2015학년도 수능대비
6월 모의평가 분석

B형

유사 및 심화 문제

2015년 대학수학능력시험 대비 6월 평가원_20번

20. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$ 의 개수는? [4점]

> (가) $a+b+c=6$
> (나) 좌표평면에서 세 점 $(1,\ a)$, $(2,\ b)$, $(3,\ c)$ 가 직선 위에 있지 않다.

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

1. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$ 의 개수를 구하시오.

> (가) $a+b+c=6$
> (나) 세 수 a, b, c가 등차수열을 이루지 않는다.

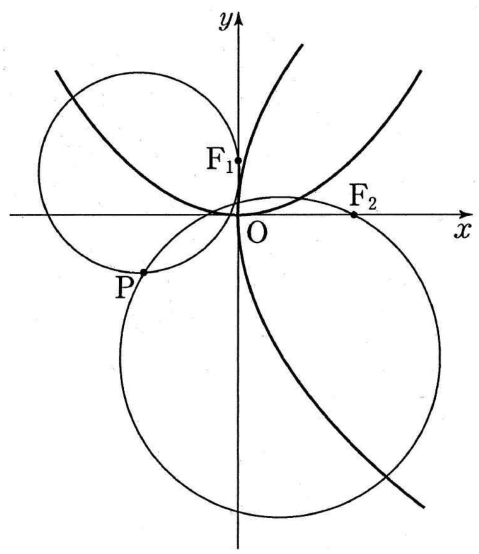
2. 방정식 $x+3y+3z=32$를 만족시키는 자연수 x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구하여라.

2015년 대학수학능력시험 대비 6월 평가원_28번

28. 좌표평면에서 포물선 $C_1 : x^2 = 4y$ 의 초점을 F_1 , 포물선 $C_2 : y^2 = 8x$ 의 초점을 F_2 라 하자. 점 P 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 중심이 C_1 위에 있고 점 F_1 을 지나는 원과 중심이 C_2 위에 있고 점 F_2 를 지나는 원의 교점이다.
(나) 제 3 사분면에 있는 점이다.

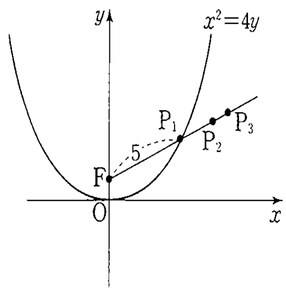
원점 O 에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}^2$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]



1. 포물선 $y^2 = 16x$ 위의 점 P에서 원 $(x-4)^2 + y^2 = 4$에 그은 접선의 접점을 Q라 하자. $\overline{PQ} = 4\sqrt{2}$ 일 때, 점 P의 x좌표는?

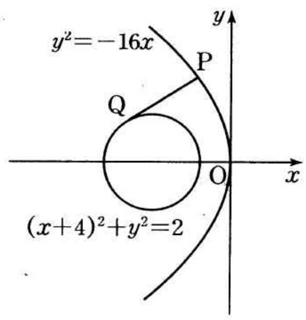
① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

2. 초점이 F인 포물선 $x^2 = 4y$ 위에 $\overline{\mathrm{FP_1}} = 5$인 점 $\mathrm{P_1}$이 있다. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{FP_1}}$의 연장선 위에 $\overline{\mathrm{FP_1}} = 2\overline{\mathrm{P_1P_2}}$인 점 $\mathrm{P_2}$를 잡고, $\mathrm{P_3}$부터는 $\overline{\mathrm{P}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1}} = 2\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$ $(n \geq 3)$이 되도록 $\overline{\mathrm{FP_1}}$의 연장선 위에 계속하여 점 $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$을 잡을 때, $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n)$의 값은?



① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

3. 그림과 같이 포물선 $y^2 = -16x$ 위의 동점 P에서 원 $(x+4)^2 + y^2 = 2$에 그은 한 접선의 접점을 Q라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

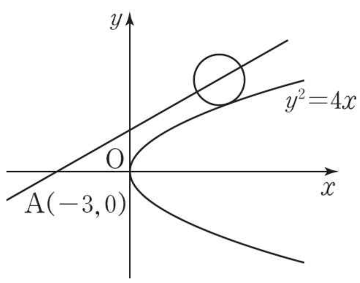


<보기>

ㄱ. 포물선의 초점과 원의 중심은 일치한다.
ㄴ. 점 $(-4, 8)$에서 포물선의 준선까지의 거리는 6이다.
ㄷ. 점 P가 원점 O에 있을 때, 선분 PQ의 길이는 최소이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원이 포물선 $y^2 = 4x$ 와 접하면서 움직일 때, 이 원의 중심과 점 $\mathrm{A}(-3, 0)$ 을 지나는 직선의 기울기의 최댓값은?



① $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

2015년 대학수학능력시험 대비 6월 평가원_30번

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $1 \le f'(x) \le 3$ 이다.
(나) 모든 정수 n 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(4n, 8n)$,
점 $(4n+1,\ 8n+2)$, 점 $(4n+2,\ 8n+5)$, 점 $(4n+3,\ 8n+7)$ 을 모두 지난다.
(다) 모든 정수 k 에 대하여 닫힌 구간 $[2k,\ 2k+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\int_3^6 f(x)dx = a$ 라 할 때, $6a$ 의 값을 구하시오. [4점]

1. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \leqq 3) \\ -\dfrac{1}{2}(x-a)^2+b & (x>3) \end{cases}$ 이 모든 실수에서 미분가능할 때, $y=f(x)$와 $y=3x$로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 합 S에 대하여 $4S$의 값을 구하시오.

2. 함수 $f(x)=x+\cos x+\dfrac{\pi}{4}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=|f(x)-k|$ (k는 $0<k<\pi$인 상수)

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때 $y=g(x)$와 x축 및 $x=0, x=\pi$로 둘러싸인 부분의 넓이 S가 $\dfrac{1}{p}\pi^2-q$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

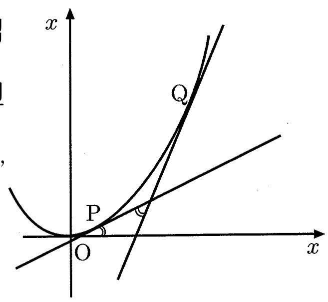
3. 함수 $f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2$ $(a>0)$과 실수 t에 대하여, $x \leqq t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때 $\int_{-2}^{3} g(t)dt$의 최댓값을 M이라 할 때 $5M$의 값을 구하시오.

4. 삼차함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ m-f(x) & (a \leq x < b) \\ n+f(x) & (x \geq b) \end{cases}$$

로 정의한다. 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분 가능할 때 $\int_{-3}^{1} g(x)dx$의 값을 구하시오.

5. 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$ 위의 두 점 $\mathrm{P}\left(\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(a,\ \frac{a^2}{4}\right)$에서의 두 접선과 x축으로 둘러싸인 삼각형이 이등변삼각형일 때, 곡선과 두 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{k}{8}\sqrt{2}$이다. k의 값을 구하시오. (단, $a>\sqrt{2}$)



6. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $1 \le f'(x) \le 3$ 이다.
(나) 모든 정수 n 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 점 $(4n,\ 8n)$, 점 $(4n+1,\ 8n+3)$, 점 $(4n+2,\ 8n+6)$, 점 $(4n+3,\ 8n+7)$ 을 모두 지난다.
(다) 모든 정수 k 에 대하여 닫힌구간 $[2k,\ 2k+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 각각 삼차함수의 그래프의 일부이다.

$\int_{3}^{6} f(x)dx = S$라 할 때, $6S$의 값을 구하시오.

7. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

㈎ $0 \le x < 1$일 때, $f(x) = e^{x} - 1$이다.
㈏ 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1) = -f(x) + e - 1$이다.

$\int_{0}^{3} f(x)dx$의 값은?

