수열의 극한

# Level 1

## 유형 1 수열의 극한에 대한 기본성질

**출제유형** | 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

**출제유형잡기** | 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수) 일 때

(1) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n = k\alpha$ (단, $k$는 상수)

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha+\beta$

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha-\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\beta$

(5) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$)

### 001

2008학년도 6월 모평

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2a_n-3}{a_n+1}=\dfrac{3}{4}$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

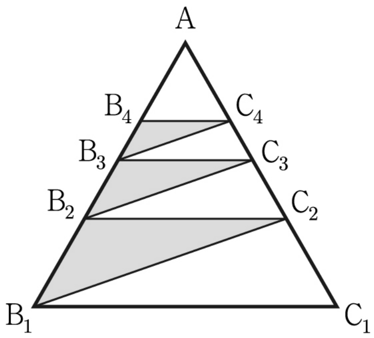
### 002

모든 항이 양수인 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이
$(2n-1)^2 b_n = (n^2+1)c_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$,
$\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n+c_n}=4$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$의 값은?

① 4 ② $\dfrac{15}{4}$ ③ $-1$
④ $-\dfrac{15}{4}$ ⑤ $-4$

## 094

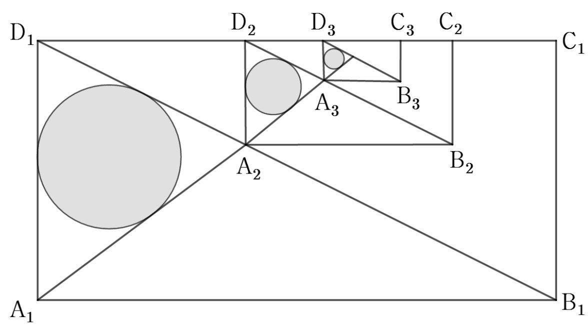
한 변의 길이가 3인 정삼각형 $AB_1C_1$이 있다. 그림과 같이 선분 $AB_1$과 선분 $AC_1$을 $2:1$로 내분하는 점을 각각 $B_2$, $C_2$라 하고, 삼각형 $B_1B_2C_2$의 넓이를 $S_1$이라 하자. 삼각형 $AB_2C_2$에서 선분 $AB_2$와 선분 $AC_2$를 $2:1$로 내분하는 점을 각각 $B_3$, $C_3$이라 하고, 삼각형 $B_2B_3C_3$의 넓이를 $S_2$라 하자. 삼각형 $AB_3C_3$에서 선분 $AB_3$와 선분 $AC_3$를 $2:1$로 내분하는 점을 각각 $B_4$, $C_4$이라 하고, 삼각형 $B_3B_4C_4$의 넓이를 $S_3$라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 $n$번째 얻은 삼각형 $B_nB_{n+1}C_{n+1}$의 넓이를 $S_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?




① $\frac{3\sqrt{3}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{3}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{5}$
④ $\frac{9\sqrt{3}}{10}$ ⑤ $\sqrt{3}$

## 095

그림과 같이 $\overline{A_1D_1}=1$, $\overline{A_1B_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 대각선 $\overline{D_1B_1}$을 $2:3$으로 내분하는 점을 $A_2$라 하고 $A_2$를 지나고 선분 $A_1D_1$과 평행한 직선이 $\overline{D_1C_1}$이 만나는 점을 $D_2$라 하고 $A_2$를 지나고 선분 $A_1B_1$과 평행한 직선위에 $\overline{A_2D_2}:\overline{A_2B_2}=1:2$인 점을 $B_2$라 하자. 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 대각선 $\overline{D_2B_2}$을 $2:3$으로 내분하는 점을 $A_3$라 하고 같은 방법으로 만들어진 직사각형을 $A_nB_nC_nD_n$이라 할 때, 삼각형 $A_nA_{n+1}D_n$에 내접하는 원을 $S_1$이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?




① $\frac{5(3-\sqrt{5})}{21}\pi$ ② $\frac{10(3-\sqrt{5})}{21}\pi$
③ $\frac{5(3-\sqrt{5})}{42}\pi$ ④ $\frac{13(3-\sqrt{5})}{42}\pi$
⑤ $\frac{8(3-\sqrt{5})}{15}\pi$

## 148

함수

$$f(x)=\begin{cases} -x+a & (x\le 1) \\ \dfrac{\ln x}{x-1} & (x>1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 $a$의 값을 구하시오.

