제 2 교시

2023학년도 수능 대비 R27-(1)

수학 영역

성명	

수험 번호					—				

2022년 제작 랑데뷰 컨텐츠

[시즌 시작은 2022년 3월 부터(자료 제공은 2월 중순부터)]
① 3, 4, 7, 10월 교육청 수I, 수II, 미적분 4점 전문항
② 6, 9평가원 싱크로율99% (46문항 전체)
③ 2023학년도 EBS 수능특강 수I, 수II, 미적분 Lev3 전문항 변형
④ 2023학년도 EBS 수능완성 수I, 수II, 미적분 주요문항 변형
⑤ 3월~7월 매주 R27(샘플참고) &매달 모의고사 (8월은 쉼)
⑥ 9월~10월 매주 랑데뷰모의고사
모든 파일 한글 제공이며 출판을 제외하고 자유로이 사용가능합니다.
⇒ 프리패스 가격 :

위 프리패스 이용 고객중 (황보백T 현강용 자료 각지역 한분에게만 제공됨)
⑦ 3월~7월, 9월~10월 매주 R^+27 (8월은 쉼)
⇒ 월정액 가격: , 또는 올프리패스 가격 :

문의
카톡 : hbb100, 전화 : 010-5673-8601 (문자)

2021년 12월 말까지 예약 구매하시는 분들께 드리는 선물 및 혜택
(1) 2022학년도 대수능 주요문항 변형문제 한글 파일 제공
(2) 프리패스 금액 할인
(3)
등

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

랑데뷰27

2022학년도 대학수학능력시험 대비 R27 제1회

제 2 교시 수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[4]{81} \times \sqrt[3]{27} \times \log_2 4$ 의 값은? [2점]

① 4 ② 9 ③ 12 ④ 18 ⑤ 27

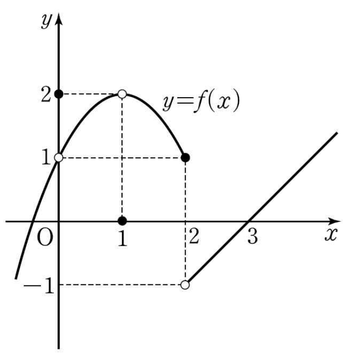
2. 함수 $f(x) = x^3 - 12x + a$의 극댓값이 17일 때, 상수 a의 값은? [2점]

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(a_k + 1) = 20$, $\sum_{k=1}^{10}(a_k + 2)^2 = 120$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2$의 값은? [3점]

① 40 ② 30 ③ 20 ④ 10 ⑤ 0

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



$f(0) + \lim_{t \to \infty} f\left(\frac{2t+3}{t+1}\right)$의 값은? [3점]

5. $0 \le x \le 2\pi$ 에서 방정식 $6\sin x\cos x + 3\sin x = 4\cos x + 2$ 의 모든 실근의 합은? [3점]

① π　② $\frac{3}{2}\pi$　③ 2π　④ $\frac{5}{2}\pi$　⑤ 3π

6. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f'(t)dt = x^3 - ax + 1$$

를 만족시킨다. $f(0) = 2f(1)$일 때, $f(a)$의 값은? [3점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

7. 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y = f(x)$라 하자. 함수 $y = f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점 중 한 점의 x좌표가 4일 때, 실수 m의 값은? [3점]

① -12　② -13　③ -14　④ -15　⑤ -16

8. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 t 초 후의 x 좌표가 $t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t$ 로 주어질 때, 원점을 출발한 후 처음 3 초 동안 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

9. $a_1 = 3$이고, 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n) = 9$$

가 성립할 때, a_{100}의 값은? [4점]

[랑데뷰N제 쉬사준킬 2023 개정 시리즈]

① 30 ② 27 ③ 24 ④ 21 ⑤ 18

10. 10보다 작은 세 자연수 a, b, c에 대하여

$$\lim_{x \to c} \frac{|x-a| - |a-c|}{x-c} = b$$

[랑데뷰N제 킬러극킬 2023 개정 시리즈]

가 성립한다. $a+b+c$의 최댓값은? [4점]

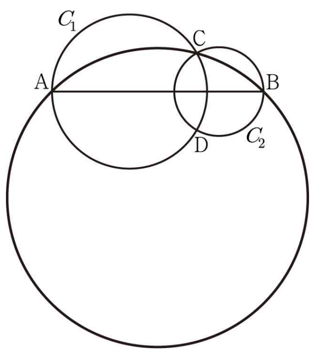
① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

11. 실수 x에 대하여 $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$에서 함수

$f(\theta)=x\sin\theta+\cos^2\theta-2$의 최댓값을 $g(x)$라 하자. 방정식 $|g(x)|=k$의 실근의 개수가 3일 때, k의 값은? (단, k는 상수이다.) [4점] **[랑데뷰상수 시리즈]**

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

12. 그림과 같이 선분 AB위에 중심이 있는 두 원 C_1, C_2의 두 교점 C, D에 대하여 $\overline{\mathrm{CD}}=6$이고 직선 CD는 직선 AB에 수직이다. 원 C_1은 점 A를 지나고 원 C_2는 점 B를 지날 때, $\angle\mathrm{CAD}=\frac{\pi}{6}$, $\angle\mathrm{CBD}=\frac{\pi}{3}$이다. 이때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는? [4점] **[랑데뷰☆수학 모의고사 시즌1]-중간맛**



① $18(2+\sqrt{3})\pi$ ② $27(2+\sqrt{3})\pi$ ③ $36(2+\sqrt{3})\pi$
④ $45(2+\sqrt{3})\pi$ ⑤ $54(2+\sqrt{3})\pi$

13. 모든 자연수 n과 이차함수 $f(x)=x^2-x$에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x < 1$일 때 $g(x)=f(x)$
> (나) $n \le x < n+1$일 때, $g(x)=f(x-n)$이다.

〔랑데뷰☆수학 모의고사 시즌2〕-매운맛(수학황들의 놀이터)

양수 k와 함수 $g(x)$에 대하여

$$\left| \lim_{h \to 0+} \frac{g(t+2h)-g(t-h)}{h} \right| = k$$

를 만족시키는 양수 t를 작은 수부터 크기순으로 나열하면 등차수열을 이루게 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{13}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

14. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{a_n} & (a_n \le 0) \\ -a_n+3 & (0 < a_n < 1) \\ a_n-2 & (a_n \ge 1) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_7 = \frac{1}{2}$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점] 〔랑데뷰☆수학 모의고사 시즌3〕-순한맛(1컷 88)

> <보 기>
> ㄱ. $\sum_{k=7}^{14} a_k = \frac{25}{2}$
> ㄴ. $a_6 < 0$일 때, 모든 a_1의 값의 합은 15이다.
> ㄷ. $a_6 > 0$일 때, a_1의 값의 최댓값과 최솟값의 차는 12이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

15.

