$\tan\theta > 0$
$\cos\theta < 0$
$\sin\theta < 0$

5. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & (a_n < 7) \\ a_n - 7 & (a_n \geq 7) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

$(1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 - 8) \rightarrow 1$

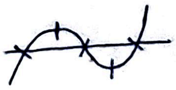
↳ 반복

$\sum_{k=1}^{8} a_k = 2\sum_{k=1}^{4} a_k = 2 \times (16-1) = 30$

6. 방정식 $2x^3 - 3x^2 - 12x + k = 0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는? [3점]

① 20 ② 23 ③ 26 ④ 29 ⑤ 32

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + k$



$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1)$

$f'(x) = 0$ 인 x값 ; -1 , 2

$f(-1) = k + 7$

$f(2) = k - 20$

$\therefore\ k - 20 < 0 < k + 7 \longrightarrow -7 < k < 20$

$\Rightarrow$ 정수인 k는 26개

7. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta - \frac{6}{\tan\theta} = 1$일 때, $\sin\theta + \cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

$\tan^2\theta - \tan\theta - 6 = 0$ --- ①

$\tan\theta > 0$ --- ②

①, ② 번 만족하는 $\tan\theta = 3$

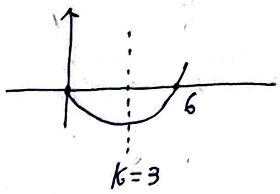
$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\sin\theta + \cos\theta = -\frac{4}{\sqrt{10}} = -\frac{2\sqrt{10}}{5}$

8. 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

$f(x) = x^2-5x-x = x^2-6x$

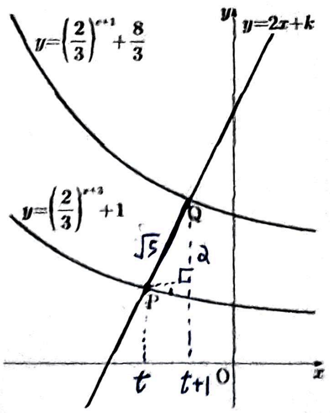


9. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$



$\left(\frac{2}{3}\right)^{t+3}+1 \rightarrow$ 점P의 y좌표

$\left(\frac{2}{3}\right)^{t+2}+\frac{8}{3} \rightarrow$ 점Q의 y좌표

$\left(\frac{2}{3}\right)^{t+3}+1+2=\left(\frac{2}{3}\right)^{t+2}+\frac{8}{3}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{t+2}\left(1-\frac{2}{3}\right)=3-\frac{8}{3}=\frac{1}{3}$

$\therefore\ t=-2$, $P\left(-2, \frac{5}{3}\right) \rightarrow 2x+k$ 대입

$k=\frac{17}{3}$

10. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? [4점]

① -18 ② -17 ③ -16 ④ -15 ⑤ -14

i) $f(0)=0$, $f(1)=2$

ii) $f'(0)=f(1)+1\times f'(1)$

iii) 접선: $y=\frac{2-0}{1-0}(x-0)+0=2x$

$f'(0)=f(1)+f'(1)=2$ ---①

$f'(0)=2$, $f'(1)=0$ ($\because f(1)=2$)

$f(x)=a(x-1)^2(x-b)+2$

$f(0)=-ab+2=0 \Longrightarrow ab=2$

$f'(0)=a+2ab=2 \Longrightarrow a=-2$

$\therefore\ a=-2$, $b=-1$

$f(x)=-2(x-1)^2(x+1)+2$

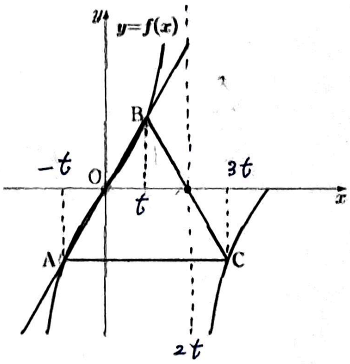
$f'(2)=-4(2-1)(2+1)-2(2-1)^2$

$=-12-2=-14$

11. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{a}{2} < x \le a,\ x \ne \frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

$2t = \frac{a}{2} \longrightarrow t = \frac{a}{4}$

$B(t, \sqrt{3}t)$ 를 $f(x)$ 에 대입

$\tan\frac{\pi}{4} = \sqrt{3}t$

$\therefore t = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$S = 4\sqrt{3}\,t^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3 - \{f(x)\}^2 - x^2 f(x) + x^2 = 0 \ \text{---}\ ①$$