① $2e-3$　② $2e-1$　③ $2e+1$　④ $2e+3$　⑤ $2e+5$

2015년 대학수학능력시험 대비 6월 평가원_A형_21번

21. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1) = 0$
(나) $\lim_{x \to n} \frac{f(x)}{g(x)} = (n-1)(n-2)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$g(5)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

1. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(3) = 0$
(나) $\lim_{x \to n} \frac{f(x)}{g(x)} = (n-1)(n-2)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$g(5)$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

2. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$\lim_{x \to n} \frac{f(x)}{(x-1)g(x)} = n(n-1)$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$

이때, $g(7)$의 값은?

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

2015년 대학수학능력시험 대비 6월 평가원_A형_30번
30. 양수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 하자. 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. [4점] (가) $a \le b \le 20$ (나) $\log b - \log a \le f(a) - f(b)$

1. 양의 정수 n 에 대하여 $\log n$ 의 지표를 $f(n)$, 가수를 $g(n)$ 이라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 양의 정수 n 의 개수는?

(가) $f(3) < f(n) < f(2011)$
(나) $\{g(n)\}^2 - g(n) + \log 2 \cdot \log 5 < 0$

① 326 ② 328 ③ 330 ④ 332 ⑤ 334

2. 자연수 k에 대하여 $\log k$의 지표와 가수를 각각 x좌표와 y좌표로 갖는 점을 P_k라 하자. 다음 조건을 만족시키는 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오.

(가) $1 \le m < n < 100$
(나) $\overline{\mathrm{P}_m \mathrm{P}_n} = \sqrt{1 + (\log 2)^2}$

3. 양수 x 에 대하여 $\log x$ 의 지표를 $f(x)$ 라 하자. 등식

$$2f(m) - f(2m) = 1$$

을 만족시키는 1000 이하의 자연수 m 의 개수를 구하시오.

4. 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을

$a_n =$ ($\log n$에 가장 가까운 정수) $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

라 하자. 예를 들어 $a_1=0,\ a_2=0,\ a_3=0,\ a_4=1,\ \cdots$이다. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\sqrt{10} \fallingdotseq 3.162$로 계산한다.)

[보 기]

ㄱ. $a_{14}=2$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{20} a_n = 17$

ㄷ. $a_n=2$를 만족시키는 자연수 n의 개수는 285이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 자연수 n에 대하여 $\log n$의 지표를 $f(n)$, 가수를 $g(n)$ $(0 \le g(n) < 1)$이라 하자. $g(n+1) < g(n)$을 만족하는 n의 값 중 작은 것부터 차례대로 $n_1,\ n_2,\ n_3, \cdots$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} f(n_k)$의 값은?

① 35 ② 36 ③ 45 ④ 46 ⑤ 55

6. 자연수 n에 대하여 $\log n$의 지표와 가수를 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하자. 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}_n(f(n),\ g(n))$이 연립부등식

$$\begin{cases} y \ge \dfrac{1}{3}x \\ 0 \le y \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

의 영역에 속하도록 하는 자연수 n의 개수를 오른쪽 상용로그표를 이용하여 구하여라.

x	$\log x$
2.1	0.3222
2.2	0.3424
3.1	0.4914
3.2	0.5051

6월 모의평가시험 유사 및 심화문제_정답

20번	1	2
⑤	15	45

28번	1	2	3	4
5	③	③	③	⑤

30번	1	2	3	4	5	6	7
167	90	6	37	172	9	176	①

21번	1	2
⑤	②	⑤

30번	1	2	3	4	5	6
71	②	12	540	④	③	13

B형 20번 ⑤

해설

$a+b+c=6$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6=28$개 이다.

(나) 조건에서 $(1,\ a)$, $(2,\ b)$, $(3,\ c)$는 한 직선 위에 있지 않으므로

$b-a\neq c-b$

즉, $2b\neq a+c$이다.

$2b=a+c$를 만족하는 다음 5가지를 제외한다.