[4점]

단답형

16. 등비수열 a_n의 첫째항이 3이고 공비가 -3일 때 $\dfrac{a_{100}}{a_{98}}$의 값을 구하시오. [3점]

17. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $(x-1)f(x)=x^3-x^2+x-1$이 성립할 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 반지름의 길이가 2인 원에 내접하는 삼각형 ABC가 $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{3}{2}$을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이를 구하시오. [3점]

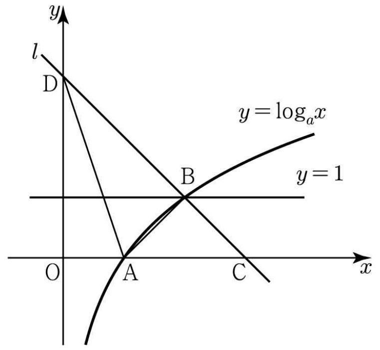
19. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$f(x)+f(x+2)=-4x^3+4x$를 만족시킬 때, $\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)dx$의 값을 구하시오. [3점]

20. $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$와 실수 t에 대하여 $x\le t$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $M(t)$라 하자. 함수 $M(t)$의 그래프가 미분가능하지 않은 점이 존재하기 위한 t의 범위가 $t>4$일 때, $M(2)+M(5)$의 값을 구하시오. (단, a는 양의 상수이다.) [4점]

[랑데뷰세미나]-심화개념서

21. 그림과 같이 곡선 $y=\log_a x\,(a>1)$과 x축과 만나는 점을 A라 하고, 곡선 $y=\log_a x$와 직선 $y=1$이 만나는 점을 B라 하자. 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선 l이 x축, y축과 만나는 점을 각각 C, D라 할 때, 삼각형 ABD의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 2배이다. 곡선 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. [랑데뷰 기출과변형 2023 출간예정]



(가) 곡선 $y=\log_a x$을 평행이동 또는 x축에 대하여 대칭이동 또는 y축에 대하여 대칭이동 및 이들을 여러 번 결합한 이동을 통해 곡선 $y=f(x)$와 일치시킬 수 있다.
(나) 곡선 $y=f(x)$는 두 점 C, D를 지나고 $f(1)<a$이다.

$f(\alpha)=-1$일 때, $\alpha=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

22.

[4점]

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 『**선택과목(확률과 통계)**』 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 두 사건 A, B는 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A \mid B)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B \mid A)=\frac{1}{2}$ 일 때, $\mathrm{P}(A \cap B)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

24. 이항분포 $\mathrm{B}(3,\ p)$를 따르는 확률변수 X의 평균이 2일 때, $\mathrm{P}(X=1)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{4}{27}$ ③ $\frac{2}{9}$ ④ $\frac{8}{27}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

25. 흰 공 5개와 검은 공 5개를 일렬로 나열할 때, 색깔의 변화가 5번 일어나도록 나열하는 방법의 수는? (단, 모든 공의 크기와 모양은 같다.) [3점]

① 72 ② 60 ③ 48 ④ 36 ⑤ 24

26. 불우이웃을 돕기 위해 시청에서 기획한 수박판매행사에 사용된 수박의 무게는 표준편차 1kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 수박들 중에서 144개의 수박을 임의추출하여 무게를 조사해보니 평균 10kg이었다. 이 행사에 사용된 수박의 무게의 모평균 m(kg)을 신뢰도 99%로 추정할 때의 신뢰구간은 $a \le m \le b$ 이다. $b-a$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

표준정규분포표

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
2.58	0.4950

① 0.28 ② 0.43 ③ 0.86
④ 1.44 ⑤ 1.78

27. 어느 고등학교 1학년 학생 200명을 대상으로 소풍 장소에 대한 선호도를 조사한 결과가 다음 표와 같다.

구분	축구장	공원	야구장
여학생	24	a	30
남학생	36	b	30
합계	60	80	60

이 고등학교 1학년 학생 200명 중 임의로 한 명을 택할 때, 이 학생이 여학생일 사건과 공원을 선호하는 학생일 사건이 서로 독립이기 위한 a의 값은? (단, 각 학생은 위의 세 장소 중 선호하는 하나를 반드시 선택한다.) [3점]

① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

28. 하나의 동전을 4번 던질 때 n $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$번째에 나온 면이 앞면이면 $x_n=1$, 뒷면이면 $x_n=-1$이라 하자. 확률변수 X를

$$X=x_1+x_2+x_3+x_4$$

라 할 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

단답형

29. 한 자리의 자연수가 적혀 있는 9개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 양의 약수의 개수가 k일 때, 동전 한 개를 k번 던지는 시행이 있다. 이 시행을 한 번 할 때, 동전의 앞면이 3번 나올 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30.

[4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 『**선택과목(미적분)**』 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{4n^2+3n+2}\right)$의 값은? [2점]

① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

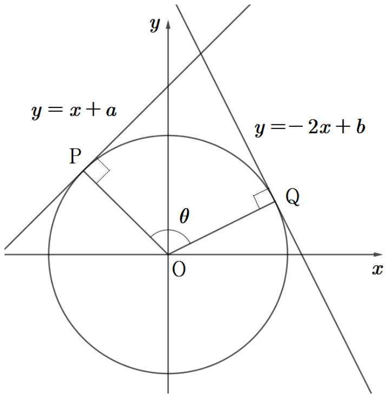
24. $f(x)=\int_x^{x+1} e^t\,dt$일 때, $\int_0^1 f'(x)dx$의 값은? [3점]

① $e-1$ ② $e+1$ ③ $(e-1)^2$
④ $(e+1)^2$ ⑤ e^2-1

25. 함수 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(0)$의 값은? [3점]

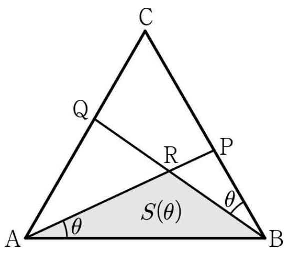
① 1 ② $\dfrac{5}{4}$ ③ $\dfrac{4}{5}$ ④ $\dfrac{2}{5}$ ⑤ $\dfrac{1}{4}$

26. 두 직선 $y=x+a$, $y=-2x+b$가 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 점을 각각 P, Q라 하자. $\angle\mathrm{POQ}=\theta$일 때, $\tan\theta$의 값은? (단, $a>0$, $b>0$) [3점]



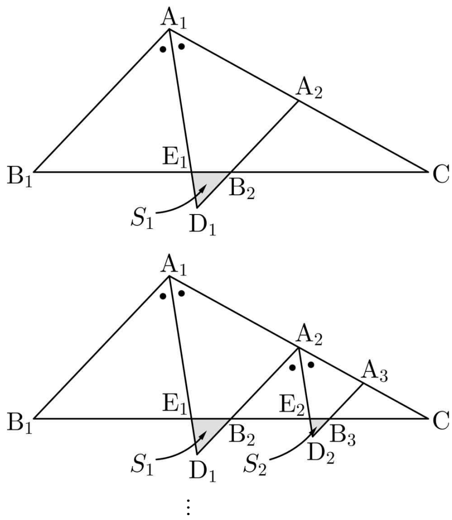
① $-\sqrt{3}$ ② -2 ③ $-\sqrt{6}$ ④ -3 ⑤ $-\sqrt{10}$

