주요 보조선의 해석

공간에서 제시되는 상황은 생각보다 많지 않다. 우리가 배우는 구성요가 점, 선, 면, 구 4가지이기 때문에 상황이 상당히 제한적이다. 문제에 나오는 주요 표현에 대해 반드시 해야 하는 작업들만 하면 공간도형은 킬러 문제여도 어렵지 않게 해결할 수 있다. 다음의 주요 표현에 대하여 원리를 이해하고 암기하도록 하자.

공간에서의 주요 보조선

1. 정사면체
① 높이가 가장 중요한 보조선이다.
② 중요 값들을 암기한다.

2. 내분점
① 내분점에서 수선의 발을 내려 닮음을 이용한다.
② 내분점끼리 연결하여 닮음을 이용한다.

3. 수선의 발
① 기존 직각 표현, 다면체 등이 등장하였을 때
② 수선의 발이 내려간 평면을 단면화한다.
③ 수선이 여러 개라면 닮음으로 추가 길이를 구한다.

4. 다른 평면에 수선의 발을 내려야 하는 경우
① 삼수선 정리를 이용한다.
② 평면에 수직인 평면이 있다면 교선에 수선을 내리자.

5. 평면과 평면이 만나는 상황
① 교선을 확인하여 삼수선 정리를 적용한다.
② 교선을 단면화의 방향으로 하여 단면화 한다.

6. 교선이 존재하지 않는 경우
① 높이 정보를 이용하여 평행이동을 한다.
② 평면의 결정 조건을 이용하여 연장한다.

공간에서의 주요 보조선

7. 단면화를 적극 이용한다.
① 단면화는 직선이 점이 되도록 바라본다.
② 단면화는 단면화의 방향과 수직인 거리만이 관찰된다.
③ 미지의 길이, 각, 점을 구할 때
④ 평행선이 존재할 때
⑤ 축, 직선을 포함하는 평면이 등장하였을 때
⑥ 단면화 가능 표현이 제시되었을 때

8. 공간에서의 평행선
① 단면화의 신호이다. 평행선이 단면화의 방향이 된다.
② 평행선은 같은 평면에 존재한다.
즉, 평행선으로 평면을 연장할 수 있다.

9. 도형이 완성되어 있지 않을 때
① 수선의 발, 평행선으로 도형을 완성한다.
공간의 면보다는 완성된 기둥이 해석에 유리하다.

10. 구
① 구와 평면이 만나면 단면화로 필수 길이를 확보한다.
② 구와 평면이 접하면 법선을 알고 있다.
법선으로 이면각을 구하거나
법선은 수선의 발이므로 삼수선 정리를 적용할 수 있다.
③ 구 위의 세 점은 평면 안에서 해석한다.
④ 구가 여러 개 접할 때는 뼈대를 본다.
⑤ 구에서 생기는 자취는 원이다.
⑥ 단면화 가능 표현이 제시되었을 때

11. 직교하는 선분이 있다.
① 공간좌표를 도입할 수 있다.

주요 보조선의 해석

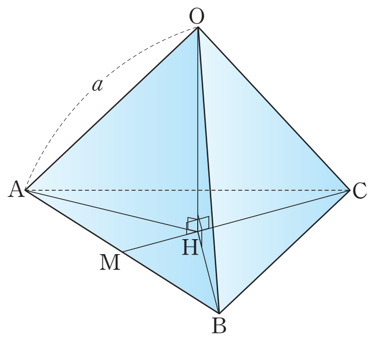
1 정사면체

① 정사면체는 높이를 주요 보조선으로 사용한다.

정사면체의 높이(h)는 정사면체의 한 변의 길이를 a라 할 때, $h=\frac{\sqrt{6}}{3}a$이다.

② 정사면체의 수선의 발은 밑면의 외심이다.

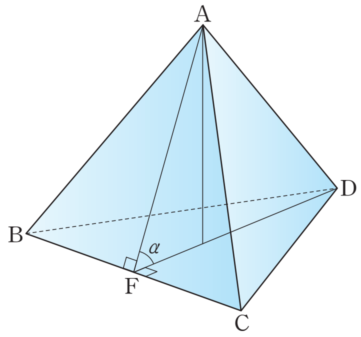
정사면체의 밑면은 정삼각형이므로 수선의 발은 무게중심이라 할 수도 있다.

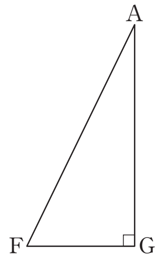


정사면체의 꼭짓점 O에서 밑면에 수선의 발을 내리면 삼각형 OAH, 삼각형 OHB, 삼각형OHC의 빗변의 길이는 a이고 높이를 공유하므로 세 삼각형은 모두 합동이다.
그러므로 $\overline{AH}=\overline{BH}=\overline{CH}$이므로 H는 삼각형 ABC의 외심이다.
밑면 외의 모서리의 길이가 모두 같은 사면체에서 수선을 내리면 그 수선의 발은 밑면의 외접원의 중심이다.
이는 사인법칙과 연결될 수 있으므로 기억해두도록 하자.

정사면체는 밑면 ABC가 정삼각형이기 때문에 H는 외심이면서도 무게중심이다.
외심을 구하기보다는 무게중심을 구하기가 쉬우므로 정사면체의 수선의 발은 무게중심으로 해석하도록 하자.

③ 정사면체의 이면각을 α라 하면 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$이다.



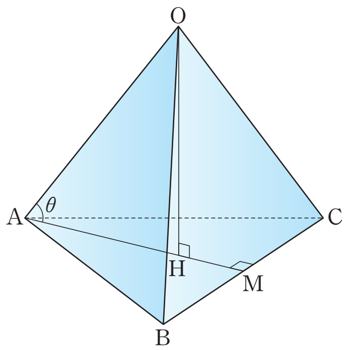


정사면체 한 변의 길이를 a라 하면 A의 수선의 발은 무게중심이므로

$\overline{\mathrm{AF}}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\overline{\mathrm{FG}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{FD}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{AF}}$이다.

