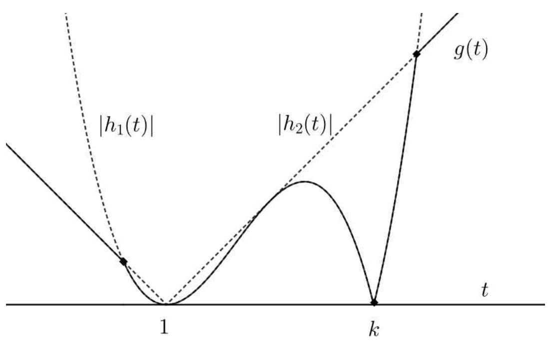


미분불가능점도 4개, (나)조건도 충족시키지 못하므로 성립하지않는다. (k에서 중근일 경우에는 미분불가능점이 3개이다.)

즉 $Case_1$은 성립하지 않는다. 즉 방정식 $h_1(x)=0$는 하나의 근을 가질 수 없다.

$Case_2$) **방정식 $h_1(t)=0$은 $t=1$에서 중근을 가지고 $t=k$(단, $k\neq1$)에서 근을 가진다.**





k가 1보다 큰든지 작든지 간에 미분 불가능점이 최소 3개가 나오는 것을 확인할 수 있다. 또한 2번째 그래프는 조건 (나)또한 만족시키지 못한다.

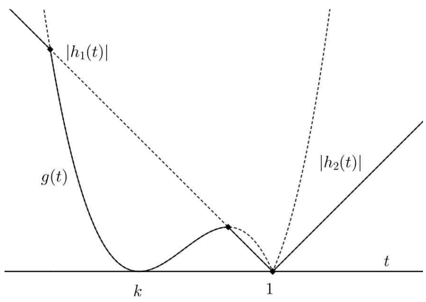
따라서, $Case_2$역시 성립하지 않는다.

또한, 이를 통해서 또 다른 근인 k는 무조건 $k<1$이어야 조건 나를 만족시킴을 알 수 있다.

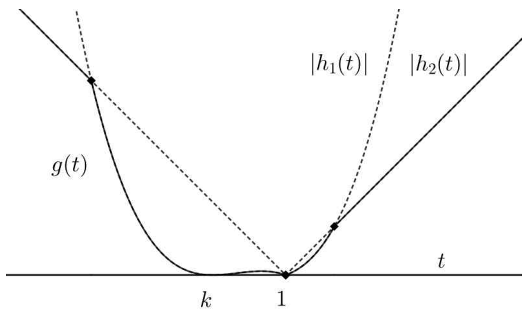
$Case_3$) **방정식 $h_1(t)$는 $t=k$(단, $k\neq1$)에서 중근을 가지고 $t=1$에서 근을 가진다.**

이 역시 조건을 바꾸면, $h_1(t)$**는 $t=k$ (단, $k<1$)에서 중근을 가지고 $t=1$에서 근을 가진다.** $Case_2$에서 $t=1$에서 중근을 가졌기에, $h_1{}'(1)$을 신경쓰지않고도 그래프를 그려졌지만, $Case_3$**에서는 중근이 아니기 때문에 $h_1{}'(1)$의 값에 따라 그래프가 다르게 그려진다.**

$Case_{3-1}$) **방정식 $h_1(t)=0$는 $t=k$(단, $k<1$)에서 중근을 가지고 $t=1$에서 근을 가지면서 $h_1{}'(1)\neq1$일 때**



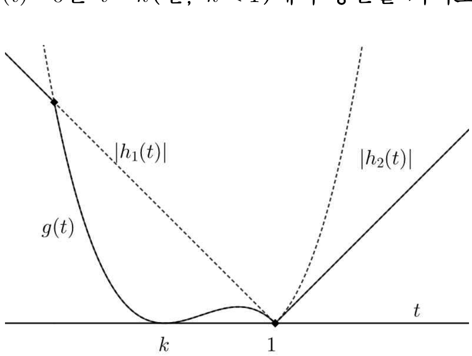
$1<h'(1)$



$h'(1)<1$

미분불가능점이 3개가 나오므로 성립하지 않는다.

$Case_{3-2}$) **방정식 $h_1(t)=0$는 $t=k$(단, $k<1$)에서 중근을 가지고 $t=1$에서 근을 가지면서 $h_1{}'(1)=1$일 때**

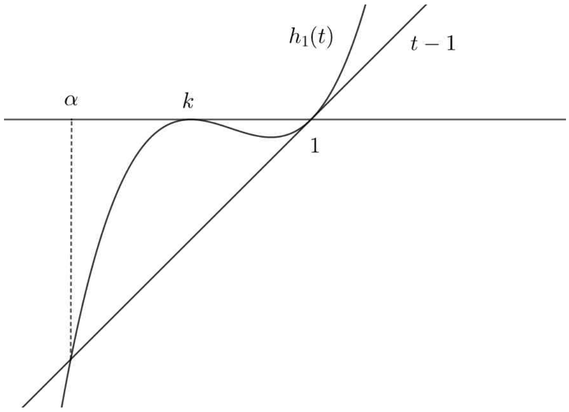


미분불가능점이 2개가 나오므로 성립한다.

따라서 방정식 $h_1(t)=0$는 $t=k$(단, $k<1$)에서 중근을 가지고 $t=1$에서 근을 가지면서 $h_1{}'(1)=1$일 때 조

건 (가), (나), (다)를 모두 만족시킨다.

따라서, 함수 $h_1(t)$는 $y=t-1$과 접하면서 $x=k\,(k<1)$에서 중근을 갖는다.



따라서, $h_1(t)$는 다음과 같이 두가지 식의 형태로 쓸 수 있다.

$h_1(t)=(t-k)^2(t-1)$ 또는 $h_1(t)-(t-1)=(t-\alpha)(t-1)^2$

위의 두가지 형태의 식을 모두 전개하여보면,

$h_1(t)=t^3-(2k+1)t^2+(k^2+2k)t-k^2$

$h_1(t)=t^3-(\alpha+2)t^2+(2\alpha+2)t-(\alpha+1)$

계수비교법을 통하여 위 2개의 식을 연립해 보면, $k=0$, $\alpha=-1$이다.