27. 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 변 BC 위의 점 P와 변 CA 위의 점 Q를 $\angle \mathrm{PAB} = \angle \mathrm{QBC} = \theta$가 되도록 잡는다. 두 선분 AP와 BQ의 교점을 R라 할 때, 삼각형 ABR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? [3점]



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

28. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{A_1B_1}} = 4$, $\overline{\mathrm{A_1C}} = 6$인 삼각형 $\mathrm{A_1B_1C}$에 대하여 선분 $\mathrm{A_1C}$의 중점을 $\mathrm{A_2}$이라 하고, 점 $\mathrm{A_2}$을 지나고 선분 $\mathrm{A_1B_1}$에 평행한 직선이 선분 $\mathrm{B_1C}$와 만나는 점을 $\mathrm{B_2}$라 하자. $\angle \mathrm{B_1A_1C}$의 이등분선이 두 직선 $\mathrm{A_2B_2}$, $\mathrm{B_1C}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{D_1}$, $\mathrm{E_1}$라 하자. $\cos(\angle \mathrm{A_1B_1C}) = \frac{11}{16}$일 때, 삼각형 $\mathrm{B_2D_1E_1}$의 넓이를 S_1라 하자. 선분 $\mathrm{A_2C}$의 중점을 $\mathrm{A_3}$이라 하고, 점 $\mathrm{A_3}$을 지나고 선분 $\mathrm{A_2B_2}$에 평행한 직선이 선분 $\mathrm{B_2C}$와 만나는 점을 $\mathrm{B_3}$라 하자. $\angle \mathrm{B_2A_2C}$의 이등분선이 두 직선 $\mathrm{A_3B_3}$, $\mathrm{B_2C}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{D_2}$, $\mathrm{E_2}$라 하자. 삼각형 $\mathrm{B_3D_2E_2}$의 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 만들어진 n번째 삼각형 $\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{D}_n\mathrm{E}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{3\sqrt{15}}{40}$ ② $\frac{\sqrt{15}}{20}$ ③ $\frac{\sqrt{15}}{10}$ ④ $\frac{\sqrt{15}}{8}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{15}}{20}$

단답형

29. 함수

$$f(x)=(x+a)^2e^x+b$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $|f(x)|$가 $x=c$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 c의 개수는 5이다.
(나) 닫힌구간 $\left[0,\ -\frac{a}{3}\right]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값과 닫힌구간 $[0,\ -a]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 같다.

a에 관한 b의 최솟값을 $g(a)$라 할 때, $g'\left(-\frac{5}{2}\right)$의 최댓값은 αe^{β}이다. $\alpha\times\beta$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to-\infty}x^2e^x=0$, $a\le-2$, α, β는 유리수이다.) [4점]

30.

[4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 『**선택과목(기하)**』 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

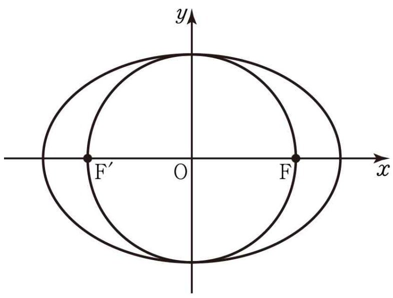
수학 영역(기하)

5지선다형

23. 좌좌표공간의 두 점 A$(2,\ 2a,\ -2)$, B$(7,\ -4,\ 1)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 x축 위에 있을 때, a의 값은? [2점]

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

24. 다음 그림과 같이 어떤 타원의 단축을 지름으로 하는 원을 그리면 그 원은 타원의 두 초점 F, F$'$을 지난다고 한다. 타원의 단축의 길이가 2일 때, 타원의 장축의 길이는? [3점]

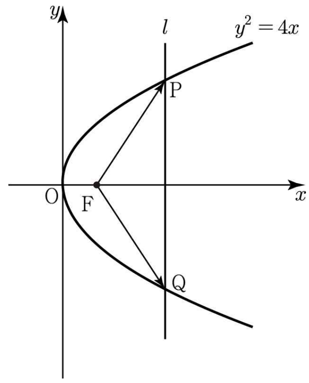


① $2\sqrt{2}$　　② $2\sqrt{3}$　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

25. 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD 의 변 AB 의 중점을 M 이라 할 때, $|\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}|$ 의 값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

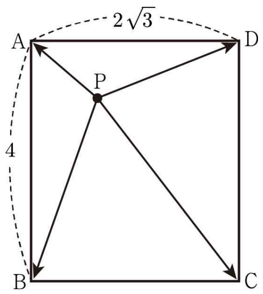
26. 그림과 같이 포물선 $y^2=4x$과 y축에 평행한 직선 l 이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자. 포물선의 초점 F에 대하여 내적 $\overrightarrow{\mathrm{FP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FQ}}$ 의 최솟값은? [3점]



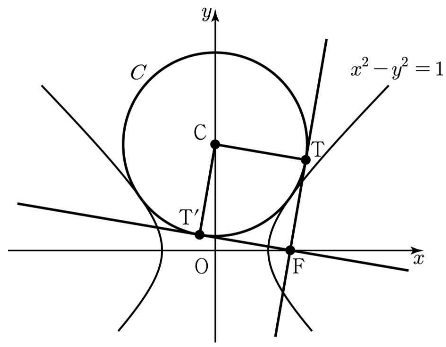
① -10 ② -9 ③ -8 ④ -7 ⑤ -6

27. $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{3}$ 인 직사각형 ABCD의 둘레 또는 내부를 움직이는 점 P가 있다. $(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}})=0$ 을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는? [3점]

① $\frac{8}{3}\pi$ ② 3π ③ $\frac{10}{3}\pi$ ④ $\frac{11}{3}\pi$ ⑤ 4π



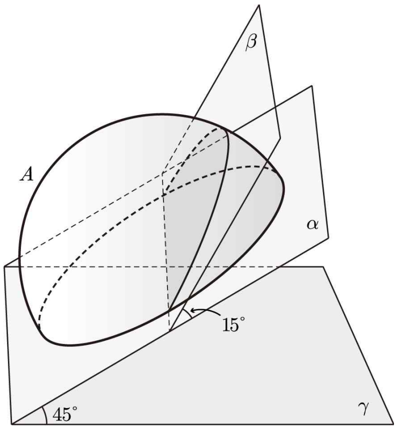
28. 그림과 같이 좌표평면 위에 점 C(0, 2)을 중심으로 하고 쌍곡선 $x^2-y^2=1$에 접하는 원 C가 있다. 이 쌍곡선의 한 초점 F에서 원 C에 그은 두 접선의 접점을 각각 T, T′이라 하고 라 하자. 사각형 CTFT′의 넓이는? [4점]



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

단답형

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 4인 반구가 밑면이 평면 α 위에 오도록 놓여있다. 반구의 중심을 지나고, 평면 α와 15°의 각을 이루는 평면 β에 의하여 이 반구가 두 부분으로 나뉘어질 때, 부피가 큰 쪽의 입체를 A라 하자.



평면 α와 45°의 각을 이루고 평면 β와 60°의 각을 이루는 평면을 γ라고 할 때, 입체도형 A의 평면 γ 위로의 정사영의 넓이를 S라 할 때, $\dfrac{S}{\pi}$의 값을 구하시오. [4점]

30.