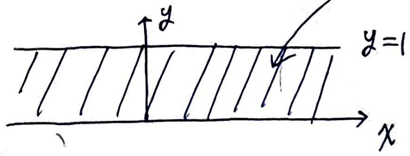
을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

Global max $\longrightarrow$ 1

Global min $\longrightarrow$ 0

내부에 그래프 존재

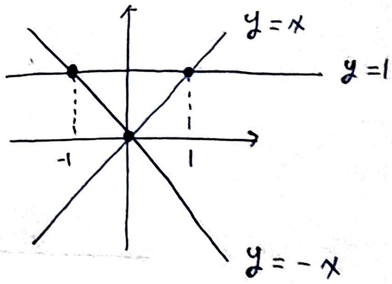


$\{f(x)\}^2(f(x)-1) = x^2(f(x)-1)$

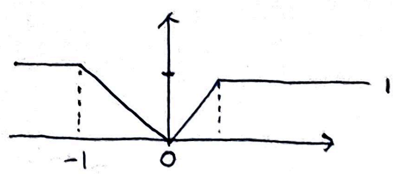
① case
$f(x)=1$

② case
$f(x) = \pm x$

$\Rightarrow$



$\downarrow$



$f\left(-\frac{4}{3}\right) = 1, \quad f(0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$\therefore f\left(-\frac{4}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

13. 두 상수 a, $b(1<a<b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다. 함수 $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$에 대하여 $f(1)=40$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 760 ② 800 ③ 840 ④ 880 ⑤ 920

$$y = \frac{\log_2 \frac{b}{a}}{b-a}(x-a)+\log_2 a \quad -①$$

$$y = \frac{\log_4 \frac{b}{a}}{b-a}(x-a)+\log_4 a \quad -②$$

$x=0$ 대입

$$-\frac{a\log_2 \frac{b}{a}}{b-a}+\log_2 a = -\frac{a\log_4 \frac{b}{a}}{b-a}+\log_4 a$$

$$\frac{a\log_4 \frac{b}{a}}{b-a} = \log_4 a \quad (\because \text{ 이항})$$

$$a\log_4 \frac{b}{a} = (b-a)\log_4 a$$

$$\therefore \left(\frac{b}{a}\right)^a = a^{(b-a)} \quad ---③$$

$$f(x)=a^{bx}+b^{ax} \longrightarrow f(1)=a^b+b^a=40$$

③식 변형

$$b^a \cdot a^{-a} = a^b \cdot a^{-a}$$

$$b^a = a^b = 20$$

$$\therefore f(2)=(20)^2+(20)^2=800$$

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b) \quad (a\neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|\,dt=2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

미적분 기본정리 사용

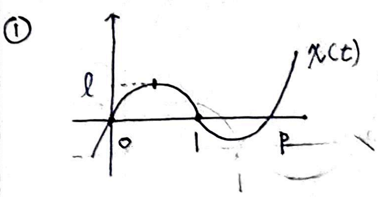
<보 기>

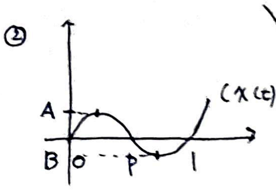
ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt=0$

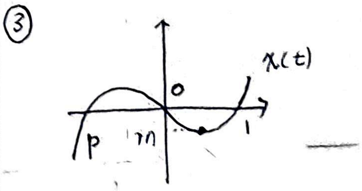
ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

①


②


③


x축 대칭 가능

ㄱ. $x(1)-x(0)=0$

ㄴ. ①, ③의 경우

$2l=2, \quad -2m=2 \Longrightarrow l=1, \ m=-1$

②의 경우

$A+(A-B)-B=2 \Longrightarrow A-B=1$

$x(t)$기 불가능

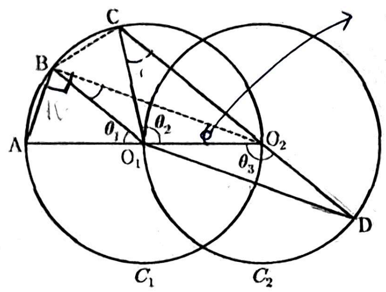
ㄷ. $\forall t$ at $0\le t\le 1 \longrightarrow |x(t)|<1$ 인 경우

오직 ② case $0<P<1$, $x(P)=0$ 이므로

존재.

15. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다.
이때 $\angle BO_1A=\theta_1$, $\angle O_2O_1C=\theta_2$, $\angle O_1O_2D=\theta_3$이라 하자.