따라서, $h_1(t)=f(t)-tf'(t)=t^3-t^2$

$f(t)=-\dfrac{1}{2}t^3+at^2+bt+c$라고 하면

$h_1(t)=-\dfrac{1}{2}t^3+at^2+bt+c-(-\dfrac{3}{2}t^3+2at^2+bt)$

$=t^3-at^2+c=t^3-t^2$

따라서, $a=1$, $c=0$이다.

고로 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^3+x^2+bx$ 이때, $f(1)=\dfrac{5}{2}$이므로

$b=2$

$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^3+x^2+2x$

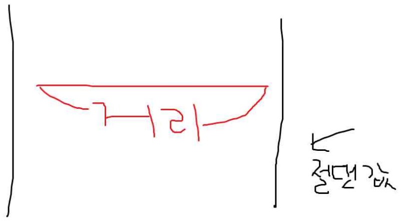
$f(-2)\times g(13)=4\times|h_2(13)|=48$

Comment)

1. <u>거리는 절댓값</u> ★★★★★

(이거 아무것도 아닌거 같지? 절댓값 안씌우고 수능 때 틀린 다음에 중요성을 깨달을래? 제발 이런걸로 실

수하지말자, 억울하잖아. 거리는 절댓값이다 제에발
진짜 틀리지마 제발 틀리지마 |거리|야, “거리“는 ”절댓값“이야 알겠지?)



2. 왜 수식(계산)의 관점이 아닌 그래프의 관점으로 접근할까?

간단하다. 수식의 관점으로(즉, 계산)으로 접근할 수가 없기 때문이다. 문제를 풀 때 **단순 계산의 관점(식), 그래프의 관점, 좌표평면에서의 좌표의 관점, 기하적 관점 등등의 다양한 관점**을 이용해야 하고, 그 다양한 관점 중 제일 유리한 관점(한개의 관점이 아닌 두 개, 세 개를 동시에 쓸 수도 있다)을 선택해서 문제를 접근하면 된다. 지금은 그래프를 제외한 어떠한 관점으로도 문제를 접근하기 힘드므로 그래프쪽으로 시작하는 것이다. 만약에 문제를 풀다가 그래프쪽으로 가는게 더 이상 힘들다 싶으면 다른쪽으로 나아가면 된다. 항상 유연하게 생각해서 제일 유리한 시각으로 문제를 바라보자!

3. Case를 분류할 때의 기준, 즉 경계의 설정

4. 함수와 방정식

간단하게 정리하면, $f(x)$가 함수면, $f(x)=0$은 방정식이다!
함수문제를 풀든, 방정식문제를 풀든, 둘 다 사용하므로, 차이점을 잘 구별하고 사용하자! (이 문제 역시 함수문제이지만, 문제 조건은 방정식으로 나왔죠.)

미적분

23. $\lim_{n\to 0+}\left(\sqrt{\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n}-3}-\frac{2}{n}\right)$의 값은?

$$\lim_{n\to 0+}\left(\sqrt{\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n}-3}-\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to 0+}\frac{\left(\sqrt{\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n}-3}-\frac{2}{n}\right)\left(\sqrt{\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n}-3}+\frac{2}{n}\right)}{\left(\sqrt{\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n}-3}+\frac{2}{n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to 0+}\frac{\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n}-3-\frac{4}{n^2}}{\left(\sqrt{\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n}-3}+\frac{2}{n}\right)}=\lim_{n\to 0+}\frac{\frac{5}{n}-3}{\left(\sqrt{\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n}-3}+\frac{2}{n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to 0+}\frac{\frac{5}{n}-3}{\left(\sqrt{\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n}-3}+\frac{2}{n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to 0+}\frac{\frac{5}{n}}{\frac{4}{n}}=\frac{5}{4}$$

Comment)

좌극한이면 이야기가 달라졌을 수도?

24. 곡선 $x^3+y^3=6xy$ 위의 점 $(3,3)$에서의 접선의 기울기는?

x에 대하여 미분하면,

$(x^3+y^3=6xy)'=\left(3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}=6y+6x\frac{dy}{dx}\right)$

$x=3, y=3$을 대입하면,

$27+27\frac{dy}{dx}=18+18\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=-1$

Comment)

초코는 엄청나게 귀엽습니다.

25. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n\ln(n+k)^2-n\ln n^2}{n+k}$의 값은?

급수로 정의한 정적분 문제에서는 대부분 식을 $\frac{k}{n}$꼴로 나타내는 것을 평가원은 다수 출제하여 왔다.

위의 식을 정리해 보면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n\ln(\frac{n+k}{n})^2}{n+k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n\ln(1+\frac{k}{n})^2}{n+k}$$ 이 때, 분모와 분자를 각각 n으로 나눠주면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(1+\frac{k}{n})^2}{1+\frac{k}{n}}$$ 이다.

$x_k=\frac{k}{n}$라고 하면 $dx=\frac{1}{n}$, $x_0=0, x_n=1$이고 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}=\int$이므로 Comment.1)

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)^2}{1+x}dx=2\int_1^2\frac{\ln|x|}{x}dx$$

$\ln x=t$라고 치환하면

$$\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$$

따라서,

$$2\int_0^{\ln 2}t\,dt$$ 이는 직선의 적분 값이므로 삼각형의 넓이를 생각하여 계산하면,

$$=2\times\frac{1}{2}\times\{\ln 2\}^2$$

$=\{\ln 2\}^2$이다.