## 149

자연수 $n$에 대하여

$$S_n=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{S_n}-1\right)^n$의 값은?

① $\frac{1}{2}e$ ② $e$ ③ $\frac{3}{2}e$
④ $2e$ ⑤ $\frac{5}{2}e$

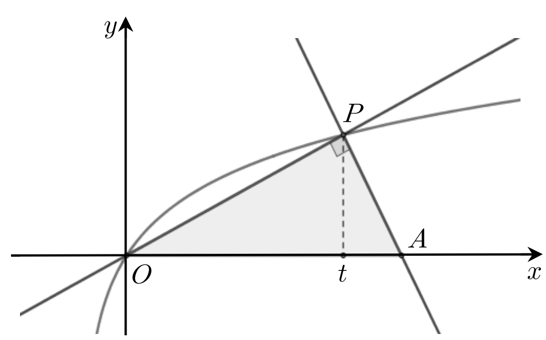
## 150

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이고
$(x^2-1)f(x)=(3^{x+1}-1)(3^{x-1}-1)$
를 만족시킬 때, $f(-1)+f(1)$의 값은?

① $\frac{40}{9}ln3$ ② $\frac{14}{3}ln3$ ③ $\frac{44}{9}ln3$
④ $\frac{46}{9}ln3$ ⑤ $\frac{16}{3}ln3$

## 151

그림과 같이 $y=\log_2(x+1)$위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \log_2(t+1))$을 지나고 직선 $\mathrm{OP}$에 수직인 직선을 $l$이라 하자. 직선 $l$의 $x$절편을 $\mathrm{A}$라 할 때 $\triangle\mathrm{OPA}$ 넓이를 $S(t)$라 하자. $\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{t^2}$의 값은?




① $\frac{1}{(\ln2)^3}+\frac{1}{2\ln2}$ ② $\frac{1}{2(\ln2)^3}+\frac{1}{\ln2}$
③ $\frac{1}{2(\ln2)^2}+\frac{1}{2\ln2}$ ④ $\frac{1}{2(\ln2)^3}+\frac{1}{2\ln2}$
⑤ $\frac{1}{2(\ln2)^3}+\frac{1}{4\ln2}$

미분법
Level
2

**372** [2022학년도 11월 수능 28번]

함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$에 대하여 함수 $g(x)$를
$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$
라 하자. $0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 $x$의 개수는? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

**373** 2022학년도 11월 수능 28번-변형

함수 $f(x)=\pi(x-1)^2(x-4)+4\pi$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\sin f(x)-f(x)$$

라 하자. $0<x<4$에서 함수 $g(x)$가 극점이 되는 $x$의 개수는? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

미분법
Level 3

## 412

2022학년도 6월 모평 30번

$t > \frac{1}{2}\ln 2$ 인 실수 $t$에 대하여

곡선 $y = \ln(1 + e^{2x} - e^{-2t})$과 직선 $y = x + t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때,

$f'(\ln 2) = \frac{q}{p}\sqrt{2}$ 이다. $p + q$의 값을 구하시오.

(단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

**쌍둥이 문제 - 풀이 없음**

양수 $t$에 대하여 곡선 $y = \ln\left(\frac{2 + e^{2x} - e^{-2t}}{2}\right)$과 직선 $y = x + t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln\sqrt{2}) = a\sqrt{2}$ 이다. $a$의 값을 구하시오. (단, $a$는 자연수이다.) [4점]

**정답** 11

## 413

2022학년도 6월 모평 30번-변형

실수 $t$에 대하여 $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$에서 정의된 곡선

$y = e^{\ln(x + \ln x)} + \frac{t(e^t + e^{-t})}{\ln x} - (e^t + e^{-t})$과 직선

$y = x + t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$

라 할 때, $\frac{f'(\ln 2) + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = ae^b$이다. $a + b$의 값을 구하시오. (단, $a$와 $b$는 유리수이다.) [4점]