따라서 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$를 구하면

$(1,\ 2,\ 3)$, $(3,\ 2,\ 1)$, $(0,\ 2\ ,4)$, $(4,\ 2,\ 0)$, $(2,\ 2,\ 2)$ 이다.

따라서 만족하는 개수는 $28-5=23$(개)

B형 20번-1 15

해설

$a+b+c=6$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6=28$개 다.

(나)조건에서 $2a\neq b+c$이고 $2b\neq a+c$이고 $2c\neq a+b$

$2a=b+c$인 경우는 $a+b+c=3a=6$에서 $a=2$이고 $b+c=4$인 경우이므로 ${}_2H_4={}_5C_4=5$ 이다.

$2b=a+c$인 경우와 $2c=a+b$인 경우도 마찬가지로 5가지이다. 그런데 2, 2, 2는 세 가지 경우에 모두 포함되므로 구하는 경우의 수는 $28-3\times5+2=15$이다.

B형 20번-2 45

해설

$x+3y+3z=3\times10+2$이므로 x는 3으로 나누어 나머지 2인 수이다.

$x=3k-1$이라 놓고 준식에 대입하면 $3k-1+3y+3z=32$에서 $k+y+z=11$, k, y, z는 자연수이므로 ${}_3H_8={}_{10}C_8=45$

B형 28번 5

해설

중심이 C_1 위에 있고 점 F_1을 지나는 원을 k_1이라 하고 포물선 $x^2=4y$ 위의 원 k_1의 중심을 Q_1이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{Q_1F_1}}=k_1\text{의 반지름}=(\mathrm{Q}_1\text{으로부터 준선 } y=-1\text{에 이르는 거리})$$

이므로 원 k_1은 준선 $y=-1$에 접한다.

따라서 원 k_1위의 점 P 의 y 좌표≥-1이다.

같은 방법으로 중심이 C_2 위에 있고 점 F_2를 지나는 원을 k_2라 하고 포물선 $y^2=8x$ 위의 원k_2의 중심을 Q_2라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{Q_2F_2} = k_2$ 의 반지름 $=$ (Q_2 로부터 준선 $x = -2$ 까지의 거리)
이므로 원 k_2 는 준선 $x = -2$ 에 접한다.
따라서 원 k_2 위의 점 P 의 x 좌표 $\geqq -2$ 이다.
따라서 두 원 k_1, k_2 의 교점 P 는
x 좌표 ≥ -2, y좌표 ≥ -1 이므로
(나) 조건에 의하여 3사분면에서 $\overline{OP}$ 가 최대일 때는 P 가 $(-2,\ -1)$에 있을 때이다.
$P(-2,\ -1)$ 을 지나고 준선에 접하는 두 원이
$(x+2)^2+(y-1)^2 = 4$과 $\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+(y+1)^2 = \left(\frac{17}{8}\right)^2$로 존재하므로 $P(-2,\ -1)$ 은 조건을 만족한다. 따라서 $\overline{OP}$ 의 최댓값은 $\sqrt{5}$ 이고 $\overline{OP}^2$ 의 최댓값은 5 이다.

B형 28번-1 ③

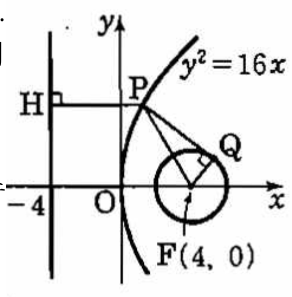
해설

$y^2 = 16x = 4 \cdot 4 \cdot x$이고 원의 중심은 포물선의 초점 F와 일치한다. 따라서 원의 중심은 $F(4, 0)$이고 반지름의 길이가 2이므로 그림의 직각삼각형 PFQ에서

$\overline{PF} = \sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2} = 6$

포물선의 준선의 방정식은 $x = -4$이므로 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 따라 $\overline{PH} = \overline{PF} = 6$

따라서 점 P의 x좌표는 $-4+6 = 2$



B형 28번-2 ③

해설

$F(0, 1)$이고 $\overline{FP_1} = 5$이므로 점 P_1에서 준선 $x = -1$까지의 거리는 5이다.