그러므로 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$

④ 직선과 평면 사이의 각을 θ라 하면 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

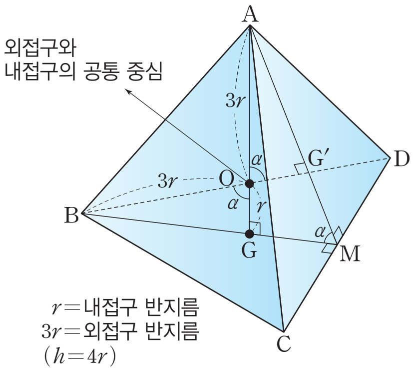


정사면체 한 변의 길이를 a라 하면 O에서의 수선의 발은 무게 중심이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{2}{3}$이다.

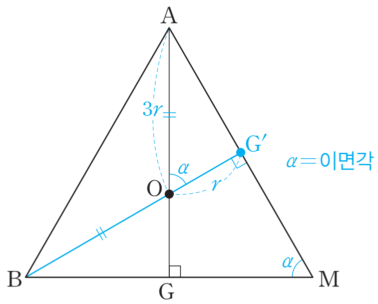
$\overline{\mathrm{OA}}=a$이므로 $\cos\theta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

주요 보조선의 해석

⑤ 정사면체의 외접구와 내접구의 중심은 높이의 $\frac{1}{4}$지점이다.



내접구와 외접구의 중심을 찾고 싶다면, 단면화를 생각하자.
공간에서 미지의 점, 길이, 각은 입체의 그림에서 구하는 것이 아니라 단면화 상태에서 구하는 것이다.
외접구의 중심을 점 O라 하면 점 O에서부터 각 꼭짓점까지의 거리가 동일하므로 선분 AG 위에 존재해야 한다. **O를 포함하는 평면으로 단면화하면 점 O의 정확한 위치를 구할 수 있다.**
점 O를 포함하는 삼각형 ABM를 관찰하도록 하자.



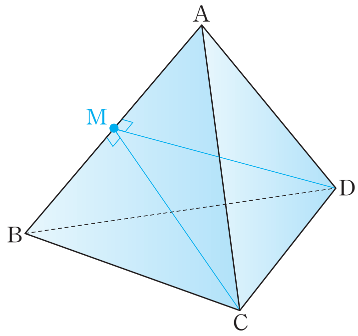
삼각형 ABM에서 ∠AMG는 정사면체의 이면각이므로 그 각을 α라 하면 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$이다.

또한, 점 B에서 평면 ACD에 내린 수선의 발을 G′이라 하면 $\overline{\text{AG}}$와 $\overline{\text{BG}'}$의 교점이 구의 중심 O라고 할 수 있다.

이 때, 삼각형 AOG'과 삼각형 AGM은 AA닮음이므로 $\cos\angle\text{AOG}'=\frac{1}{3}$이다.

그러므로 내접구의 반지름을 r이라 하면 $\overline{\text{AO}}=3r$이다. 이는 외접구의 반지름이다.
즉 내접구의 반지름은 $\overline{\text{OG}}=r$, 외접구의 반지름은 $\overline{\text{AO}}=3r$이다.

⑥ 정사면체의 꼬인 위치의 직선은 수직이다.



정사면체 ABCD에서 선분 AB와 선분 CD는 꼬인 위치이다. 이 두 직선의 수직임을 보이기 위해서는 수선 정리를 사용해야 한다. 공간에서 새로운 직각을 발견하기 위해서는 기존 직각을 이용하여 새로운 직각을 찾아야하기 때문이다.

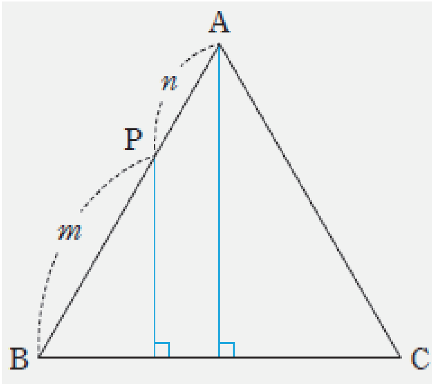
정사면체에서의 기존 직각을 발견하면 선분 AB와 선분 CM, 선분 DM은 정삼각형의 높이에 의해 수직이다. 수선 정리에 의해 선분 AB와 평면 MCD는 수직이다. 그러므로 선분 AB는 평면 MCD에 포함된 선분 CD와 수직이다.

18 한 변의 길이가 3인 정사면체 ABCD에 대하여 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$의 $2:1$내분점을 각각 P, S, Q, R이라 하자. 사각형 PQRS의 넓이를 구하시오.

주요 보조선의 해석

2 내분점

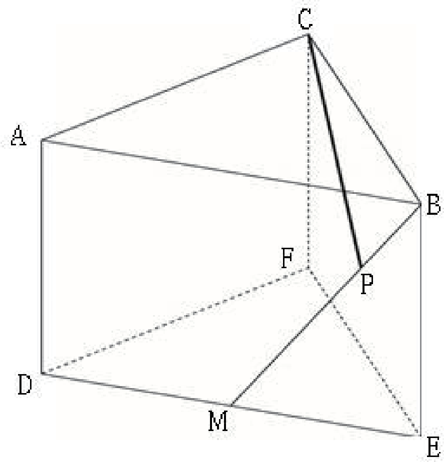
① 내분점에서 수선의 발을 내려 닮음을 이용한다.



내분점에서 수선의 발을 내리면 닮음 삼각형에서 길이 비를 이용할 수 있다.

② 내분점끼리 연결하여 닮음을 이용한다.
평면으로 단면화 하였을 때, 내분점이 여러 개 있다면 연결하여 닮음 삼각형을 생성한다.

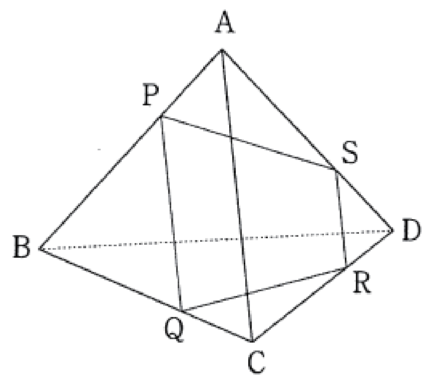
19 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 6인 정삼각기둥 ABCDEF가 있다. 변 DE의 중점 M에 대하여 선분 BM을 1 : 2로 내분하는 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{CP}}=l$일 때, $10l^2$의 값을 구하시오. [4점] 2015년 7월 가27



3 수선의 발

① 기존 직각 표현, 다면체 등이 등장하였을 때, 수선의 발을 내려 닮음과 삼수선 정리를 사용한다.
② 수선의 발이 내려간 평면을 단면화 한다. 수선의 발이 내려가진 평면은 수선끼리의 닮음을 이용하여 위치를 파악할 수 있다. 단면화하여 추가 정보를 얻는다.
③ 수선이 여러 개라면 닮음으로 추가 길이를 구한다.