Comment)

1. **구분구적법**

옆의 그림과 같이 함수 $f(x)$를 구간 x_0부터 x_n까지 n등분해보자.

n이 무한히 커질수록 직사각형 넓이의 합은 주어진 구간에서

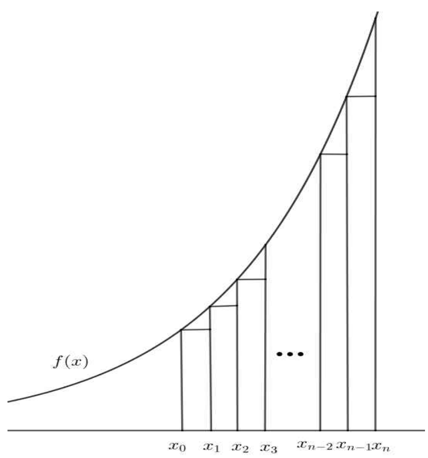
x축과 $f(x)$사이의 넓이와 점점 가까워질 것이다. $\Rightarrow\lim_{n\to\infty}$

또한 주어진 구간을 n등분 했으므로 각 직사각형의 밑변은

$\frac{x_n-x_0}{n}$이다. 이 때, 각각의 x좌표를 x_k라고 하면 1개의

직사각형의 넓이는 $\frac{x_n-x_0}{n}f(x_k)$이다. 따라서 모든 직사각형의

넓이의 합은 $\sum_{k=0}^{n}\frac{x_n-x_0}{n}f(x_k)$이므로 위 곡선의 적분값은

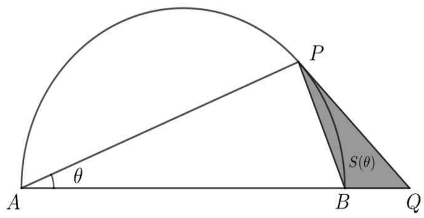


$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_0}{n}\sum_{k=0}^{n}f(x_k) \fallingdotseq \int_{x_0}^{x_n}f(x_k)dx \text{이다.}$$

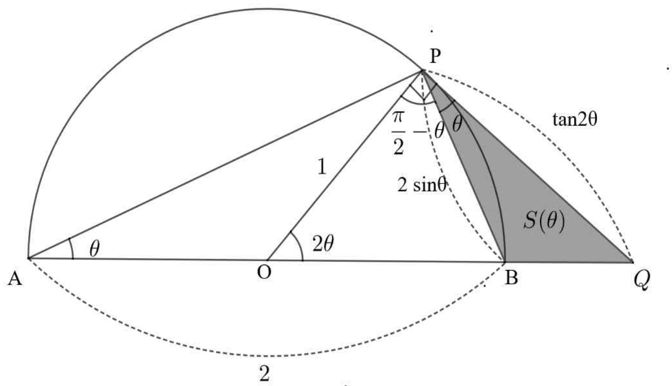
해설지라 설명을 자세하게는 못하겠네요..ㅜㅜ
자세히 이해가 안되는 분들은 인강이나 개념책에서 이 파트를 필히 재학습하고 올 것을 강력히 요구합니다.

26. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 점 P에서 호 AB에 접하는 직선과 직선 AB의 교점을 Q라 하자. $\angle\mathrm{PAB}=\theta$일 때, 삼각형 BPQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{S(\theta)}}{\theta^{\frac{3}{2}}}$$ 의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



문제에서 원의 중심이 주어지지 않았으므로 원의 중심O를 잡고 점P와 이으면, $\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{OP}}=1$인 이등변삼각형 $\triangle\mathrm{AOP}$를 만들 수 있다.(Comment.1)



이때, PQ는 호 AB에 접하는 선분이므로, $\angle\mathrm{OPQ}=90^\circ$이다. 즉 직각삼각형 OPQ를 중심으로, 선분 BP와 선분 PQ, 그리고 그 사잇각을 구할 수 있으므로, 삼각형의 넓이 $S(\theta)$는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\sin(\angle\mathrm{BPQ})$이다.

$\triangle\mathrm{AOP}$가 이등변삼각형이므로, $\angle\mathrm{APO}=\theta$이고, 삼각형의 외각의 성질에 따라 $\angle\mathrm{POQ}=2\theta$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{BP}}=2\sin\theta$이고, $\overline{\mathrm{PQ}}=\tan2\theta$이다. 또한, 삼각형 BOP는 이등변 삼각형이므로 $\angle\mathrm{OPB}=\frac{\pi}{2}-\theta$이고

$\angle\mathrm{OPQ}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle\mathrm{BPQ}=\frac{\pi}{2}-\angle\mathrm{OPB}=\theta$이다.

삼각형의 넓이 $S(\theta)=\frac{1}{2}\times 2\sin\theta\times\tan2\theta\times\sin\theta$이다.(Comment.2)

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{S(\theta)}}{\theta^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\sin\theta|\sqrt{\tan2\theta}}{\theta\sqrt{\theta}}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{S(\theta)}}{\theta^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sin\theta}{\theta}\sqrt{\frac{\tan2\theta}{2\theta}\times2}=\sqrt{2}\ \text{(Comment.3)}$$

Comment)

1. 원(반원)의 분석

기본적인 원의 분석에서 당연히 집중해야할 곳은 원의 중심이다. 원이 주어졌는데 원의 중심이 없으면 원의 중심을 표시하고 원의 중심을 기준으로 분석을 시작해야한다. 반원도 똑같다. 원 위의 점과 원의 중심을 이으면, 무언가 보이지 않는가? 또한 원 위의 점을 지름의 양 끝점과 이어 직각도 찾아낼 수 있다.

2.삼각형의 분석

삼각형의 넓이를 알려면 삼각형의 변의 길이를 알아야하고, 삼각형의 변의 길이를 θ에 대해 표현해야하므로, 당연히 직각삼각형 위주로 분석을 해야한다. 따라서 문제에서 주어진 조건을 이용해 직각삼각형을 만든 것이다. 단, 현재 평가원에서는 직각삼각형이 아닌 삼각형들도 자주 다루고 있어서 사인법칙과 코사인법칙의 중요성을 다시 한 번 강조할 수밖에 없다.

3.자연스럽게 사용하자!