점 P_1이 $x^2 = 4y$ 위의 점이므로 $P_1(4, 4)$

직선 FP_1의 방정식은 $y = \frac{3}{4}x+1$

$P_n\left(x_n,\ \frac{3}{4}x_n+1\right)$이라고 할 때, $\overline{P_{n-2}P_{n-1}} = 2\overline{P_{n-1}P_n}$ $(n \geq 3)$이므로

$x_{n-1}-x_{n-2} = 2(x_n - x_{n-1})$ $(n \geq 3)$ $x_1 = 4,\ x_2 = 6$에서

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2})$$

$$\therefore\ x_n - x_{n-1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

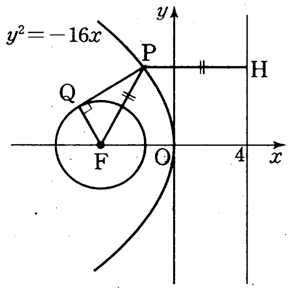
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 4 + \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \lim_{n\to\infty}\left(x_n + \frac{3}{4}x_n+1\right) = 15$$

B형 28번-3 ③

해설

ㄱ. (참) $y^2=-16x$ 에서 $y^2=4\times(-4)\times x$ 이므로 포물선의 초점은 $(-4,0)$이다. 따라서 원 $(x+4)^2+y^2=2$의 중심 $(-4,0)$과 같다.



ㄴ. (거짓) 점 $(-4,8)$은 포물선 위의 점이고 포물선의 준선의 방정식은 $x=4$ 이므로 주어진 점에서 준선까지의 거리는 $|4-(-4)|=8$이다.

ㄷ. (참) 점 P에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H, 포물선의 초점을

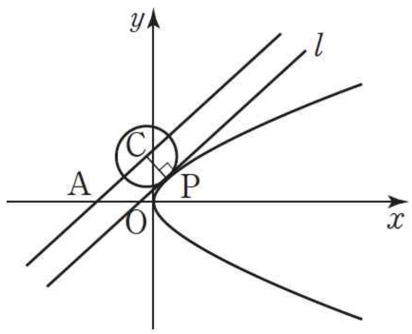
F라 하면 $\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PF}^2-\overline{FQ}^2}=\sqrt{\overline{PH}^2-2}$

따라서, $\overline{PH}$의 길이가 최소일 때, $\overline{PQ}$의 길이도 최소이므로 점 P가 원점 O에 있을 때, 선분 PQ의 길이는 최소이다.

B형 28번-4 ⑤

해설

원의 중심을 C, 원과 포물선의 접점을 P, 점 P에서의 포물선의 접선을 l이라 하자. 직선 AC와 직선 l이 평행할 때, 직선 AC의 기울기가 최대가 되므로 접선 l의 기울기를 m이라 하면 접선 l의 방정식은



$y=mx+\dfrac{1}{m}$ 즉, $mx-y+\dfrac{1}{m}=0$

이때, 점 A와 접선 l 사이의 거리는 $\sqrt{2}$ 이므로

$\dfrac{\left|-3m+\dfrac{1}{m}\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$, $\left(3m-\dfrac{1}{m}\right)^2=2(m^2+1)$

$7m^4-8m^2+1=0$, $(m^2-1)(7m^2-1)=0$

$\therefore\ m^2=1$ 또는 $m^2=\dfrac{1}{7}$

$\therefore\ m=-1$ 또는 $m=1$ 또는 $m=-\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ 또는 $m=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

따라서 직선 AC의 기울기 m의 최댓값은 1이다.