[4점]

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2022학년도 수학영역 랑데뷰 R27-(1) 빠른답

공통과목

1	④	2	⑤	3	①	4	②	5	⑤
6	①	7	①	8	③	9	①	10	②
11	③	12	③	13	①	14	⑤	15	
16	9	17	2	18	6	19	8	20	24
21	52	22							

확률과 통계

23	③	24	③	25	①	26	②	27	⑤
28	③	29	13	30					

미적분

23	①	24	③	25	②	26	④	27	④
28	③	29	1	30					

기하

23	①	24	①	25	⑤	26	③	27	①
28	③	29	12	30					

2022학년도 수학영역 R27-(1)-풀이

공통과목

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

1) 정답 ④

$\sqrt[4]{81}\times\sqrt[3]{27}\times\log_2 4=3\times3\times2=18$

2) 정답 ⑤

$f(x)=x^3-12x+a$에서

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대, $x=2$에서 극소이다.

이때, 함수 $f(x)$의 극댓값이 17이므로

$f(-2)=-8+24+a=17$

따라서 $a=1$

3) 정답 ①

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2=\sum_{k=1}^{10}\left(a_k{}^2+4a_k+4\right)$

$=\sum_{k=1}^{10}a_k{}^2+4\sum_{k=1}^{10}\left(a_k+1\right)$

$=\sum_{k=1}^{10}a_k{}^2+4\times20$

$=120$

$\sum_{k=1}^{10}a_k{}^2=120-80=40$

4) 정답 ②

$f(0)+\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{2t+3}{t+1}\right)=2+\lim_{x\to2+}f(x)=2+(-1)=1$

5) 정답 ⑤

$6\sin x\cos x+3\sin x=4\cos x+2$에서

$6\sin x\cos x+3\sin x-4\cos x-2=0$

$(3\sin x-2)(2\cos x+1)=0$

$\sin x=\frac{2}{3}$ 또는 $\cos x=-\frac{1}{2}$

$\sin x=\frac{2}{3}$을 만족시키는 두 실수를 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$\beta=\pi-\alpha$이므로 $\alpha+\beta=\pi$

$\cos x=-\frac{1}{2}$을 만족시키는 두 실수를 γ, δ라 하면

$\gamma+\delta=\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi=2\pi$

따라서 구하는 모든 실근의 합은

$\pi+2\pi=3\pi$

6) 정답 ①

$\int_1^x f'(t)dt=x^3-ax+1$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1-a+1$에서 $a=2$이다.

$\int_1^x f'(t)dt=x^3-2x+1$의 양변을 미분하면

$f'(x)=3x^2-2$이므로

$f(x)=x^3-2x+C$ 이다.

$f(0)=C$, $f(1)=C-1$이므로 $f(0)=2f(1)$에서

$C=2C-2$ $\therefore$ $C=2$

따라서 $f(x)=x^3-2x+2$

$f(a)=f(2)=8-4+2=6$

7) 정답 ①

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$f(x)=\log_2(x-m)$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있고, 교점 중 한 점의 x좌표가 4이므로 그 교점의 좌표는 $(4,4)$이다.

$f(4)=\log_2(4-m)=4$이므로 $4-m=16$
따라서 $m=-12$

8) 정답 ③
점 P의 t초 후의 속도 v는
$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-9t+6=3(t-1)(t-2)$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
v		$+$	0	$-$	0	$+$	
x	0	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$

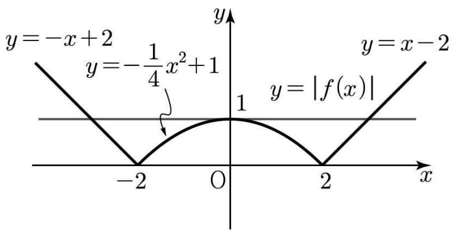
위의 증감표에서 $0 \le t \le 1$일 때는 양의 방향으로만 $\dfrac{5}{2}$만큼, $1 \le t \le 2$일 때는 음의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼, $2 \le t \le 3$일 때는 양의 방향으로 $\dfrac{5}{2}$만큼 움직였으므로 원점을 출발 한 후 처음 3초 동안 움직인 거리는 $\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{11}{2}$이다.

9) 정답 ①
$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)={a_{n+1}}^2-{a_n}^2=9$
수열 $\{{a_n}^2\}$은 첫째항이 9이고 공차가 9인 등차수열이므로
${a_n}^2=9n$
$\therefore\ a_n=3\sqrt{n}$
따라서 $a_{100}=30$

10) 정답 ②
(i) $a>c$일 때,
$\lim\limits_{x\to c}\dfrac{|x-a|-|a-c|}{x-c}$
$=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{-(x-a)-(a-c)}{x-c}$
$=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{-(x-c)}{x-c}=-1$ (모순)
(ii) $a=c$일 때,
$\lim\limits_{x\to c}\dfrac{|x-a|-|a-c|}{x-c}$
$=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{|x-c|}{x-c} \to \begin{cases}\lim\limits_{x\to c+}\dfrac{x-c}{x-c}=1 \\ \lim\limits_{x\to c-}\dfrac{-(x-c)}{x-c}=-1\end{cases}$ ⇨ (발산)
(iii) $a<c$일 때,
$\lim\limits_{x\to c}\dfrac{|x-a|-|a-c|}{x-c}$
$=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{(x-a)+(a-c)}{x-c}$
$=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{x-c}{x-c}=1$
따라서 $b=1$이다.

$a=8,\ c=9,\ b=1$일 때, 최댓값 $a+b+c=18$을 갖는다.

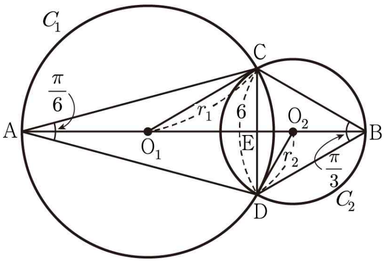
11) 정답 ③
$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$에서
$f(\theta)=x\sin\theta+\cos^2\theta-2$
$\quad=-\sin^2\theta+x\sin\theta-1$
$\sin\theta=t$라 두면 $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$에서 $-1 \le t \le 1$
따라서
$f(t)=-t^2+xt-1\ (-1 \le t \le 1)$
$\quad=-\left(t-\dfrac{x}{2}\right)^2-1+\dfrac{x^2}{4}\ (-1 \le t \le 1)$
(i) $\dfrac{x}{2}<-1$ 즉 $x<-2$일 때, $g(x)=f(-1)=-x-2$
(ii) $-1 \le \dfrac{x}{2} \le 1$ 즉 $-2 \le x \le 2$일 때,
$g(x)=f\left(\dfrac{x}{2}\right)=-1+\dfrac{x^2}{4}$
(iii) $\dfrac{x}{2}>1$ 즉 $x>2$일 때, $g(x)=f(1)=x-2$
(i), (ii), (iii)에서
$g(x)=\begin{cases}-x-2 & (x<-2) \\ \dfrac{1}{4}x^2-1 & (-2 \le x \le 2) \\ x-2 & (x>2)\end{cases}$
그러므로 $y=|g(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $k=1$일 때, 방정식 $|g(x)|=k$의 실근의 개수는 3이다.