$\lim_{\theta\to0+}\sin\theta=\theta$

$\lim_{\theta\to0+}\tan\theta=\theta$

$\lim_{\theta\to0+}(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}(\theta)^2$

증명은 생략~

4. 기출?

예비시행 미적분 28번을 다시 풀어보는 것을 추천한다.

27. 모든 실수 x에 대하여 연립부등식

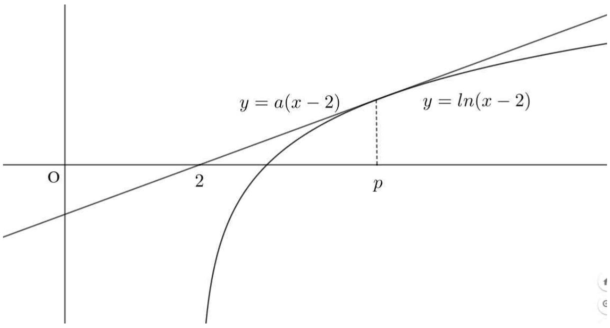
$$\begin{cases} ax-2a \le -\ln(2-x)+b & (x<2) \\ ax-2a=0 & (x=2) \\ \ln(x-2)\le ax-2a & (x>2) \end{cases}$$

을 만족시키는 실수 a의 값이 최소일 때, 실수 b의 최솟값은?

로그가 등장하였으므로, 당연히 범위부터 체크!(Comment.1)

$x<2$일 때, 진수부분인 $2-x$가 0보다 커야되므로, $x<2$이다.
$x>2$일 때, 진수부분인 $x-2$가 0보다 커야되므로, $x>2$이다.

수식적으로는 판단하기 힘들어보이므로, 함수의 관점으로 그래프를 그려본다.
$f(x)=\ln(x-2)$, $g(x)=-\ln(2-x)+b$, $h(x)=a(x-2)$
이 때, 직선의 기울기인 a가 최소가 될려면 함수 $h(x)$와 $f(x)$가 $x>2$인 한 점에서 접해야한다.
($g(x)$는 b값에 의해 결정되지 않으므로 $f(x)$로 접근한다.)

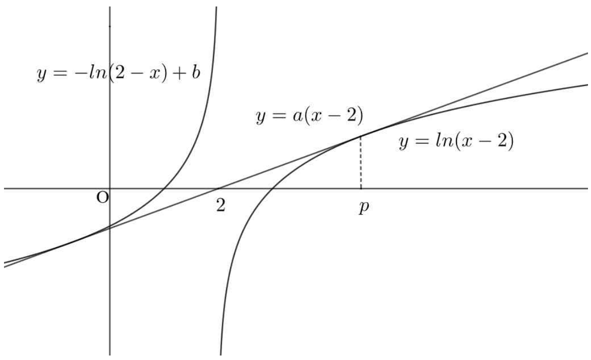


함수 $f(x)$는 점(2,0)을 무조건 지난다. 즉 점(2,0)을 지나는 직선 $h(x)$가 $x>2$에서 $f(x)$와 한점에서 접하도록 해야하므로, 접하는 점의 x좌표를 p라 하였을 때(단 $p>2$), y좌표와 기울기를 이용하여 식을 세우면,

$\ln(p-2)=a(p-2)$, $a=\dfrac{1}{p-2}$ (Comment.2)

$a(p-2)=1$이므로, $\ln(p-2)=1$, $p-2=e$ $\therefore p=e+2, a=\dfrac{1}{e+2}$. 즉 $a=\dfrac{1}{e+2}$을 최솟값으로 가진다.

이때, b 역시 직선과 접할 때 최솟값을 가지고, 이때 $g(x)$는 $f(x)$와 $x=2$기준으로 대칭일 때 이므로 $b=0$이다.(Comment.3)



Comment)

1. 로그진수의 범위!

이 문제에서는 범위체크를 안해도 딱히 문제될거 같지는 않지만 그냥 습관적으로 하자! 이게 언제 발목잡을지 모른다!

2. 접점과 교점을 대하는 태도

접점과 교점, 두 점은 모두 서로 다른 두 함수를 연결해주는 점이다.
특히 접점일 경우에는 접점에서 두 함수의 함숫값이 같다+접점에서 두함수의 미분계수가 같다는 2가지 조건을 얻을 수 있다.

3. 확실하지 않으면..

a를 구할 때처럼, 직선과 곡선이 접할 때 최소를 가지므로 똑같은 과정으로 계산하면 된다. 접점의 x좌표를 설정하여 계산하면 $b=0$이 나온다.

즉, 공통접선 문제인 것이다. 한번 210930(가)를 풀어보길 바랍니다.

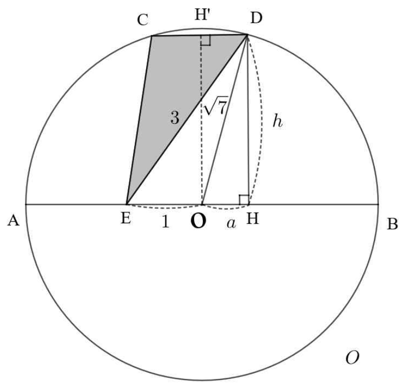
28. 그림과 같이 길이가 $2\sqrt{7}$인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 AB와 평행한 직선이 원 O와 만나는 두 점을 C, D라 하자. 선분 OA 위의 점 E는 선분 OA를 $1:\sqrt{7}-1$로 내분하는 점이고, $\overline{\mathrm{OE}}:\overline{DE}=1:3$일 때, 삼각형 CDE의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 원 O의 중심을 지나고 선분 AB와 수직인 직선이 원과 만나는 2개의 점 중 삼각형을 포함하지않는 반원에 있는 점을 F라 하자. 삼각형을 포함하지 않는 원 O의 반원을 이등분한 2개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 2개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 2개의 삼각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에서 새로 생긴 2개의 도형에 삼각형을 포함하지 않는 반원을 각각 이등분한 4개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 4개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 4개의 삼각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

그냥 무한등비급수문제(Comment.1)
S_n은 R_n에서 그려진 모든 삼각형들의 넓이의 합이므로, 초항은 첫 번째삼각형, 공비는 늘어나는삼각형의 개수와 그 넓이의 곱이다.