B형 30번 167

해설

함수 $f(x)$가 $(3,\ 7)$, $(4,\ 8)$, $(5,\ 10)$, $(6,\ 13)$을 지나고 $1\le f'(x)\le 3$이므로

(1) 두 점 $(3,\ 7)$, $(4,\ 8)$의 기울기가 1이므로 $3\le x\le 4$에서 $f(x)=x+4$

(2) 두 점 $(5,\ 10)$, $(6,\ 13)$의 기울기가 3이므로 $5\le x\le 6$에서 $f(x)=3x-5$

(3) 주어진 조건에 의해 $(4,\ 8)$과 $(5,\ 10)$을 지나는 함수는 이차함수이고

$f(x)=ax^2+bx+c$

$f'(x)=2ax+b$

실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f'(4) = 8a + b = 1$

$f'(5) = -10a + b = 3$

$a = 1,\ b = -7$

$f(4) = 8$에서 $c = 20$

(1), (2), (3)에 의해

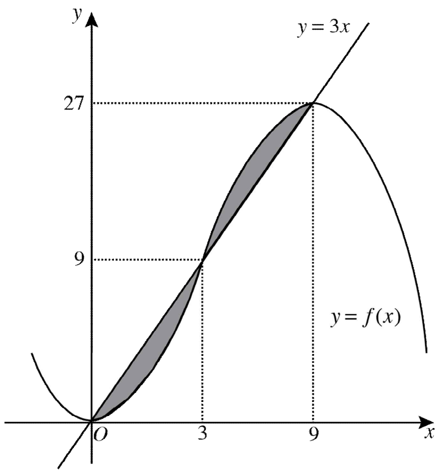
$$\int_3^6 f(x)dx = \int_3^4 (x+4)dx + \int_4^5 (x^2 - 7x + 20)dx + \int_5^6 (3x-5)dx = \frac{167}{6}$$

$\therefore\ 6a = 167$

B형 30번-1 90

해설

$f(3) = 9 = -\frac{1}{2}(3-a)^2 + b,\ f'(3) = 6 = -(3-a)$에서 $a = 9,\ b = 27$



$$S = \frac{3^3}{6} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 6^3}{6}$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{36}{2} = \frac{45}{2}$$

$\therefore\ 4S = 90$

B형 30번-2 6

해설

$g(x) = |f(x) - k|$이 실수전체에서 미분가능하려면

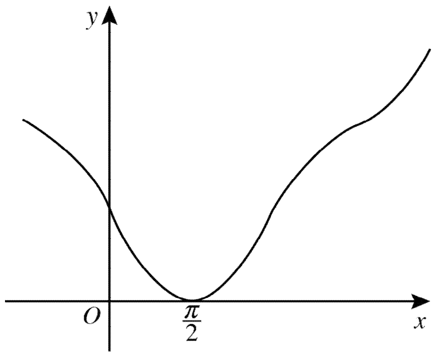
$f(\alpha) = k$일 때, $f'(\alpha) = 0$이어야 한다.

$f(x) = x + \cos x + \frac{\pi}{4},\ f'(x) = 1 - \sin x = 0$에서 $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$이고

$k = f\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2n\pi + \frac{3}{4}\pi$

$\therefore 0 < k < \pi$에서 $n = 0$이고 $k = \frac{3}{4}\pi$

$g(\pi - x) = g(x)$이므로



$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x) - \frac{3}{4}\pi\right)dx$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\left(x + \cos x - \frac{\pi}{2}\right)dx$$
$$= \frac{\pi^2}{4} - 2$$
$\therefore\ p = 4,\ q = 2$

B형 30번-3 37

해설

$f(x) = -3x^4 + 4(a-1)x^3 + 6ax^2$,

$f'(x) = -12x\{x^2 - (a-1)x - a\} = -12x(x-a)(x+1) = 0$에서 $x = -1,\ 0,\ a\ (a > 0)$이므로