12) 정답 ③
[그림 : 이정배T]

직선 AB와 직선 CD의 교점을 E라 하고 원 C_1의 중심을 O_1, 반지름의 길이를 r_1이라 하면 $\overline{CD}=6$, $\angle CAD=\dfrac{\pi}{6}$이므로 사인법칙에 의하여
$\dfrac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=2r_1$
$\dfrac{6}{\frac{1}{2}}=2r_1,\ r_1=6$



직각삼각형 CO_1E에서

$\overline{O_1E}=\sqrt{\overline{O_1C}^2-\overline{EC}^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$

삼각형 CDB는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이므로

$\overline{EB}=\overline{CB}\cos\frac{\pi}{6}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

즉, $\overline{AB}=\overline{AO_1}+\overline{O_1E}+\overline{EB}=6(\sqrt{3}+1)$ …㉠

한편

$\angle CAB+\angle CBA=\frac{1}{2}\angle CAD+\frac{1}{2}\angle CBD$

$=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$

이므로

$\angle ACB=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$이므로

$\sin(\angle ACB)=\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}$ …㉡

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 r라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ACB)}=2r$

㉠, ㉡에 의하여

$r=\frac{1}{2}\times\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ACB)}=3\sqrt{6}+3\sqrt{2}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$(3\sqrt{6}+3\sqrt{2})^2\pi=36(2+\sqrt{3})\pi$

13) 정답 ①
[그림 : 최성훈T]

함수 $g(x)$는 $x=n$에서 미분가능하지 않다. 실수 t에 대하여 함수 $g(t)$를

$h(t)=\left|\lim_{h\to0+}\frac{g(t+2h)-g(t-h)}{h}\right|$라 하자.

(i) $t\neq n$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=t$에서 미분가능하므로

$n\le x<n+1$일 때, $g'(x)=f'(x-n)$

이때

$h(t)=\left|\lim_{h\to0+}\frac{g(t+2h)-g(t-h)}{h}\right|$

$=\left|\lim_{h\to0+}\frac{g(t+2h)-g(t)}{h}-\lim_{h\to0+}\frac{g(t-h)-g(t)}{h}\right|$

$=|2g'(t)-\{-g'(t)\}|$

$=|3g'(t)|$

$=|3f'(t-n)|$

$=3|2(t-n)-1|$

$=|6(t-n)-3|$이다.

(ii) $t=n$일 때, $g(x)$는 미분가능하지 않으므로

$g(t)=\begin{cases} f(t-n+1) & (n-1\le t<n) \\ f(t-n) & (n\le t<n+1)\end{cases}$에서

$h>0$일 때,

$\frac{g(t+2h)-g(t-h)}{h}$

$=\frac{g(n+2h)-g(n-h)}{h}$

$=\frac{f(2h)-f(-h+1)}{h}$

$=\frac{(4h^2-2h)-(h^2-h)}{h}=\frac{3h^2-h}{h}=3h-1$

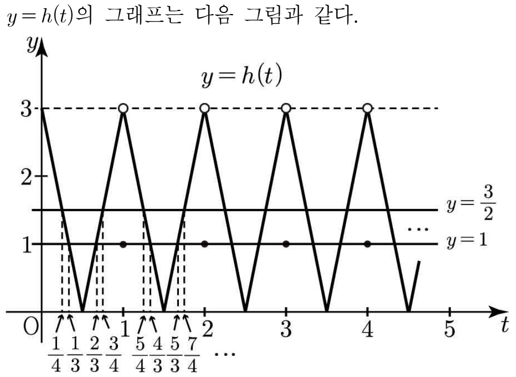
이므로

$\left|\lim_{h\to0+}\frac{g(t+2h)-g(t-h)}{h}\right|=\left|\lim_{h\to0+}(3h-1)\right|=1$

(i), (ii)에서 함수 $g(t)$는

$h(t)=\begin{cases} |6(t-n)-3| & (t\neq n) \\ 1 & (t=n)\end{cases}$이다.

$y=h(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$h(t)=k$에서

$k=\frac{3}{2}$일 때, $t_1=\frac{1}{4}$, $d=\frac{1}{2}$인 등차수열을 이룬다.

$k=1$일 때, $t_1=\frac{1}{3}$, $d=\frac{1}{3}$인 등차수열을 이룬다.

따라서 $S=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$

14) 정답 ⑤

ㄱ.

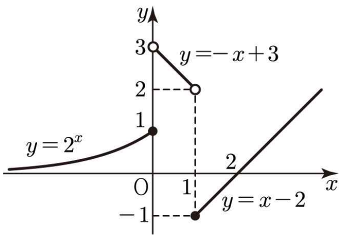
$a_7=\frac{1}{2}$이므로 $a_8=-\frac{1}{2}+3=\frac{5}{2}$

$a_8=\frac{5}{2}$이므로 $a_9=\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$이다.

따라서 $a_{10}=\frac{5}{2}$, $a_{11}=\frac{1}{2}$, $a_{12}=\frac{5}{2}$, $a_{13}=\frac{1}{2}$, $a_{14}=\frac{5}{2}$

$\sum_{k=7}^{14} a_k = 4\times\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)=12$ (거짓)

다음과 같은 그래프에서 $\{a_n\}$을 관찰할 수 있다.



<table>
<tr><td>a_7</td><td>a_6</td><td>a_5</td><td>a_4</td><td>a_3</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td rowspan="9">$\frac{1}{2}$</td><td rowspan="2">-1</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td></tr>
<tr><td rowspan="7">$\frac{5}{2}$</td><td rowspan="6">$\frac{1}{2}$</td><td rowspan="2">-1</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\frac{5}{2}$</td><td rowspan="3">$\frac{1}{2}$</td><td>-1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{5}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{9}{2}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{9}{2}$</td><td>$\frac{13}{2}$</td><td>$\frac{17}{2}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{9}{2}$</td><td>$\frac{13}{2}$</td><td>$\frac{17}{2}$</td><td>$\frac{21}{2}$</td><td>$\frac{25}{2}$</td></tr>
</table>

따라서

ㄴ. $a_6=-1$일 때, $a_1=6$ 또는 $a_1=9$이다,

따라서 a_1의 값의 합은 15 (참)

ㄷ. $a_6=\frac{5}{2}$일 때, a_1의 최댓값은 $\frac{25}{2}$이고 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 $\frac{25}{2}-\frac{1}{2}=12$이다. (참)

15) 정답 9

$\frac{a_{100}}{a_{98}}=r^2=(-3)^2=9$

16) 정답 2

$x\neq1$일 때, $f(x)=\frac{x^3+x^2-x-1}{x-1}$ 이고,

$x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이다.