1. 초항 구하기

먼저 문제에서 주어진 조건들을 통해 아주 기본적인 것들을 분석해보자. $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OE}}=\sqrt{7}:1$이고, 원의 반지름이 $\sqrt{7}$이므로, $\overline{\mathrm{OE}}=1$이다. $\overline{\mathrm{DE}}=3\overline{\mathrm{OE}}$이므로, $\overline{\mathrm{DE}}=3$이다. 하지만 이 이상으로 알 수 있는 것들이 없다. 왜냐하면 점C,D,E가 원 위에서 어떠한 특별한 점도 아니다. 따라서 원의 분석으로는 아무것도 얻을 수 없다. 결국 원을 이용하지 않고 바로 삼각형으로 접근해야한다. 우리가 원하는 것은 초항이고 초항은 그림R_1에서의 삼각형의 넓이이다. 삼각형의 한 변의 길이 말고는 아는 것이 없다. 특히 각에대해서는 아는 것이 하나도 없으므로, 각을 이용해서 삼각형의 넓이를 구하는 것보다는 길이를 이용해서 넓이를 구하는 것이 더 유리할 것 같다.(Comment.2)
$\overline{\mathrm{CD}}$를 밑변이라 하였을 때 높이는 $\overline{\mathrm{CD}}$와 수직이어야한다. 점D에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 수선의 발을 내리고 그 점을 H라 하였을 때, $\overline{\mathrm{DH}}$는 삼각형의 높이가 된다. 이때, $\Delta\mathrm{DEH}$는 직각삼각형이고, 원의 중심에서 점D를 이었을 때, $\Delta\mathrm{DEH}$안에 직각삼각형ODH가 만들어진다. 점O에서 $\overline{\mathrm{CD}}$에 수선의 발을 내린 점을 O′이라 하였을 때, $\overline{\mathrm{CD}}$는 점O′을 기준으로 이등분되므로, $\overline{\mathrm{O'D}}$와 $\overline{\mathrm{OH}}$의 길이는 같다. 즉 $\overline{\mathrm{CD}}$의 길이,즉 밑변을 $2a$라 하였을 때, $\overline{\mathrm{OH}}=a$이다. $\overline{\mathrm{OD}}$는 반지름이므로, 높이, 즉 $\overline{\mathrm{DH}}$의 길이를 h라 하였

을 때, 두 직각삼각형을 피타고라스 법칙을 이용하여 조건식을 세울 수 있다.

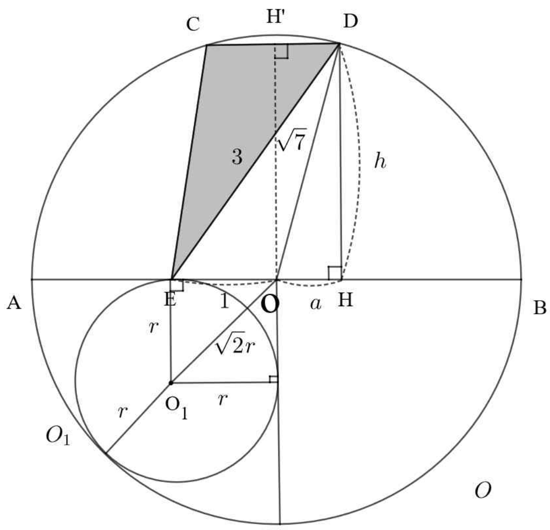


$\begin{cases} a^2+h^2=7 \\ (1+a)^2+h^2=9 \end{cases}$ $\therefore a=\dfrac{1}{2}, h=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

즉, 삼각형의 밑변의 길이는 $2a=2\times\dfrac{1}{2}=1$이고, 높이는 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$이다.

따라서 초항이자 삼각형의 넓이는 $a_1=\dfrac{1}{2}\times\left(2\times\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$이다.

2.공비 구하기
굳이 두 번째 삼각형의 넓이를 구할 필요가 없다. 전체적인 그림이 똑같은 비율로 축소되었으므로, 원의 길이만 비교해도 삼각형의 넓이비를 구할 수 있다.(Comment.3) 원과 원이 접해있으므로, 접점과 작은 원의 중심, 큰 원의 중심은 모두 한 직선위에 있다.(Comment.4)



따라서 작은 원의 반지름을 r이라 하였을 때, $r+\sqrt{2}r=\sqrt{7}$이다. (그림 참조!)
(루트2r이 나오는 과정은 그림으로 표현해야될 듯, 쓰는 거 보다 직각하고 45도 넣어노면 알아서 잘 이해하겠지.)

즉 $r=\dfrac{\sqrt{7}}{1+\sqrt{2}}$이므로, 큰 원과 작은 원의 길이비는 $\sqrt{7}:\dfrac{\sqrt{7}}{1+\sqrt{2}}=1:\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$이다. 따라서 삼각형의 넓

이비비는 $1:\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^2$이다.(Comment.5). 또한 삼각형은 2^n개씩 증가하므로, 축소된 삼각형의 넓이는 $\left(2\times\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^2\right)^n$배씩 증가한다. 따라서 공비는 $2\times\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^2$이다.

3.마무리

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{1-\left(\frac{2}{(1+\sqrt{2})^2}\right)}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{1+2\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^2}}=\frac{3\sqrt{3}(1+\sqrt{2})^2}{4(2\sqrt{2}+1)}=\frac{3\sqrt{3}(1+\sqrt{2})^2(2\sqrt{2}-1)}{28}=\frac{3\sqrt{3}(5+4\sqrt{2})}{28}$$

$$=\frac{3(5\sqrt{3}+4\sqrt{6})}{28}$$

Comment)

1. 무한등비급수문제의 접근법

그냥 공비하고 초항만 집중!

