

평행 / 대칭이동과 도형의 방정식

수학하는 원태인

January 2, 2022

Q1. 점 (x, y) 를 x 축으로 1만큼 평행이동한 것은 $(x + 1, y)$ 인데 왜 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 x 축으로 1만큼 평행이동한 것의 방정식은 $f(x - 1, y) = 0$ 인가?

A1. 도형의 이동은 점의 이동의 모임이다.

$f(x, y) = 0$ 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 가 주어진 이동에 의해 $P'(x', y')$ 로 이동한다고 하자. 이때

$$x' = x + 1, \quad y' = y$$

이므로

$$x = x' - 1, \quad y = y' \tag{1}$$

이다. (x, y) 는 $f(x, y) = 0$ 의 해이므로, (1)을 대입하면 $f(x' - 1, y') = 0$ 이다.

그런데 어차피 (x', y') 는 점의 좌표이므로 새로운 (x, y) 로 써도 무방하다. 따라서 원하는 도형의 방정식은 $f(x - 1, y) = 0$ 이다.

Q2. $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 $y = x$ 에 대해 대칭이동한 후 x 축으로 1만큼 평행이동한 것의 방정식은 $f(y - 1, x) = 0$ 인가 $f(y, x - 1) = 0$ 인가?

A2. 마찬가지로 방법으로 $f(x, y) = 0$ 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 가 주어진 이동에 의해 $P'(x', y')$ 로 이동한다고 하자.

대칭이동에 의해 (x, y) 는 (y, x) 로 이동하고, 평행이동에 의해 $(y + 1, x)$ 로 이동한다. 따라서

$$x' = y + 1, \quad y' = x$$

이므로

$$x = y', \quad y = x' - 1 \quad (2)$$

이다. (x, y) 는 $f(x, y) = 0$ 의 해이므로, (2)를 대입하면 $f(y', x' - 1) = 0$ 이다.

그런데 어차피 (x', y') 는 점의 좌표이므로 새로운 (x, y) 로 써도 무방하다. 따라서 원하는 도형의 방정식은 $f(y, x - 1) = 0$ 이다.

Comment. 흔히 $y = x$ 대칭은 'x와 y 자리 바꾸기', x축으로 a만큼 평행이동은 'x를 $x - a$ 로 바꾸기'라고 외우고 있다. 이걸 그대로 적용하면

$$f(x, y) = 0 \longrightarrow f(y, x) = 0 \longrightarrow f(y, x - 1) = 0$$

으로 올바른 결과가 나온다.

그런데 왜 헷갈리는 학생들이 많을까? 그건 $f(\cdot, \cdot) = 0$ 에서 앞자리에 있는 것이 x고 뒷자리에 있는 것이 y라고 착각하기 때문이다.