$\therefore\ f(1)=\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x^2+1)=2$

17) 정답 6

삼각형 ABC에 외접하는 원의 반지름의 길이가 2이므로

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각

$\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$로 놓으면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2\times2=4$,

즉 $\sin A=\frac{a}{4}$, $\sin B=\frac{b}{4}$, $\sin C=\frac{c}{4}$

$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{3}{2}$이므로

$\frac{a}{4}+\frac{b}{4}+\frac{c}{4}=\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}(a+b+c)=\frac{3}{2}$

따라서 $a+b+c=\frac{3}{2}\times4=6$이므로

삼각형 ABC의 둘레의 길이는 6

18) 정답 8

$$\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_{-2}^{0}f(x+2)dx$$
$$=\int_{-2}^{0}\{f(x)+f(x+2)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(-4x^3+4x)dx$$
$$=\left[-x^4+2x^2\right]_{-2}^{0}=-(-16+8)=8$$

19) 정답 24

$f(x)=x(x-a)^2$에서 $a>0$이므로 $x\le t$에서의 $f(x)$의 최댓값은

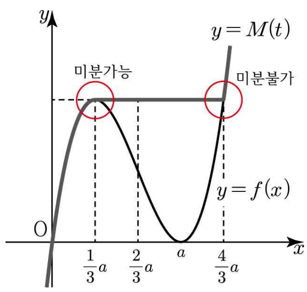
(i) $t\le\frac{a}{3}$일 때, $M(t)=f(t)$

(ii) $\frac{a}{3}\le t\le\frac{4}{3}a$일 때, $M(t)=f\left(\frac{a}{3}\right)$

(iii) $t>\frac{4}{3}a$일 때, $M(t)=f(t)$

이다.

따라서 함수 $y=M(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $t>\frac{4}{3}a$일 때, 함수 $y=M(t)$는 $t=\frac{4}{3}a$에서 미분가능하지 않다.

그러므로 $\frac{4}{3}a=4$에서 $a=3$이다.

따라서 $f(x)=x(x-3)^2$이다.

$M(2)=f(1)=4$

$M(5)=f(5)=20$

따라서 $M(2)+M(5)=24$

20) 정답 52

$\mathrm{A}(1, 0)$, $\mathrm{B}(a, 1)$, $\mathrm{C}(a+1, 0)$, $\mathrm{D}(0, a+1)$이므로

$\triangle\mathrm{ABD}=\frac{1}{2}a^2$, $\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}a$이다.

삼각형 ABD의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 2배이므로

$\frac{1}{2}a^2=2\times\frac{1}{2}a$

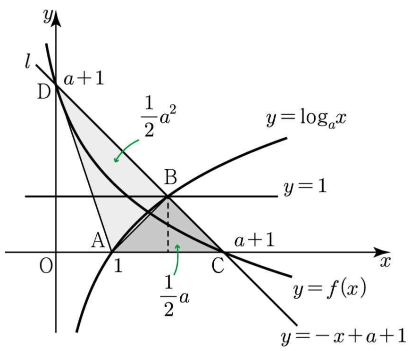
$\therefore\ a=2$

따라서 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점 $\mathrm{B}(2, 1)$이다.

직선 l의 방정식은 $y=-x+3$이므로 $\mathrm{C}(3, 0)$, $\mathrm{D}(0, 3)$이다.

(가)조건에서 $f(x)$는 밑이 2인 로그함수임을 알 수 있고 (나)조건의 C, D를 지나므로 감소함수이어야 한다. 따라서 $y=f(x)$는 $y=\log_2(-x)$또는 $y=-\log_2 x$을 평행이동 한 그래프이다.

그런데 $f(1)<2$을 만족하는 그래프는 아래로 볼록으로 감소하므로 $y=f(x)$는 $y=-\log_2 x$을 평행이동 한 그래프임을 알 수 있다.



따라서 $f(x)=-\log_2(x+m)+n$라 하자.

$f(0)=3$, $f(3)=0$이므로

$f(0)=-\log_2 m+n=3$, $f(3)=-\log(3+m)+n=0$

$\log_2(3+m)-\log_2 m=3$에서

$\frac{3+m}{m}=8$

$3+m=8m$

$\therefore\ m=\frac{3}{7}$

따라서 $n=3+\log_2\frac{3}{7}=\log_2\frac{24}{7}$

그러므로 $f(x)=-\log_2\left(x+\frac{3}{7}\right)+\log_2\frac{24}{7}$

$f(\alpha)=-1$이므로 $-1=-\log_2\left(\alpha+\frac{3}{7}\right)+\log_2\frac{24}{7}$에서

$\log_2\left(\alpha+\frac{3}{7}\right)=1+\log_2\frac{24}{7}=\log_2\frac{48}{7}$

$\alpha+\frac{3}{7}=\frac{48}{7}$

$\therefore\ \alpha=\frac{45}{7}$

$p=7$, $q=45$이므로 $p+q=52$이다.

확률과통계
[출제자 : 황보백 송원학원]

23) 정답 ③

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\mid B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B\mid A)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

24) 정답 ③

이항분포 $\mathrm{B}(3,\ p)$을 따르는 확률변수 X의 평균이 2이므로

$3p=2$ $\qquad\therefore\ p=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X=1)={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$

25) 정답 ①

5번의 색깔의 변화가 있기 위해서는 다음과 같이 나열하면 된다.

(i) (흰 공)(검은 공)(흰 공)(검은 공)(흰 공)(검은 공)

(ii) (검은 공)(흰 공)(검은 공)(흰 공)(검은 공)(흰 공)

(i) 에서 흰 공을 배열하는 방법의 수는

$x_1+x_2+x_3=5$를 만족하는 자연수의 해의 개수와 동일하므로 ${}_3\mathrm{H}_2$ 이다. 검은 공도 마찬가지이므로 흰 공과 겅은 공 모두 조건에 맞게 나열하는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{H}_2\times{}_3\mathrm{H}_2=36$이다.

(ii) 에서도 마찬가지이므로 총 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_2\times{}_3\mathrm{H}_2\times 2=72$

26) 정답 ②

$b-a$는 신뢰구간의 길이를 의미한다.

모표준편차가 1이고 표본의 크기가 144, $\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)=0.99$이므로

$b-a=2\times 2.58\times\frac{1}{\sqrt{144}}=2.58\times\frac{1}{6}=0.43$이다.

27) 정답 ⑤

이 고등학교 1학년 학생 200명 중 임의로 한 명을 택할 때, 여학생일 사건을 A, 공원을 선호하는 학생일 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{a+24+30}{200}=\frac{a+54}{200}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{80}{200}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{a}{200}$

두 사건 A, B 가 서로 독립이기 위해서는

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$

$\frac{a+54}{200}\times\frac{2}{5}=\frac{a}{200}$, $2a+108=5a$

$\therefore\ a=36$

28) 정답 ③
뒷면이 4번 나오는 경우
$X=-4$, $\mathrm{P}(X=-4)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$
뒷면이 3번, 앞면이 1번 나오는 경우
$X=-3+1=-2$, $\mathrm{P}(X=-2)={}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{16}$
뒷면이 2번, 앞면이 2번 나오는 경우
$X=-2+2=0$, $\mathrm{P}(X=0)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{6}{16}$
뒷면이 1번, 앞면이 3번 나오는 경우
$X=-1+3=2$, $\mathrm{P}(X=2)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{16}$
앞면이 4번 나오는 경우
$X=4$, $\mathrm{P}(X=4)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$
따라서 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	-4	-2	0	2	4	합계
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$\mathrm{E}(\mathrm{X})=0$