20 한 모서리의 길이가 9인 정사면체 A−BCD에서 $\overline{AB}$, $\overline{CB}$를 1 : 2로 내분하는 점을 각각 P, Q라 하고 $\overline{CD}$, $\overline{AD}$를 2 : 1로 내분하는 점을 각각 R, S라 하자. 평면 PQRS와 평면 BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $9\tan^2\theta$의 값을 구하시오. [4점]

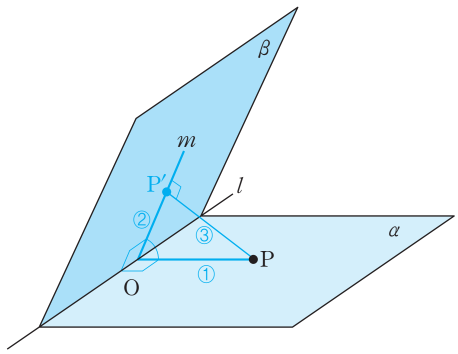


주요 보조선의 해석

4 다른 평면에 수선의 발을 내려야 하는 경우

① 기울어진 면에 수선의 발을 내려야 할 때가 있다. 이 때는 임의대로 수선의 발을 내리는 것이 아니라 삼수선 정리를 이용하여 원칙에 맞게 수선의 발을 내려야 한다.

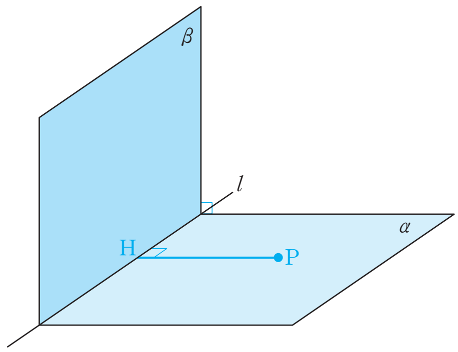
평면 α 위의 한 점 P에서 평면 β로의 수선의 발을 내려야 한다면
① P에서 평면의 교선 l에 수선의 발을 내린다.
② 교선에서 β에 수직인 보조선 m을 긋는다.
③ P에서 직선 m에 수직인 선을 그으면 β에 내린 수선의 발 P′의 위치를 정확하게 표시할 수 있다.



② 똑바로 세워진 평면이 있다면 수선의 발을 쉽게 내릴 수 있다.

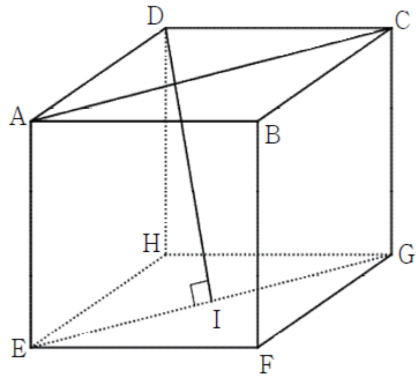
평면 α와 평면 β가 수직이라면, α에 포함된 점 P에서 평면 β에 내린 수선의 발은 평면 α와 평면 β의 교선인 l에 내린 수선의 발 H와 같다.

생각보다 자주 발견되는 공간의 상황이기에 수직인 두 평면이 나온다면 적극적으로 사용하도록 하자.



21 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체 ABCD$-$EFGH의 꼭짓점 D에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 I라 하자. 직선 DI와 평면 AEGC가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

[4점] 2018년 경남10월 가15



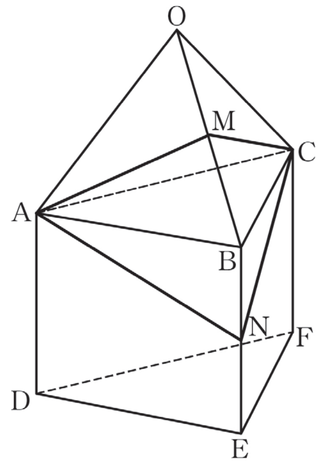
① $\frac{\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{\sqrt{5}}{3}$　④ $\frac{\sqrt{6}}{3}$　⑤ $\frac{\sqrt{7}}{3}$

주요 보조선의 해석

5 평면과 평면이 만나는 상황

① 교선을 확인하여 삼수선 정리를 적용한다.
② 교선을 단면화의 방향으로 하여 단면화 한다.

22 그림은 모든 모서리의 길이가 2인 정삼각기둥 ABC−DEF의 밑면 ABC와 모든 모서리의 길이가 2인 정사면체 OABC의 밑면 ABC를 일치시켜 만든 도형을 나타낸 것이다. 두 모서리 OB, BE의 중점을 각각 M, N이라 하고, 두 평면 MCA, NCA가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [4점] 2014년 10월 가21



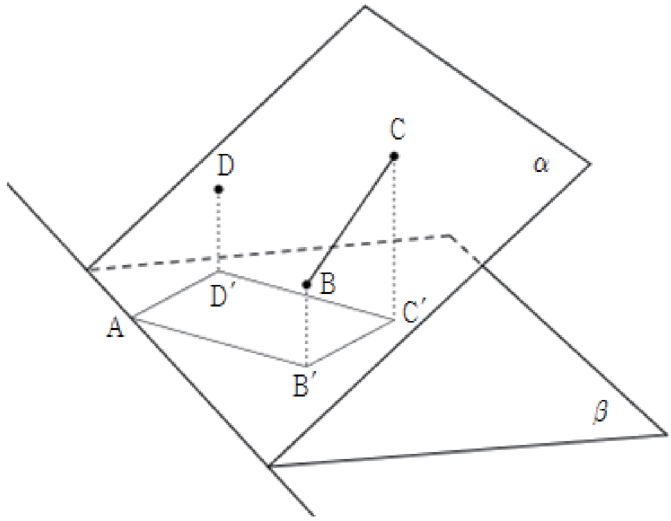
① $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$
④ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$

6 교선이 존재하지 않는 경우

① 높이 정보를 이용하여 평행이동을 한다.
② 평면의 결정 조건을 이용하여 연장한다.