2. Why?

직각삼각형이 보이지 않아서, 높이가 주어지지 않았으므로, $\frac{1}{2}\times$(밑변)$\times$(높이)를 이용하는 것에 의문이 들 수 있다. 하지만 직각은 만들 수 있다. $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$가 평행이라는 조건때문에, 높이를 작도하는 것이 굉장히 쉬어진다. 결정적인 이유는 삼각형이 다른 특별한 조건을 가지고 있지 않으므로, 내각을 구하는 것이 어렵다. 따라서 $\frac{1}{2}\times$(한변의길이)$\times$(다른한변의길이)$\times\sin$(두변의사잇각)공식이나, 코사인법칙을 사용하여 접근하는 것보다 $\frac{1}{2}\times$(밑변)$\times$(높이)공식을 사용하여 문제를 접근하는 쪽이 더 옳은 방법이다.

3. 당연한 소리지만 중요한 얘기!

못 믿겠으면, 똑같은 방법으로 두 번째 삼각형의 넓이를 구해보면 된다. 이 문제 말고 다른 무한등비급수문제도 이렇게 풀어보자. 이해가 안될 수 있다. 이해가 안되면 직접 해보자! 시간단축에 굉장히 중요하다. 두 번째 삼각형 넓이를 구하는 계산은 이미 초항 구할 때 했던 계산과정과 똑같다. 아까운 시간을 버리지 말자!

4. 원과 원이 접할 때

원과 원이 접하는 접점에서 접선을 그어보자. 원의 중심에서 접선에 수선의 발을 내리면 그 점은 접점이다. 작은 원도, 큰 원도, 모두 수선의 발이 접점에 떨어진다. 따라서 접점-작은 원의 중심-큰 원의 중심은 한 직선위에 있다. 인정? 그림도 넣어줄게. 이건 원과 원이 외접할때도 성립~

5.길이비와 넓이비

음.. 길이비가 $a:b$이면, 넓이비는 $a^2:b^2$이다. 의심이 된다면, 한변의 길이가 1인 정사각형과, 한변의 길이가 2인 정사각형을 그리고 넓이를 비교해보자! 다른 도형도 괜찮다!

29. $x=0$에서 $x=\alpha$까지의 곡선 $y=\ln|\cos x|$의 길이가 1일 때, $\tan\alpha = ae-\frac{b}{e}$이다. $60(a^2+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$)

곡선의 길이는 $\int_a^b \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$ 와 같이 표현된다.

그러므로 주어진 곡선을 미분하면, $y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$이다.

$\therefore \int_0^\alpha \sqrt{1+\tan^2 x}\,dx=1,\ \int_0^\alpha \sqrt{\sec^2 x}\,dx=1,\ \int_0^\alpha |\sec x|\,dx=1$ (Comment.1)

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서, 항상 $\sec\alpha>0$이므로, $\int_0^\alpha |\sec x|\,dx=\int_0^\alpha \sec x\,dx$

$=\int_0^\alpha \frac{1}{\cos x}dx=\int_0^\alpha \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int_0^\alpha \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$

, 치환적분을 이용하여 $\sin x=t$라하면, $\cos x=\frac{dt}{dx}$이고, $\sin 0=0$이므로, $\int_0^{\sin\alpha}\frac{1}{1-t^2}dt=1$

$\int_0^{\sin\alpha}\frac{1}{1-t^2}dt=-\int_0^{\sin\alpha}\frac{1}{t^2-1}dt=-\int_0^{\sin\alpha}\frac{1}{(t+1)(t-1)}dt$

$=-\frac{1}{2}\int_0^{\sin\alpha}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=-\frac{1}{2}[\ln|t-1|-\ln|t+1|]_0^{\sin\alpha}$

$=-\frac{1}{2}(\ln|\sin\alpha-1|-\ln|\sin\alpha+1|)$, 이때 $0<\sin\alpha<1$이므로,

$=-\frac{1}{2}(\ln|\sin\alpha-1|-\ln|\sin\alpha+1|)=-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)=1$ (Comment.2)

$\ln\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=-2$이므로, $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{1}{e^2}$, $e^2-e^2\sin\alpha=1+\sin\alpha$,

$e^2-1=(e^2+1)\sin\alpha$, $\sin\alpha=\frac{e^2-1}{e^2+1}$,

이때 $\tan\alpha>0$이므로, $\tan\alpha=\frac{e^2-1}{2e}$

$\therefore a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$ 이므로, $60(a^2+b)=45$이다. (Comment.3)

Comment)

1. **루트와 제곱을 날릴때는...**

항상 양수가 나와야되므로 습관적으로 절댓값을 씌우자!

물론 이 문제에서는 상관없지만, 이거 안해서 틀리면 억울하겠죠?

2. sec**적분 정도는**

당연히 할 줄 알아야된다. 혹시 $-\int_0^{\sin\alpha}\frac{1}{(t+1)(t-1)}dt=-\frac{1}{2}\int_0^{\sin\alpha}\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}dt$

이 과정이 이해가 안되신다면, 적분할 때 꼭 필요하니, 반드시 익혀두셔야합니다!

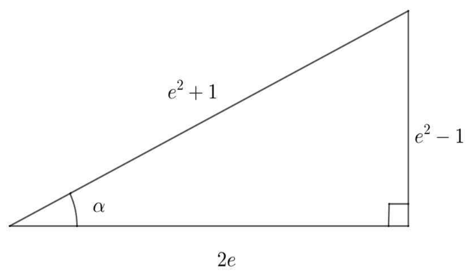
부분분수로 분해할 때는 $\frac{1}{AB}=(\frac{1}{B-A})(\frac{1}{A}-\frac{1}{B})$를 활용한다.

$$\therefore -\int_0^{\sin\alpha}\frac{1}{(t+1)(t-1)}dt=-\int_0^{\sin\alpha}\frac{\frac{1}{2}}{t-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{t+1}dt=-\frac{1}{2}\int_0^{\sin\alpha}\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}dt$$

3. 삼각비는? 직각삼각형을 그려서 판단, 부호는 따로

$\sin\alpha=\frac{e^2-1}{e^2+1}$이므로, 빗변을 e^2+1, 높이는 e^2-1이라하고, 피타고라스법칙을 통하여 높이를 구하면 높이는 $2e$가 나온다. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로, $\tan\alpha>0$이고,

$\tan\alpha=\frac{e^2-1}{2e}$이다.