[다른 풀이]
앞면이 나온 횟수를 Y, 뒷면이 나온 횟수를 $4-Y$라 하면
$X=x_1+x_2+x_3+x_4=Y-(4-Y)=2Y-4$
확률변수 Y의 분포는 $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{1}{2}\right)$을 만족하므로
$\mathrm{E}(Y)=4\times\frac{1}{2}=2$
$\therefore\ \mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(2Y-4)=2\mathrm{E}(Y)-4=2\times2-4=0$

29) 정답 13
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 양의 약수의 개수는 각각 1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3이다.
따라서 동전의 앞면이 3번 나오는 경우는 다음과 같다.
(i) 공에 적혀 있는 수가 4 또는 9이고, 동전을 3번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은
$\frac{2}{9}\times{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{36}$
(ii) 공에 적혀 있는 수가 6 또는 8이고, 동전을 4번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은
$\frac{2}{9}\times{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{18}$
(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은
$\frac{1}{36}+\frac{1}{18}=\frac{1}{12}$
따라서 $p=12$, $q=1$
$p+q=13$

미적분
[출제자 : 황보백 송원학원]

23) 정답 ①
$$\lim_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{4n^2+3n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n-2}{2n+\sqrt{4n^2+3n+2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-3-\frac{2}{n}}{2+\sqrt{4+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}}=-\frac{3}{4}$$

24) 정답 ③
$f(x)=\int_x^{x+1}e^t\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=e^{x+1}-e^x=e^x(e-1)$
$$\therefore\ \int_0^1 f'(x)dx=(e-1)\int_0^1 e^x dx$$
$$=(e-1)\left[e^x\right]_0^1$$
$$=(e-1)^2$$

25) 정답 ②
함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로
$f(g(x))=x$
이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(g(x))g'(x)=1$ ⋯ ㉠
한편 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로 $g(0)=\frac{1}{2}$이고,
$f'(x)=\frac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}$에서
$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{5}$
따라서 ㉠에 $x=0$을 대입하면
$f'\left(\frac{1}{2}\right)g'(0)=1$이므로
$\frac{4}{5}\times g'(0)=1$에서 $g'(0)=\frac{5}{4}$

26) 정답 ④
두 직선 $y=x+a$, $y=-2x+b$의 교점을 R이라 할 때,
$\angle\mathrm{PRQ}=\pi-\theta$이다.
직선 $y=x+a$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α라 하면 $\tan\alpha=1$
직선 $y=-2x+b$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 β라 하면 $\tan\beta=-2$이다.
한편, $\alpha+(\pi-\theta)=\beta$에서 $\pi-\theta=\beta-\alpha$이다.
따라서
$\tan(\pi-\theta)=\tan(\beta-\alpha)$
$$=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$= \frac{-2-1}{1+(-2\times1)} = 3$$

$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$이므로 $\tan\theta = -3$이다.

27) 정답 ④

$\angle \mathrm{RBA} = \frac{\pi}{3} - \theta$이므로 $\angle \mathrm{ARB} = \frac{2}{3}\pi$

삼각형 ABR에서 사인법칙을 적용하면

$$\frac{\overline{\mathrm{BR}}}{\sin\theta} = \frac{\overline{\mathrm{AR}}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)} = \frac{2}{\sin\frac{2}{3}\pi} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore S(\theta) = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AR}}\times\overline{\mathrm{BR}}\times\sin\frac{2}{3}\pi$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\times\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\theta\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin\theta$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\times 2\sin\theta}{\theta}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\pi}{3} = 2$$

28) 정답 ③

삼각형 $\mathrm{A_1B_1C}$에서 $\overline{\mathrm{B_1C}} = x$, $\angle \mathrm{A_1B_1C} = \theta$ $\left(\cos\theta = \frac{11}{16}\right)$라 하고 코사인법칙을 적용하면

$$6^2 = 4^2 + x^2 - 2\times4\times x\times\cos\theta$$

$$36 = 16 + x^2 - \frac{11}{2}x$$

$$x^2 - \frac{11}{2}x - 20 = 0$$

$$2x^2 - 11x - 40 = 0$$

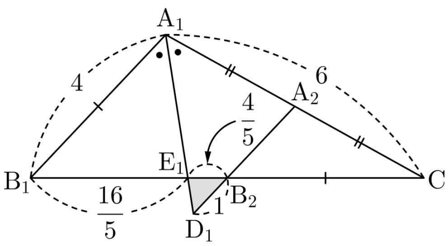
$$(x-8)(2x+5) = 0$$

$$x = 8$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{B_1C}} = 8$

각의 이등분선 성질에 의해

$\overline{\mathrm{A_1B_1}} : \overline{\mathrm{A_1C}} = \overline{\mathrm{B_1E_1}} : \overline{\mathrm{E_1C}} = 2:3$이므로 $\overline{\mathrm{B_1E_1}} = 8\times\frac{2}{5} = \frac{16}{5}$



$\mathrm{A_2}$가 선분 $\mathrm{A_1C}$의 중점이고 $\overline{\mathrm{A_1B_1}} /\!/ \overline{\mathrm{A_2B_2}}$이므로

삼각형 $\mathrm{A_1B_1C}$와 삼각형 $\mathrm{A_2B_2C}$는 닮음비가 $2:1$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{B_2C}} = \overline{\mathrm{B_1B_2}} = 4$

그러므로 $\overline{\mathrm{B_2E_1}} = 4 - \frac{16}{5} = \frac{4}{5}\cdots$㉠

$\angle \mathrm{B_1A_1D_1} = \angle \mathrm{A_1D_1A_2}$ ($\because$ 엇각)

$\angle \mathrm{D_1A_1A_2} = \angle \mathrm{A_1D_1A_2}$이므로 삼각형 $\mathrm{A_2A_1D_1}$은 $\overline{\mathrm{A_1A_2}} = \overline{\mathrm{A_2D_1}} = 3$인 이등변삼각형이다.

따라서 $\overline{\mathrm{B_2D_1}} = 3-2 = 1\cdots$㉡

삼각형 $\mathrm{B_2D_1E_1}$에서 $\angle \mathrm{A_2B_2C} = \angle \mathrm{D_1B_2E_1} = \theta$에서

$\sin\theta = \sqrt{1-\left(\frac{11}{16}\right)^2} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$이므로 ㉠, ㉡에 의해

$$S_1 = \frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times1\times\frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{40}$$

삼각형 $\mathrm{A_1B_1C}$와 삼각형 $\mathrm{A_2B_2C}$는 닮음비가 $2:1$이므로

등비급수의 공비는 $\frac{1}{4}$이다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{3\sqrt{15}}{40}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{10}$$

29) 정답 1

[그림 : 최성훈T]

$$f(x) = (x+a)^2e^x + b$$

$$f'(x) = \{2(x+a) + (x+a)^2\}e^x$$

$$= \{x^2 + 2(a+1)x + a(a+2)\}e^x$$

$$= (x+a)(x+a+2)e^x$$

증감표를 작성해 보자.

x	$\cdots$	$-a-2$	$\cdots$	$-a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		극대		극소	

따라서

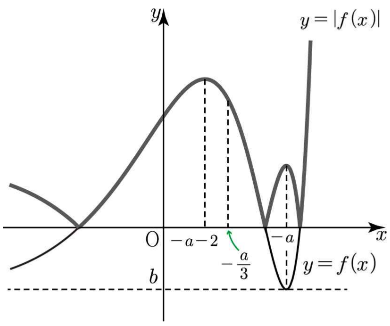
함수 $f(x)$는 $x=-a-2$에서 극댓값 $f(-a-2) = 4e^{-a-2}+b$을, $x=-a$에서 극솟값 $f(-a) = b$을 갖는다.