23 그림과 같이 서로 다른 두 평면 α, β의 교선 위에 점 A가 있다. 평면 α 위의 세 점 B, C, D의 평면 β 위로의 정사영을 각각 B′, C′, D′이라 할 때, 사각형 AB′C′D′은 한 변의 길이가 $4\sqrt{2}$인 정사각형이고, $\overline{\mathrm{BB'}}=\overline{\mathrm{DD'}}$이다. 두 평면 α와 β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta=\frac{3}{4}$이다. 선분 BC의 길이는?
(단, 선분 BD와 평면 β는 만나지 않는다.) [4점]

2019년 사관학교 가17

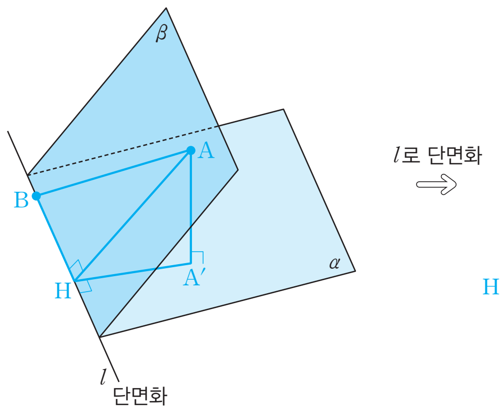


① $\sqrt{35}$ ② $\sqrt{37}$ ③ $\sqrt{39}$ ④ $\sqrt{41}$ ⑤ $\sqrt{43}$

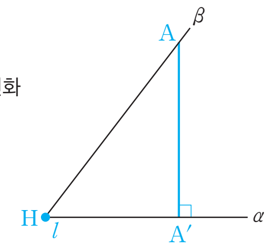
주요 보조선의 해석

7 단면화를 적극 이용한다.

① 단면화는 직선이 점이 되도록 바라본다. 주로 교선이 단면화의 방향이다.
② 단면화는 단면화의 방향과 수직인 거리만이 관찰된다.



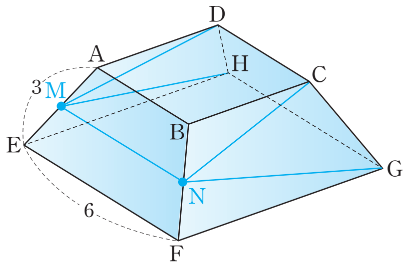
〈그림 1〉



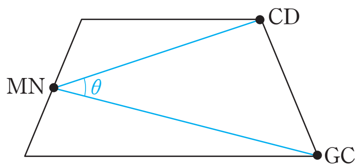
〈그림 2〉

〈그림 1〉의 두 평면 α, β에 대하여 교선 l의 방향으로 단면화하여 관찰하면 〈그림 2〉가 된다.
단면화를 하게 되면 〈그림 1〉에서의 선분AB는 보이지 않는다. 단면화는 단면화 방향인 직선 l의 수직 거리만이 관찰되기 때문이다. 〈그림 2〉에서 보듯 단면화 하면 삼각형 AHA′이 관찰된다.
여기서 주목해야 할 것은 바로 $\angle$AHA′이 두 평면 α, β의 이면각이라는 점이다. 단면화를 하게 되면 교선에 수직인 선분들만 보이기 때문에 자연스럽게 이면각을 관찰할 수 있다.
그래서 교선이 존재하며 삼수선 정리를 사용할 때, 단면화를 사용하는 것이 문제풀이에 도움이 되는 것이다.

〈단면화의 예〉



위의 공간도형 상황을 관찰해보자. 사각뿔대 ABCD$-$EFGH의 모선인 $\overline{\mathrm{AE}}$의 중점을 M, $\overline{\mathrm{BF}}$의 중점을 N이라 할 때, 두 평면 CDMN과 GHMN의 이면각을 구하는 과정을 살펴보자. 이 두 평면의 각은 꼭짓점에서의 수선의 발 위치를 파악하기 어렵기 때문에 삼수선 정리 보다는 다른 방식이 더 적절하다. 이 때, 두 평면의 교선인 MN을 방향으로 단면화 하게 되면



위의 그림과 같은 상황이 되어 이면각을 관찰할 수 있게 된다. 단면화를 하게 되면 수직 거리가 관찰된다는 것에 유의하여 삼각형 안의 이면각 θ를 코사인 제2법칙으로 구한다.

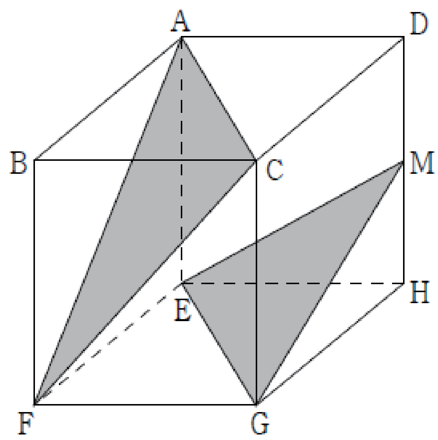
주요 보조선의 해석

③ 미지의 길이, 각, 점을 구할 때 단면화를 적극적으로 고려한다. 입체에서 기하 정보를 얻는 것이 아니라 단면에서 기하 정보를 구하는 것이다. 이러한 과정은 정사면체에서 외접구의 중심과 반지름을 구하는 것으로 공부해보았다.

④ 평행선이 존재할 때, 단면화를 적극 활용한다. 평행선을 단면화의 방향으로 하면 이면각 등의 정보를 용이하게 관찰가능하다.

24 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육면체 ABCD−EFGH에 대하여 모서리 DH의 중점을 M이라 하자. 삼각형 EGM의 세 점 A, F, C를 포함하는 평면 위로의 정사영의 넓이가 S일 때, $12S^2$의 값을 구하시오.