30. 음이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여 구간 $[n\pi-\pi, n\pi)$에서 $f(x)=|\frac{1}{n}x\sin x|$을 만족시킨다. 방정식 $nf(x)=x$의 실근 중 가장 큰 값을 α라고 할 때, $a_n=f(\alpha)$라 하자. 함수

$$g(x)=\begin{cases} a(x-\frac{\pi}{2}) & (\frac{\pi}{2}\le x<a_k) \\ \frac{b}{\pi-x}+c & (a_k\le x<\pi) \end{cases}$$

가 열린구간 $(\frac{\pi}{2},\pi)$에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(a_{m+1})<(a_{m+1}-a_m)^2+g(a_m)$을 만족시키는 자연수 m의 개수는 3이다.
(나) $g'(a_i)<g'(a_{i+1})$를 만족시키는 i의 최솟값은 5이다.

a의 값이 최소일 때, $\frac{3^k c}{ab}$의 값은? (단, a는 양수이고, k는 자연수이다.)

일단 잘 모르겠으니... n에 자연수를 대입하면서 주어진 함수를 파악해보자.

$n=1$일 때,

$f(x)=x\sin x \qquad (0 \le x < \pi)$

$n=2$일 때,

$f(x)=\frac{1}{2}x\sin x \qquad (\pi \le x < 2\pi)$

$n=3$일 때,

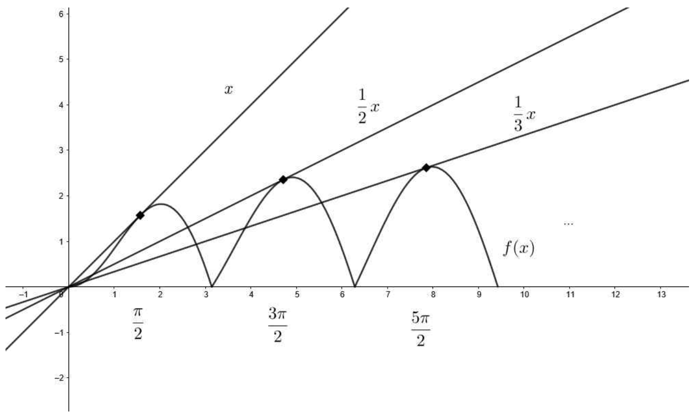
$f(x)=\frac{1}{3}x\sin x \qquad (2\pi \le x < 3\pi)$

$\cdots$

방정식 $|nf(x)|=x \quad \Rightarrow |f(x)|=\frac{1}{n}x$로 변형 할 수 있다. 따라서, a_n을 구할 때, 아! '함수 $f(x)$는 기울기가 $\frac{1}{n}$인 직선과 어떤 특별한 관계를 갖겠구나' 라는 것을 유추할 수 있어야 된다.

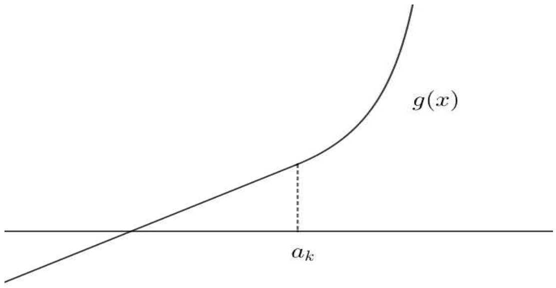
$x=\frac{2n-1}{2}\pi$일 때, $|f(x)|=\frac{1}{n}x$이다.

$f'(x)=\frac{1}{n}(\sin x+x\cos x)$이다. $f'(\frac{2n-1}{2}\pi)=\frac{1}{n}$이고 x가 $\frac{2n-1}{2}\pi$보다 약간 작으면 $\sin x$와 $x\cos x$가 작아진다. x가 $\frac{2n-1}{2}\pi$보다 약간 크면 $\sin x$는 작아지고 $x\cos x$는 음수이다. 따라서, 함수 $f(x)$는 $x=\frac{2n-1}{2}\pi$일 때 기울기가 최대가 되고 함숫값이 $\frac{1}{n}x$와 같으므로 $x=\frac{2n-1}{2}\pi$에서 접한다. 따라서 $|f(x)|$와 $\frac{1}{n}x$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

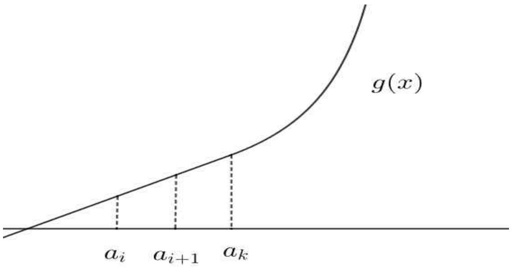


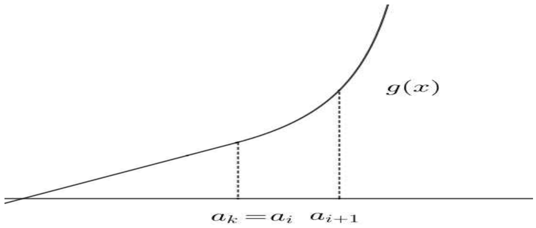
그러므로 $\alpha=\frac{2n-1}{2}\pi$이고 $a_n=f(\alpha)=\frac{2n-1}{2n}\pi$이다.(Comment.1) $\lim_{n\to\infty}a_n=\pi$이므로 $\frac{\pi}{2}\le a_n<\pi$이다.