$g(t)$가 실수전체에서 미분가능하려면 극댓값 $f(a) \le$ 극댓값 $f(-1)$이어야 한다

$a^4 + 2a^3 \le 2a + 1$에서 $-1 \le a \le 1$이고 조건에서 $a > 0$ 이므로 $0 < a \le 1$

$$\therefore\ g(t) = \begin{cases} f(t) & (t \le -1) \\ f(-1) & (-1 < t) \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{3} g(t)dt = \int_{-2}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{3} f(-1)dt$$
$$= -\frac{18}{5} - a + 4(2a+1)$$
$$= 7a + \frac{2}{5} \le 7 + \frac{2}{5}$$
$$\therefore\ 5M = 5\left(7 + \frac{2}{5}\right) = 37$$

B형 30번-4 172

해설

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$에서 $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$

$x = a$와 $x = b$에서 미분가능하려면

$f(a) = m - f(a),\ f'(a) = -f'(b)$

$m - f(b) = n + f(b),\ -f'(a) = f'(b)$에서

$f'(a) = f'(b) = 0$이고 $a < b$이므로 $a = -3,\ b = 1$

$\therefore\ m=2f(a)=2f(-3)=54,\ n=m-2f(b)=54-2f(1)=64$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int_{-3}^{1}g(x)dx&=\int_{-3}^{1}(m-f(x))dx\\&=\int_{-3}^{1}(54-x^3-3x^2+9x)dx\\&=172\end{aligned}$$

B형 30번-5 9

해설

$f(x)=\dfrac{1}{4}x^2$에서 $f'(x)=\dfrac{1}{2}x$

점 P에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ라 하면,
점 Q에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각은 2θ이다.

$\tan\theta=f'(\sqrt{2})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan2\theta=f'(a)=\dfrac{a}{2}=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=2\sqrt{2}$

$\therefore Q(4\sqrt{2},\ 8)$

점 P에서 접선과 점 Q에서 접선의 교점을 R이라 하면,

$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-\sqrt{2})+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{1}{2}$

$y=2\sqrt{2}(x-4\sqrt{2})+8=2\sqrt{2}x-8$

의 교점이 R이므로 $R\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$

구하는 넓이는 삼각형 PQR의 넓이에서 곡선 $y=\dfrac{1}{4}x^2$과 직선 PQ로 둘러싸인 넓이의 차와 같으므로

$S=\dfrac{27\sqrt{2}}{8}-\dfrac{(3\sqrt{2})^3}{6\cdot4}=\dfrac{9}{8}\sqrt{2}$

B형 30번-6 176

해설

함수 $f(x)$가 $A(3,7)$, $B(4,8)$, $C(5,11)$, $D(6,14)$를 지나고 $1\le f'(x)\le3$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 $3\le x\le4$에서는 선분 AB가 되고 $5\le x\le6$에서는 선분 CD가 된다. 그리고 $\int_{3}^{4}f(x)dx=\dfrac{7+8}{2}$, $\int_{5}^{6}f(x)dx=\dfrac{11+14}{2}$이다.

이제 $B(4,8)$, $C(5,11)$을 지나고 $f'(4)=1$, $f'(5)=3$을 만족하는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{4}^{5}f(x)dx$의 값만 구하면 된다.

함수 $f(x)$를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 함수 $g(x)$에 대하여, $\int_{0}^{1}g(x)dx$의 값을 구하여도 된다.

$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면

$B'(0,\,8)$, $C'(1,\,11)$을 지나고 $g'(0)=1$, $g'(1)=3$에서

$g(0)=d=8$, $g'(0)=c=1$

$g(1)=a+b+9=11$, $g'(1)=3a+2b+1=3$에서 $a=-2$, $b=4$

$\therefore \int_0^1 g(x)dx=\int_0^1(-2x^3+4x^2+x+8)dx=\frac{28}{3}$

$\therefore\ S=\int_3^6 f(x)dx=\int_3^4 f(x)dx+\int_4^5 f(x)dx+\int_5^6 f(x)dx$

$=\frac{15}{2}+\frac{28}{3}+\frac{25}{2}=\frac{88}{3}$

$\therefore\ 6S=176$

B형 30번-7 ①

해설

$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1(e^x-1)dx+\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$에서