[4점] 2011년 대전10월 가26



⑤ 축, 직선을 포함하는 평면이 등장하였을 때, 그 축 혹은 직선을 단면화의 방향으로 공간의 상황을 단면화 할 수 있다.

25

좌표공간에 반구 $(x-5)^2+(y-4)^2+z^2=9$, $z\geq 0$가 있다. y축을 포함하는 평면 α가 반구와 접할 때, α와 xy평면이 이루는 각을 θ라 하자. 이때, $30\cos\theta$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ [4점] 2004년 9월 가23

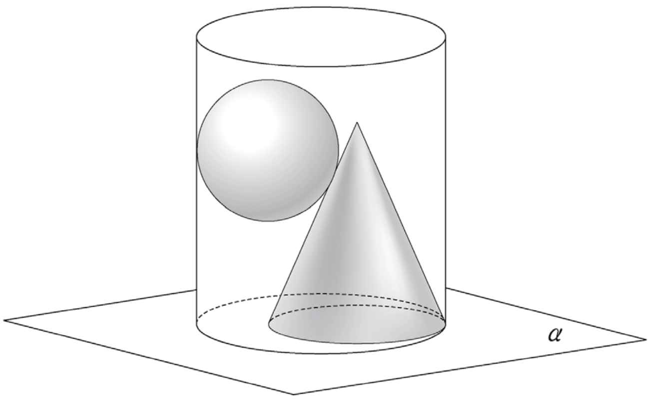
주요 보조선의 해석

⑥ 단면화 가능 표현이 제시 되었을 때 단면화를 사용한다.
문제에서의 중요한 지점들이 같은 평면 상에 존재함을 알려준다면 그 평면을 관찰함으로써 길이와 각을 구할 수 있다.

26 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 7인 원기둥과 밑면의 반지름의 길이가 5이고 높이가 12인 원뿔이 평면 α 위에 놓여 있고, 원뿔의 밑면의 둘레가 원기둥의 밑면의 둘레에 내접한다. 평면 α와 만나는 원기둥의 밑면의 중심을 O, 원뿔의 꼭짓점을 A라 하자. 중심이 B이고 반지름의 길이가 4인 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 구 S는 원기둥과 원뿔에 모두 접한다.
> (나) 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영이 각각 A′, B′일 때, $\angle$A′OB′$=180^\circ$이다.

직선 AB와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta=p$이다. $100p$의 값을 구하시오.
(단, 원뿔의 밑면의 중심과 점 A′은 일치한다.) [4점] 2012학년도 수능 가29

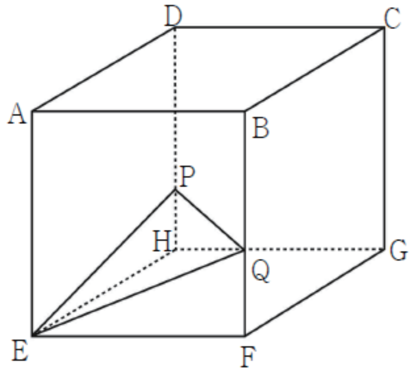


8 공간에서의 평행선

① 단면화의 신호이다. 평행선이 단면화의 방향이 된다.
② 평행선은 같은 평면에 존재한다. 즉, 평행선으로 평면을 연장할 수 있다.

27 한 모서리의 길이가 6인 정육면체 ABCD−EFGH에서 선분 DH를 2 : 1로 내분하는 점을 P, 선분 BF를 2 : 1로 내분하는 점을 Q라 하자. 삼각형 PQE의 평면 BDG 위로의 정사영의 넓이는?

[4점] 2018년 대구11월 가19



① $\sqrt{3}$ ② $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

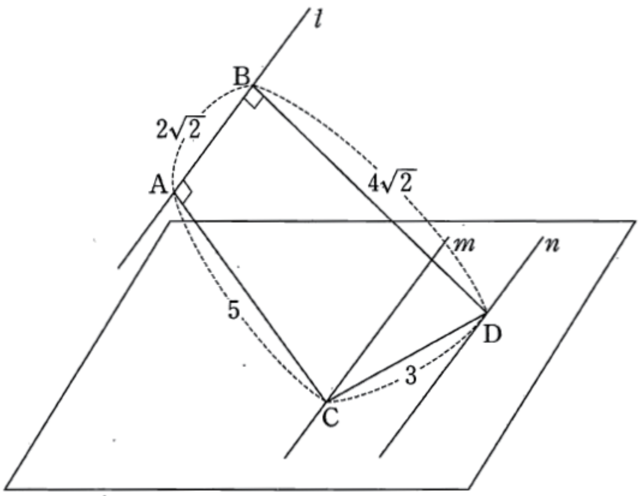
주요 보조선의 해석

9 도형을 완성하라.

수선의 발, 평행선으로 도형을 완성한다.
공간의 면보다는 완성된 기둥의 형태가 해석에 유리하다.

28 같은 평면 위에 있지 않고 서로 평행한 세 직선 l, m, n이 있다. 직선 l 위의 두 점 A, B, 직선 m 위의 점 C, 직선 n 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

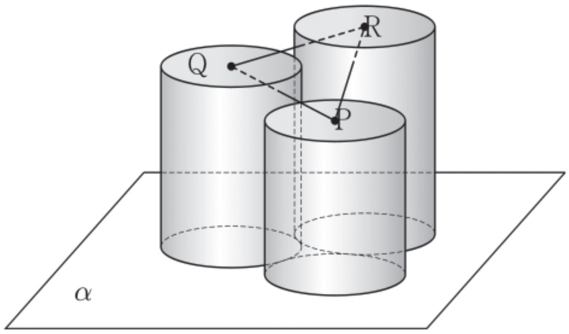
(가) $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{CD}}=3$
(나) $\overline{\mathrm{AC}}\perp l$, $\overline{\mathrm{AC}}=5$
(다) $\overline{\mathrm{BD}}\perp l$, $\overline{\mathrm{BD}}=4\sqrt{2}$



두 직선 m, n을 포함하는 평면과 세 점 A, C, D를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $15\tan^2\theta$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ [4점] 2010년 9월 가25