그럼 이제 함수 $g(x)$를 분석해 보자.함수 $g(x)$는 수열 a_n의 k항을 기준으로 왼쪽은 직선 오른쪽은 유리함수의 형태이고 미분 가능하다. 일단 조건 (나)부터 살펴보자.(Comment.2)



조건 (나)를 해석해보면 다음 2가지 상황을 생각할 수 있다.





첫 번째 그림의 경우에는 $g'(a_i) < g'(a_{i+1})$를 만족하지 못하는 경우이고

두 번째 그림의 경우에는 $g'(a_i) < g'(a_{i+1})$를 만족하는 경우이다. 그 이후에 a_i와 a_{i+1}이 모두 유리함수에 있다면 a가 양수이므로 단조증가한다. 따라서 $g'(a_i) < g'(a_{i+1})$를 만족한다. 이 때, $i=5$에서 $g'(a_i) < g'(a_{i+1})$를 만족시키는 최솟값을 가진다고 하였으므로, $k=5$이다.

이제 조건 (가)를 해석해보자. $g(a_{m+1}) < (a_{m+1}-a_m)^2 + g(a_m)$는 $\dfrac{g(a_{m+1})-g(a_m)}{a_{m+1}-a_m} < a_{m+1}-a_m$으로 해석할 수 있을 것이다. 이 뜻은 $g(x)$의 a_m에서 a_{m+1}까지의 평균변화율이 $a_{m+1}-a_m$보다 작은 m이 3개라는 것이다.

$a_{m+1}-a_m$의 값은 m이 커질수록 작아지고 $\dfrac{g(a_{m+1})-g(a_m)}{a_{m+1}-a_m}$의 값은 일정하다가 $m=5$부터 커지므로 조건 (가)를 만족시키는 3개의 m의 값은 $m=1,2,3$이다.(Comment.3)

$m=3$ 일 때 $\dfrac{g(a_{m+1})-g(a_m)}{a_{m+1}-a_m} = a$이고, 이는 (가)를 만족시키는 m의 최댓값이므로,

$a < a_4 - a_3$이고, $m=4$일 때, $\dfrac{g(a_{m+1})-g(a_m)}{a_{m+1}-a_m} = a$지만, 조건 (가)를 만족시키지 못하므로 m의 최솟값이므로, $a_5 - a_4 \le a$이고 a의 범위는 $a_5 - a_4 \le a < a_4 - a_3$이다.

따라서, 문제의 조건에서 a는 최소라고 했으므로

$a = a_5 - a_4 = \dfrac{\pi}{40}$

함수 $g(x)$는 미분가능하다고 했으므로

연속: $\lim_{x \to a_5 -} g(x) = \lim_{x \to a_5 +} g(x) = g(a_5)$

$$\lim_{x \to \frac{9}{10}\pi -} a(x - \frac{\pi}{2}) = \lim_{x \to \frac{9}{10}\pi +} (\frac{b}{\pi - x} + c) = \frac{10b}{\pi} + c$$

미분가능: $\lim_{x \to a_5 -} g'(x) = \lim_{x \to a_5 +} g'(x)$

$$\lim_{x \to \frac{9}{10}\pi -} a = \lim_{x \to \frac{9}{10}\pi +} \frac{b}{(\pi - x)^2}$$

위 두 개의 식을 연립하면, $b = \frac{\pi^3}{4 \times 10^3}$, $c = \frac{3\pi^2}{4 \times 10^2}$

$\therefore$ 따라서, $\frac{3^k c}{ab}$의 값은 324이다.

Comment)

1. 수식적 접근

$|nf(x)| = \left| n \times \frac{1}{n} \times xsinx \right| = |xsinx|$

방정식 $|nf(x)| = x \Rightarrow |xsinx| = x$

$[n\pi - \pi, n\pi)$에서 n이 홀수일 때,

$\sin x > 0$이므로, $xsinx = x$, $x \neq 0$일 때, $\sin x = 1$, $x = \frac{2n-1}{2}\pi$

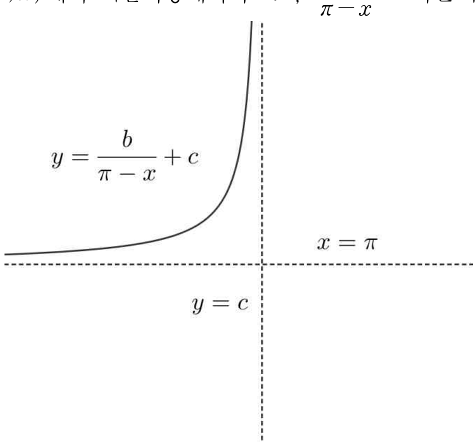
$[n\pi - \pi, n\pi)$에서 n이 짝수일 때,

$\sin x < 0$이므로, $-xsinx = x$, $x \neq 0$일 때, $\sin x = -1$, $x = \frac{2n-1}{2}\pi$

2. 그래프가 왜 저렇게 그려질까?

문제에서 $a > 0$이라는 조건을 주었으므로, $a\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$는 기울기가 양수인 일차함수이다.(즉 직선이다.)

또한 $g(x)$가 열린구간 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$에서 미분가능해야하므로, $\frac{b}{\pi - x} + c$라는 유리함수는 다음과 같이 그려져야 한다.



따라서 $b>0$임도 알 수 있다.

3.WHY??? 왜 1,2,3이지?

똑같은 설명이지만, 한번 더하자면,

$$\frac{g(a_{m+1})-g(a_m)}{a_{m+1}-a_m}<a_{m+1}-a_m$$

좌변은 $m \le 4$에서 a로 일정하지만, 우변인 $a_{m+1}-a_m$에서, a_m은 m값이 커질수록, 분모가 커지므로, 더 작아진다. 따라서 $a_{m+1}-a_m$은 m값이 커질수록 감소한다. ($a_n=\frac{2n-1}{2n}\pi$을 생각하면 이해하기가 쉬움!)

그러므로, m값이 상대적으로 더 작은 세 개의 값만 성립하므로, 제일 작은 자연수 1,2,3이 성립하는 m값이다.