조건 (가)를 만족하기 위해서는 극솟값 b가 음수이어야 한다.

$$0 \le -a-2 \le -\frac{a}{3}$$

$\therefore\ -3 \le a \le -2$

조건 (나)를 만족하기 위해서는 함수 $f(x)$의 극댓값이 $0 \le x \le -\frac{a}{3}$에서 나타나야 하고 함수 $f(x)$의 극솟값의 절댓값이 극댓값보다 작거나 같아야 한다.



즉,

$f(-a-2) \geq |f(-a)|$

$4e^{-a-2}+b \geq -b$

$2b \geq -4e^{-a-2}$

$\therefore -2e^{-a-2} \leq b < 0$

따라서 $g(a)=-2e^{-a-2}$ $(-3 \leq a \leq -2)$이다.

$g'(a)=2e^{-a-2}$ $(-3 < a < -2)$에서 $g'\left(-\frac{5}{2}\right)=2\sqrt{e}$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=\frac{1}{2}$이다.

$\therefore \alpha\beta=1$

기하
[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

23) 정답 ①

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 구하면

$\left(\frac{14+2}{3},\ \frac{-8+2a}{3},\ \frac{2-2}{3}\right)$

이 점이 x축 위에 있으므로 $\frac{-8+2a}{3}=0$

$\therefore a=4$

24) 정답 ①

원의 반지름의 길이를 $c\,(c>0)$라 하면 두 초점의 좌표는 각각 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$이고, 단축의 길이가 $2c$이므로

$2c=2$에서 $c=1$이다.

장축의 길이는 $2\sqrt{c^2+c^2}=2\sqrt{2}\,c$에서 $2\sqrt{2}$이다.

25) 정답 ⑤

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD 에서

$\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}=0$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}|$

$=|\vec{0}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{MC}}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

26) 정답 ③

[그림 : 최성훈T]

직선 l 의 방정식을 $x=k\,(k>0)$라 하면

$\mathrm{P}(k,\ 2\sqrt{k})$, $\mathrm{Q}(k,\ -2\sqrt{k})$이고, $\mathrm{F}(1,\ 0)$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{FP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FQ}}=(k-1,\ 2\sqrt{k}) \cdot (k-1,\ -2\sqrt{k})$

$=(k-1)^2-4k=k^2-6k+1$

$=(k-3)^2-8$

그러므로

$k=3$일 때, 최솟값 -8를 가진다.

27) 정답 ①

그림과 같이 두 변 AD, BC의 중점을 각각 M, N이라 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=2\overrightarrow{\mathrm{PM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=2\overrightarrow{\mathrm{PN}}$

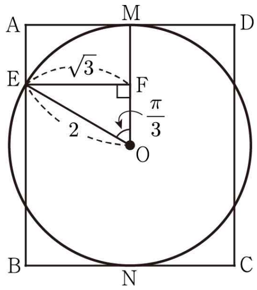
이므로

$(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}})=0$

$2\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot 2\overrightarrow{\mathrm{PN}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PN}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{PM}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PN}}$



따라서 점 P가 나타내는 도형은 선분 MN을 지름으로 하는 원 중에서 사각형 ABCD의 둘레 또는 그 내부에 있는 부분이다.

그림과 같이 이 원의 중심을 O라 하고 원이 직사각형과 만나는 점중 A에 가까운 점을 E라 하자. E에서 선분 OM에 내린 수선의 발을 F라 하면 $\overline{\mathrm{OE}}=2$, $\overline{\mathrm{EF}}=\sqrt{3}$이므로 $\angle\mathrm{EOF}=\frac{\pi}{3}$이다.

따라서 호 EM의 길이는 $2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$

따라서 구하는 도형의 길이는

$4\times\widehat{\mathrm{EM}}=4\times\frac{2}{3}\pi=\frac{8}{3}\pi$

28) 정답 ③

쌍곡선 $x^2-y^2=1$의 두 초점의 좌표는 $(\pm\sqrt{2},\ 0)$이므로 한 초점을 $\mathrm{F}(\sqrt{2},\ 0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{CF}}=\sqrt{2+4}=\sqrt{6}$ ⋯ ㉠

원 C의 방정식을 $x^2+(y-2)^2=r^2$이라 하고 쌍곡선의 방정식과 연립하여 x를 소거하면

$r^2-(y-2)^2-y^2=1$

$2y^2-4y+5-r^2=0$

원 C와 쌍곡선이 접하려면 판별식 $D=0$이어야 하므로

$D/4=4-2(5-r^2)=0$

$\therefore 2r^2=6$

$\therefore r=\sqrt{3}$ ⋯ ㉡

삼각형 CFT에서 $\angle\mathrm{CFT}$의 크기를 θ라 할 때, ㉠, ㉡에서

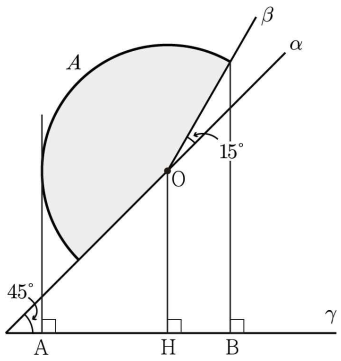
$\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{CT}}}{\overline{\mathrm{CF}}}=\frac{r}{\overline{\mathrm{CF}}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 에서 $\theta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{TF}} = \overline{\mathrm{T'F}} = \sqrt{3}$, $\angle \mathrm{TFT'} = \frac{\pi}{2}$

따라서 사각형 CTFT′는 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 정사각형이므로 넓이는 3이다.

29) 정답 12
두 평면 α, γ의 교선과 평행한 방향에서 세 평면과 반구를 바라본 모습은 그림과 같다.



이 그림에서 도형 A의 평면 γ 위로의 정사영의 가장 왼쪽 끝 점과 오른쪽 끝 점을 각각 A, B라 하고, 반구의 중심 O에서 평면 γ에 내린 수선의 발을 H라 하자.
그림에서 정사영 AH 부분의 넓이는 반구의 중심을 지나는 반원의 넓이와 같고, 정사영 HB 부분의 넓이는 반구의 중심을 지나고 평면 β 위에 있는 반원의 평면 γ 위로의 정사영의 넓이이다. 따라서 정사영의 넓이는

$\frac{16\pi}{2} + \frac{16\pi}{2} \times \cos 60^\circ = 12\pi$

$S = 12\pi$

그러므로 $\frac{S}{\pi} = 12$