$\frac{\theta_1}{2}$



다음은 $\overline{AB}:\overline{O_1D}=1:2\sqrt{2}$이고 $\theta_3=\theta_1+\theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$이므로 $\theta_3=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로 $\angle CO_1B=\theta_1$이다.
> 이때 $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.
> $\Longrightarrow$ △ ABO_2 사용
> $\overline{AB}=k$라 할 때
> $\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2}=\boxed{(가)}$이고, 가 : $\sqrt{8k^2+k^2}$ $=3k$
> $\angle BO_2A=\frac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\frac{\theta_1}{2}=\boxed{(나)}$이다. $\Longrightarrow$ $\frac{2\sqrt{2}k}{3k}=\frac{2}{3}$
> 삼각형 O_2BC에서
> $\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\frac{\theta_1}{2}$이므로
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C}=\boxed{(다)}$이다.
> $\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로
> $\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\frac{\boxed{(가)}}{2}+\boxed{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은? [4점]

① $\frac{169}{27}$ ② $\frac{56}{9}$ ③ $\frac{167}{27}$ ④ $\frac{166}{27}$ ⑤ $\frac{55}{9}$

다) $\overline{O_2C}=(3k)\cdot\cos\theta_1$

$=3k\cdot\left\{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}$

$=\frac{7}{3}k$

$\therefore f(p)\times g(p)=7k^2=\frac{56}{9}$

단답형

16. $\log_2 120-\frac{1}{\log_{15}2}$의 값을 구하시오. [3점]

$\log_2 120-\log_2 15=3$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2x$이고 $f(0)=2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=x^3+x^2+2$

$f(1)=4$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k}{2} = 56, \quad \sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{8} a_k = 100$$

일 때, a_8의 값을 구하시오. [3점]

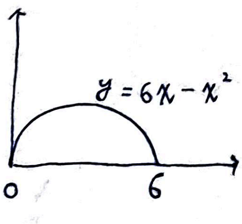
$$\left(2\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} a_k\right) - \left(2\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{8} a_k\right) = a_8 = 12$$

19. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - (a^2 - 8a)x + 3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오. [3점]

① $f'(x) = 3x^2 + 2ax - (a^2 - 8a)$

$f'(x) = 3(x + \frac{a}{3})^2 - \frac{4}{3}a^2 + 8a$

$\therefore\ 8a - \frac{4}{3}a^2 \geq 0$

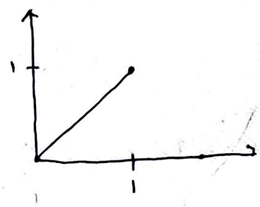


20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x) = x$이다.

(나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 $f(x+1) - xf(x) = ax + b$이다.

$60 \times \int_1^2 f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]



$f(x+1) - xf(x) = ax + b$ 에 $(0, 0)$ 대입

$f(1) = b = 1 \longrightarrow b = 1$ --- ①

$f'(x+1) - f(x) - xf'(x) = a$ 에 $(0, 0)$ 대입

$f'(1) = a \longrightarrow a = 1$ --- ②

$\therefore\ f(x+1) = xf(x) + x + 1$ at $0 \leq x$

구간 $[0, 1]$ $f(x+1) = x^2 + x + 1$

$60 \times \int_0^1 x^2 + x + 1\,dx$

$= 60 \times \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_0^1$

$= 60 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) = 110$

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|a_1|=2$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_{n+1}|=2|a_n|$이다.
>
> (다) $\sum_{n=1}^{10} a_n = -14$

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값을 구하시오. [4점]

$|a_{n+1}| = 2|a_n|$ ⟶ '지수적' 증가

but $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 은 숫자 크기 ⇓

∴ a_{10} 의 부호는 음수

$a_1 \sim a_9$ 의 부호는 양수라 가정

$\left(\sum_{n=1}^{9} a_n\right) + a_{10} = -2$ → 예측값

$\sum_{n=1}^{10} a_n = -14$ → 결괏값

오차; -12

일부수열 부호 (−)로 변환 시 $\Delta\Sigma = 2\underbrace{\Sigma a_n}$

부호변환된 수열의 값의 합

$(a_i \rightarrow -a_i \Rightarrow$ 변화량: $-2a_i)$

∴ $-12 = 2\Sigma a_n \rightarrow \Sigma a_n = 6 = 2+4$

$-2, -4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$

∴ $\sum_{n=1}^{5} a_{2n-1} = 678$

22. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t, t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