29 그림과 같이 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{3}$이고 높이가 서로 다른 세 원기둥이 서로 외접하며 한 평면 α 위에 놓여 있다. 평면 α와 만나지 않는 세 원기둥의 밑면의 중심을 각각 P, Q, R라 할 때, 삼각형 QPR는 이등변삼각형이고, 평면 QPR와 평면 α가 이루는 각의 크기는 $60°$이다. 세 원기둥의 높이를 각각 8, a, b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

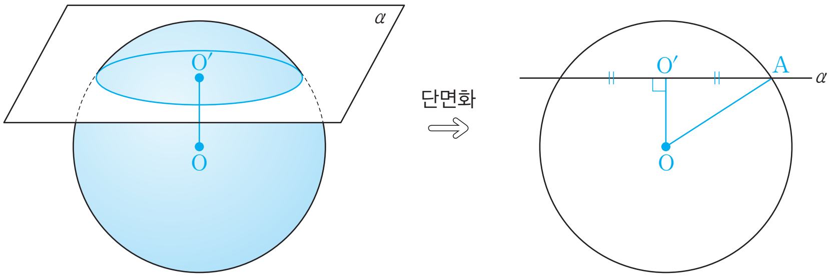
2009학년도 수능 가24



주요 보조선의 해석

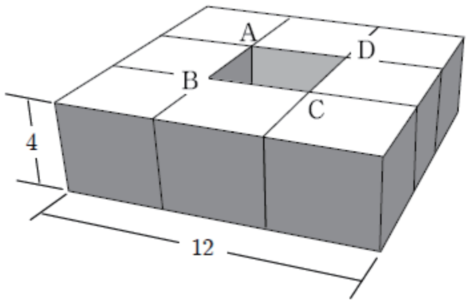
10 구에 대하여

① 구와 평면이 만나면 단면화로 필수 길이를 확보한다.

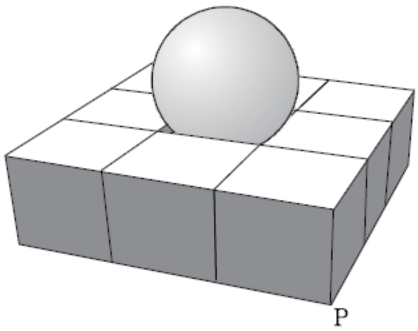


구 평면 역시 단면화하는 주된 상황이라고 볼 수 있다. 단면화 하면 구의 중심과 평면까지의 거리인 OO′과 구의 반지름 OA, 원의 반지름 AO′이 직각삼각형에 포함되므로 피타고라스 정리를 이용하여 세 길이를 구한다.
구와 평면이 등장하면 항상 '구의 중심과 평면사이의 거리', '원의 반지름', '구의 반지름' 세 길이를 단면에서 확인한다.

30 <그림 1>과 같이 한 변의 길이가 4인 정육면체 모양의 블록 9개를 직육면체 모양으로 쌓은 후, 가운데 블록을 없애고 <그림 2>와 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 구를 정사각형 ABCD의 네 변에 모두 접하도록 올려놓았다. 구의 중심으로부터 꼭짓점 P까지의 거리를 l이라 할 때, l^2의 값은? [4점] 2011년 대전10월 가19



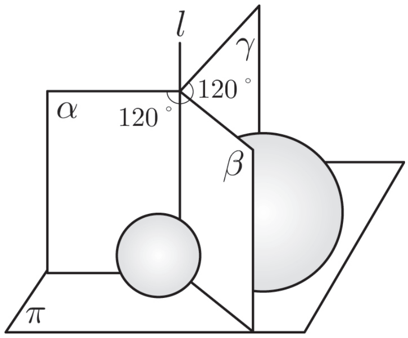
〈그림 1〉



〈그림 2〉

① 95 ② 97 ③ 99 ④ 101 ⑤ 103

31 평면 π에 수직인 직선 l을 경계로 하는 세 반평면 α, β, γ가 있다. α, β가 이루는 각의 크기와 β, γ가 이루는 각의 크기는 모두 120°이다. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 구가 π, α, β에 동시에 접하고, 반지름의 길이가 2인 구가 π, β, γ에 동시에 접한다.



두 구의 중심 사이의 거리를 d라 할 때, $3d^2$의 값을 구하시오. (단, 두 구는 평면 π의 같은 쪽에 있다.)

[4점] 2009년 10월 가24

주요 보조선의 해석

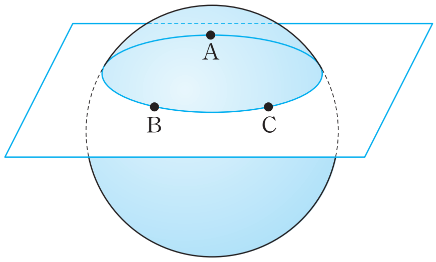
② 구와 평면이 접하면 법선을 알고 있다.
법선으로 이면각을 구하거나
법선 또한 수선의 발이므로 삼수선 정리를 적용할 수 있다.

32 평면 α 위의 두 점 B, C와 평면에 접하는 반지름의 길이가 4이고 중심이 O인 구에 대하여 다음 조건을 만족 시킨다.

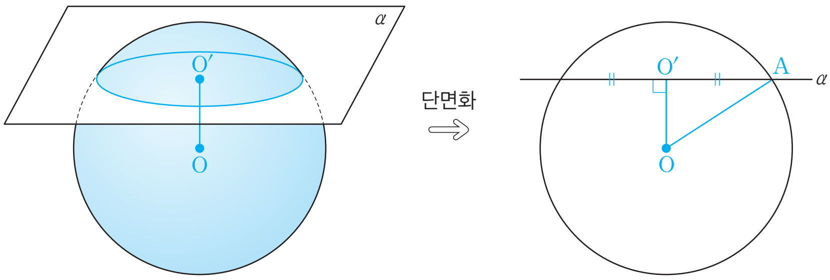
(가) 선분 BC를 포함하며 구에 접하는 평면을 β라 할 때, 구와 β의 접점은 A이다.
(나) $\overline{AB}=\overline{AC}=8$
(다) 구의 중심 O와 선분 BC와의 거리는 8이다.

평면 ABC와 평면 α가 이루는 각을 θ라 할 때, $30\cos\theta$의 값을 구하시오. [4점]

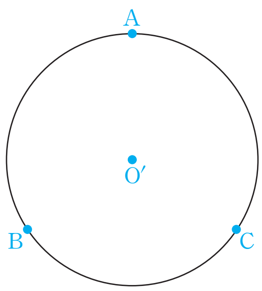
③ 구 위의 세 점은 평면 안에서 해석한다.