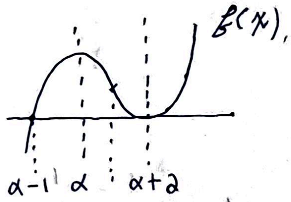
> (가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t\to a+} g(t) + \lim_{t\to a-} g(t) \le 2$이다.
>
> (나) $g(f(1))=g(f(4))=2$, $g(f(0))=1$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

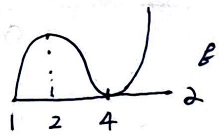
가) $\forall a$, $\lim_{t\to a+} g(t) + \lim_{t\to a-} g(t) \le 2$ --- ①

나) $g(k)=2$ 인 k 존재 --- ②

① + ②



i)

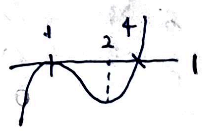


$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-4)^2 + 2$

$f(0) = -6$

$g(f(0)) \ne 1$

ii)



$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2(x-4) + 1$

$f(0) = -1$

$g(f(0)) = 1$

∴ $f(5) = \frac{1}{2} \times 4^2 + 1 = 9$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{5}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+3n}{n^2-2} = 5$$

24. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x^3+x)=e^x$$

을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은? [3점]

① e ② $\frac{e}{2}$ ③ $\frac{e}{3}$ ④ $\frac{e}{4}$ ⑤ $\frac{e}{5}$

$(3x^2+1)\cdot f'(x^3+x)=e^x$

$4\cdot f'(2)=e$

$f'(2)=\frac{e}{4}$

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3, \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=6$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n}) = \frac{a_1}{1-r^2} - \frac{a_1 \cdot r}{1-r^2} = 3$$

$$\frac{a_1(1-r)}{1-r^2} = \frac{a_1}{1+r} = 3 \text{ — ①}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2 = \frac{(a_1)^2}{1-r^2} = 6 \text{ — ②}$$

$$\left(\frac{a_1}{1+r}\right) \cdot \frac{a_1}{1-r} = \frac{(a_1)^2}{1-r^2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = 2$$

26. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$의 값은? [3점]

① $\ln 5$ ② $\frac{\ln 5}{2}$ ③ $\frac{\ln 5}{3}$ ④ $\frac{\ln 5}{4}$ ⑤ $\frac{\ln 5}{5}$

$$\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3} = \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2+\left(\frac{2k}{n}\right)}{\left(\frac{k}{n}\right)^3+3\left(\frac{k}{n}\right)^2+1} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2+\left(\frac{2k}{n}\right)}{\left(\frac{k}{n}\right)^3+3\left(\frac{k}{n}\right)^2+1} \cdot \frac{1}{n}$$

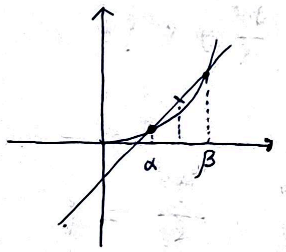
$$= \int_0^1 \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}\cdot \ln|x^3+3x^2+1|\right]_0^1$$

$$= \frac{\ln 5}{3}$$

27. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치가 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 중점일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$ ② $\frac{e^4}{2}-\frac{5}{16}$ ③ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{4}$
④ $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{8}$



$x^2-t^2x-\frac{\ln t}{8}=0$

$\alpha+\beta=t^2$

점 P의 x 좌표 : $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{t^2}{2}$

$P\left(\frac{t^2}{2},\ \frac{4t^4-\ln t}{8}\right)$

$d=\int_1^e\sqrt{t^2+\left(2t^3-\frac{1}{8t}\right)^2}\,dt$

$=\int_1^e 2t^3+\frac{1}{8t}\,dt$

$=\left[\frac{t^4}{2}+\frac{\ln t}{8}\right]_1^e=\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$

28. 함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$$

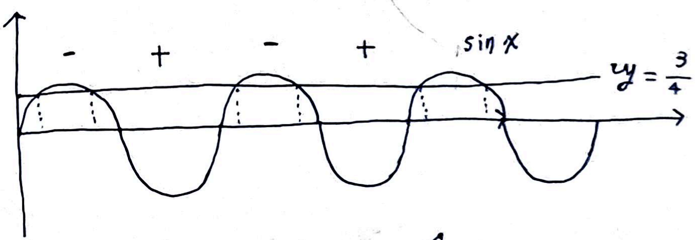
라 하자. $0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는? [4점]

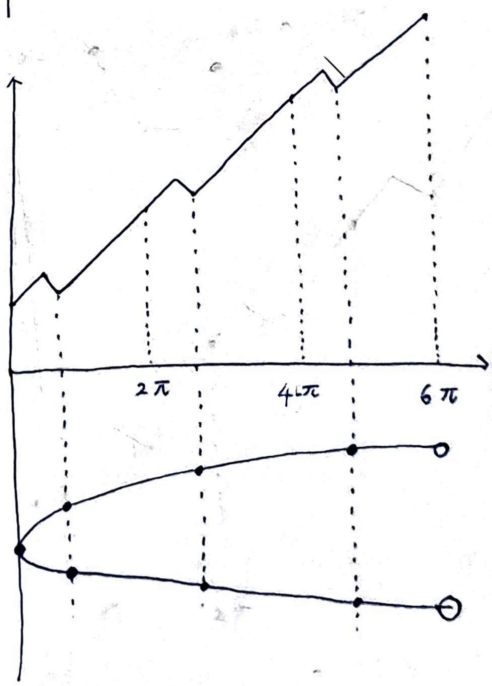
① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$g(x)=(3x+4\cos x)\circ f(x)$

$h(x)=3x+4\cos x$

$h'(x)=3-4\sin x$





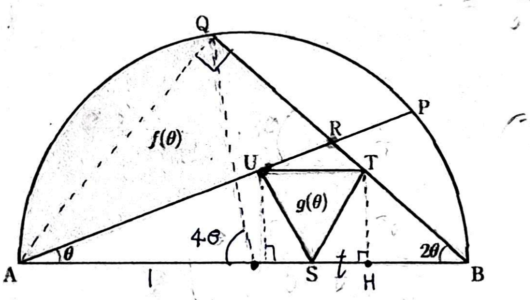
⇒ 7개

단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle PAB = \theta$, $\angle QBA = 2\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R라 하자.
선분 AB 위의 점 S, 선분 BR 위의 점 T, 선분 AR 위의 점 U를 선분 UT가 선분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)} = \frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



① $f(\theta)$

$\overline{AQ} \approx 4\theta$, $\overline{AR} \approx \frac{4}{3}$, $\overline{RB} \approx \frac{2}{3}$

$f(\theta) = \frac{1}{2} \cdot (1)^2 \cdot 4\theta - \overline{RB} \cdot \frac{\overline{AQ}}{2} + \frac{\sin 4\theta}{2}$

$\simeq 4\theta - \frac{4\theta}{3} = \frac{8\theta}{3}$

$\therefore f(\theta) \simeq \frac{8\theta}{3}$

② $g(\theta)$

$\overline{SH} = t$ 라 가정

$g(\theta) = \sqrt{3}\, t^2$

$\overline{AB} = \frac{\sqrt{3}t}{\tan\theta} + 2t + \frac{\sqrt{3}t}{2\tan\theta} \simeq t\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\theta} + 2\right) = 2$

$\therefore t \simeq \frac{4\theta}{3\sqrt{3}}$

$g(\theta) = \frac{16\sqrt{3}}{27}\theta^2$

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)} = \left(\frac{16}{27}\sqrt{3}\right) \times \frac{3}{8} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$

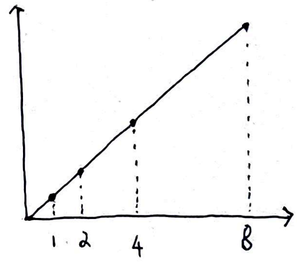
30. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1) = 1$, $\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{5}{4}$
>
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x) = 2f(x)$이다.

$\int_1^8 x f'(x)\,dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(4) = 4$, $f(8) = 8$



①

$\int_1^2 g(2x)\,dx = \int_1^2 2f(x)\,dx$

$\int_2^4 f(x)\,dx = 4 \times 4 - 2 \times 2 - \int_1^2 4f(x)\,dx = 7$

②

$\int_2^4 g(2x)\,dx = \int_2^4 2f(x)\,dx$

$\int_4^8 f(x)\,dx = 8 \times 8 - 4 \times 4 - \int_2^4 4f(x)\,dx = 20$

$\therefore \int_1^8 x f'(x)\,dx = 8f(8) - f(1) - \int_1^8 f(x)\,dx$

$= 63 - 20 - 7 - \frac{5}{4}$

$= \frac{139}{4}$

$p + q = 143$

> • 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.