구 위의 세 점은 하나의 평면을 결정한다. A, B, C를 지나는 평면을 그리면 구와 평면이 만나는 상황이므로 원이 생성된다.



구와 평면이 만나면 위의 그림과 같이 단면화하여 원의 반지름을 확인해야 한다.
원의 반지름을 파악하면 A, B, C는 구 위의 세 점이 아닌 원 위의 세 점으로 단면화하여 관찰한다.



주요 보조선의 해석

④ 구가 여러 개 접할 때는 뼈대를 본다.
구를 여러 개 그리면 상황만 복잡해질 뿐 얻을 수 있는 정보는 없다.
구가 여러 개 있을 때에는 중심과 중심을 연결하는 뼈대를 생성하고, 위치관계를 이용하여 길이 정보를 추가한다.
뼈대를 연결하면 다면체가 생성되므로 훨씬 공간의 상황을 해석하기 쉬워진다.

33 밑면은 한 변의 길이가 18인 정삼각형이고 높이는 h인 정삼각기둥 ABC$-$DEF의 내부에 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 구 4개가 있다. 이 정삼각기둥의 내부에 있는 4개의 구 중에 아래에 있는 3개의 구는 밑면 DEF에 접하고 위에 있는 나머지 1개의 구는 밑면 ABC에 접하고 있다. 이 때, 높이 h의 최솟값은 $p+q\sqrt{3}$이다. pq의 값을 구하시오. [4점]

34

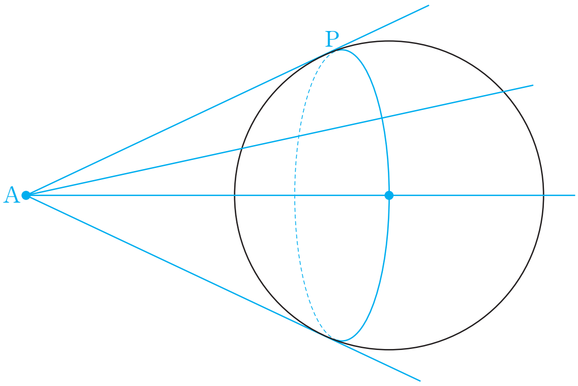
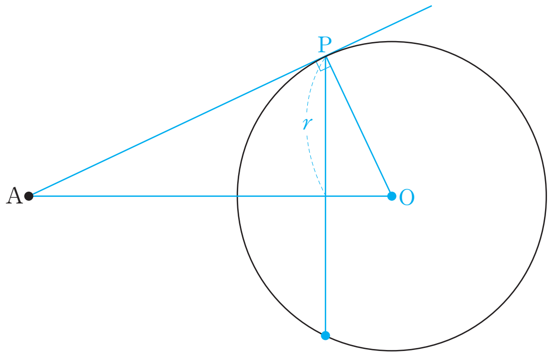
반지름의 길이가 각각 2, 4, 8이고 서로 외접하는 세 개의 구가 평면 α 위에 놓여 있다. 세 구의 중심을 각각 A, B, C라 하고, 평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자.

$\cos\theta=\frac{b}{a}\sqrt{2}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.) [4점] 2009년 대전10월 가24

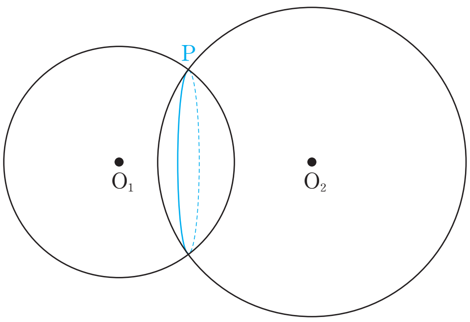
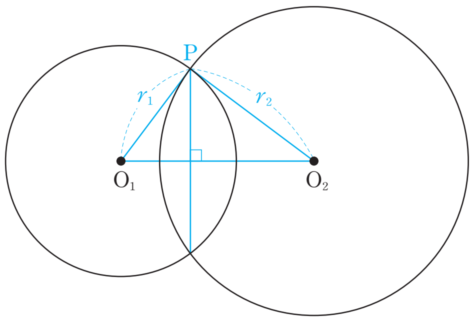
주요 보조선의 해석

⑤ 구에서 생기는 자취는 원이다.

(i) 구의 외부의 점 A에서 구에 접선을 그어 만나는 접점을 P라 할 때, 점 P가 그리는 자취는 원이다.

<table>
<tr><th>공간의 상황</th><th>단면화</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

(ii) 구와 구가 만나서 생기는 교점 P의 자취는 원이다. 이 원의 반지름 또한 구를 원으로 단면화하여 길이정보를 확인한다.

<table>
<tr><th>공간의 상황</th><th>단면화</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

35

좌표공간에 x축, y축 및 z축에 접하는 구

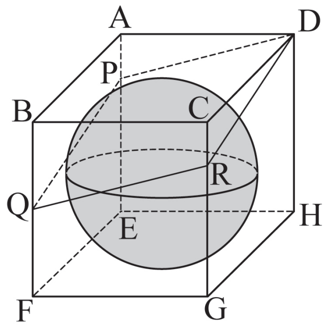
$$S:(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$$

가 있다. 점 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 3)$에서 구 S에 그은 접선들과 xy평면의 교점으로 이루어진 도형에서 두 점 P, Q를 잡는다. 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [4점] 2010년 대전11월 가25

주요 보조선의 해석

36 그림과 같이 한 변의 길이가 12인 정육면체 ABCD−EFGH에 내접하는 구가 있다. 변 AE, CG를 1 : 3으로 내분하는 점을 각각 P, R라 하고 변 BF의 중점을 Q라 한다. 네 점 D, P, Q, R를 지나는 평면으로 내접하는 구를 자를 때 생기는 원의 넓이는? [4점]

2005년 10월 가15



① 26π ② 28π ③ 30π ④ 32π ⑤ 34π

37

다음 조건을 만족하는 점 P 전체의 집합이 나타내는 도형의 둘레의 길이는? [3점] 2008년 9월 가09

> 좌표공간에서 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구가 두 개의 구
> $$x^2+y^2+z^2=1,\ (x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$$
> 에 동시에 외접한다.

① $\frac{2\sqrt{5}}{3}\pi$ ② $\sqrt{5}\pi$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}\pi$

④ $2\sqrt{5}\pi$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{3}\pi$

주요 보조선의 해석

최대와 최소는 단면화 상태에서 관찰된다.

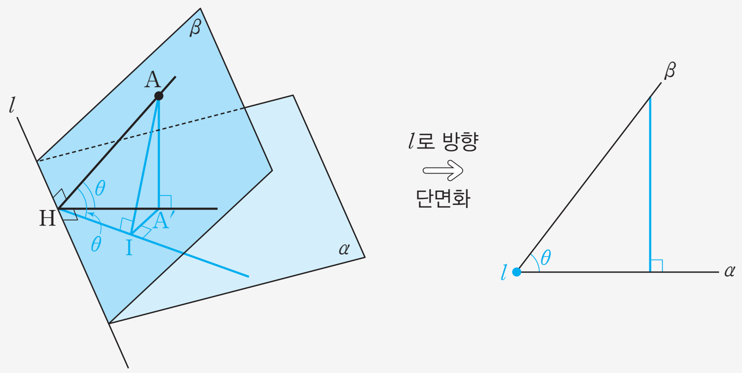
38 좌표공간에서 구

$$S: (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$$

위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P에서 구 S에 접하는 평면이 구 $x^2+y^2+z^2=16$과 만나서 생기는 도형의 넓이의 최댓값은 $(a+b\sqrt{3})\pi$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.) [4점] 2012년 9월 가27

Tr's knowhow

• 단면화 상태에서 최대와 최소가 관찰되는 이유



평면 β에 포함된 직선 AH와 평면 α에 포함되고 H를 지나는 임의의 직선 m 사이 각의 최소를 구한다고 가정해보자.
직선 m을 고정시키고 A에서의 수선의 발 A′에서부터 직선 m에 대해 삼수선 정리를
적용했을 때 직선 AH와 직선 m 사이의 각은 삼각형 AHI의 각 $\varnothing$임을 알 수 있다.
이 때, 삼각형 AHA′에서 관찰되는 θ의 각과 $\varnothing$의 각을 비교하여 보자. 삼각형 AHI와 AHA′는 빗변은
선분 AH로 동일하나 높이의 길이가 $\overline{AA'}<\overline{AI}$이므로 $\theta<\varnothing$임을 알 수 있다.
즉, 직선 AH와 직선 m 사이의 최소 각은 직선 m이 A′H일 때 θ임을 알 수 있다.
이는 평면의 교선인 l의 방향으로 단면화 하였을 때 관찰되는 각 θ이다.

위의 예와 같이 대부분 공간에서의 최대와 최소는 단면화에서의 값으로서 관찰되므로,
최대최소 문항은 단면화 문제라고 생각해도 좋다.

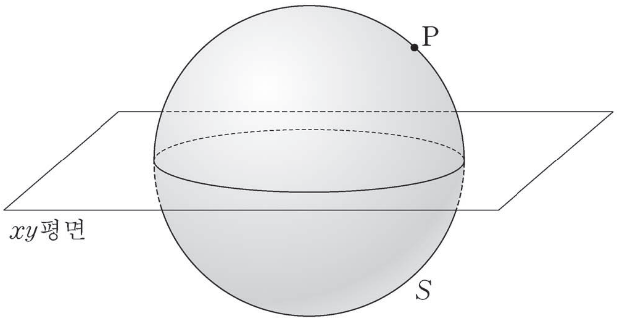
주요 보조선의 해석

구와 평면은 단면화를 통해 주요 정보를 확인한다.

39 좌표공간에 구 S: $x^2+y^2+z^2=50$과 점 $\mathrm{P}(0, 5, 5)$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C에 대하여 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}\pi$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

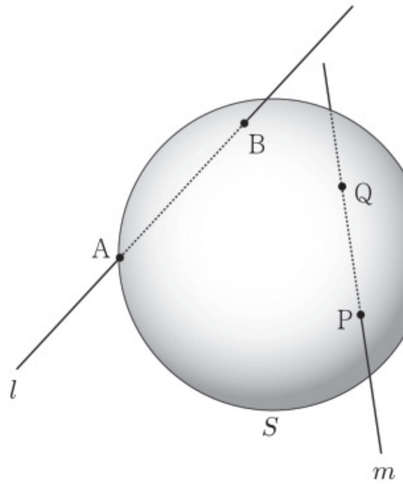
2015학년도 수능 가29

(가) 원 C는 점 P를 지나는 평면과 구 S가 만나서 생긴다.
(나) 원 C의 반지름의 길이는 1이다.



▌ 구의 종합문제, 단면화를 이용하여 직각의 관계를 찾자.

40　그림과 같이 반지름의 길이가 2인 구 S와 서로 다른 두 직선 l, m이 있다. 구 S와 직선 l이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B, 구 S와 직선 m이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 APQ는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$, $\angle \mathrm{ABQ}=\frac{\pi}{2}$일 때 평면 APB와 평면 APQ가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $100\cos^2\theta$의 값을 구하시오. [4점]　2016년 7월 가29



주요 보조선의 해석

▌상황이 복잡해 보이지만 해야 할 일은 정해져 있다. 표현마다 해야 하는 작업을 충실히 하자.

41 반지름의 길이가 2인 구의 중심 O를 지나는 평면을 α라 하고, 평면 α와 이루는 각이 $45°$인 평면을 β라 하자. 평면 α와 구가 만나서 생기는 원을 C_1, 평면 β와 구가 만나서 생기는 원을 C_2라 하자. 원 C_2의 중심 A와 평면 α 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{6}}{2}$일 때, 그림과 같이 다음 조건을 만족하도록 원 C_1 위에 점 P, 원 C_2 위에 두 점 Q, R를 잡는다.

(가) $\angle QAR = 90°$
(나) 직선 OP와 직선 AQ는 서로 평행이다.

평면 POR와 평면 AQPO가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos^2\theta = \frac{q}{p}$이다. 의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 2012년 5월 가30