$\int_2^3 f(x)dx=\int_1^2 f(x+1)dx=\int_1^2(-f(x)+e-1)dx$이므로

$\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx=\int_1^2(e-1)dx=e-1$

$\therefore\ \int_0^3 f(x)dx=\left[e^x-x\right]_0^1+e-1=2e-3$

A형 21번 정답 ⑤

해설

$n=1$일 때, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ ……㉠

$n=2$일 때, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ ……㉡

$n=3$일 때, $\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=2$ ……㉢

$n=4$일 때, $\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}=6$ ……㉣

조건 ㈎에서 $g(1)=0$이므로 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$는

$g(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$로 놓을 수있다.

따라서 ㉠, ㉡에서 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$이고

㉢에서 $\frac{f(3)}{g(3)}=\frac{2}{9+3a+b}=2$이므로 $3a+b+8=0$ ……㉤

㉣에서 $\frac{f(4)}{g(4)}=\frac{6}{16+4a+b}=6$이므로 $4a+b+15=0$ ……㉥

㉤, ㉥을 연립하여 풀면 $a=-7$, $b=13$

$\therefore\ g(x)=(x-1)(x^2-7x+13)$

따라서 구하는 $g(5)$의 값은 $4\times3=12$

A형 21번-1 정답 ②

해설

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=0$에서 $f(x)$는 $(x-1)(x-2)$를 인수를 갖는다.

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=2$에서 $g(3)=0$이므로 $f(3)=0$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$, $g(x)=(x-3)g_1(x)$

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2}{g_1(3)}=2$에서 $g_1(3)=1$

$\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{6}{g_1(4)}=6$에서 $g_1(4)=1$

$\therefore g_1(x)=(x-3)(x-4)+1$

$\therefore g(5)=2\times(2+1)=6$

A형 21번-2 정답 ⑤

해설

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{(x-1)g(x)}=0$, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)g(x)}=0$에서 $f(x)=x(x-1)^2$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-1)g(x)}=\frac{2}{g(2)}=2$에서 $g(2)=1$

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{(x-1)g(x)}=\frac{12}{2g(3)}=6$에서 $g(3)=1$

$\therefore g(x)=(x-2)(x-3)+1$

$\therefore g(7)=21$

A형 30번 정답 71

해설

$\log x$의 지표를 $g(x)$라 하면 $\log x=g(x)+f(x)$이고 조건 (나)에서

$\{g(b)+f(b)\}-\{g(a)+f(a)\}\le f(a)-f(b)$

$g(b)+2f(b)\le g(a)+2f(a)$

(1) $g(a)=g(b)=0$인 경우 또는 $g(a)=g(b)=1$인 경우

$g(b)+2f(b)\le g(a)+2f(a)$에서 $f(b)\le f(a)$인데 $\log x$의 가수 $f(x)=\log x-[\log x]$가 증가함수이므로 주어진 조건을 만족하는 a와 b는 같은 경우이다. 따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 20이다.

(2) $g(a)=0$, $g(b)=1$인 경우

$g(b)+2f(b)\le g(a)+2f(a)$에서 $1+2f(b)\le 2f(a)$

$2+2f(b)\le 1+2f(a)$

$2\log b\le 1+2\log a=\log 10a^2$, $b^2\le 10a^2$

부등식을 만족하는 순서쌍은
$a=4$일 때, b는 10에서 12까지 3가지
$a=5$일 때, b는 10에서 15까지 6가지
$a=6$일 때, b는 10에서 18까지 9가지
$a=7$일 때, b는 10에서 20까지 11가지
$a=8$일 때, b는 10에서 20까지 11가지
$a=9$일 때, b는 10에서 20까지 11가지
따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 51이다.
그러므로 총 71개

A형 30번-1 정답 ②
해설
(가)에서 3은 한 자리의 양의 정수이므로 $f(3)=0$, 2011은 네 자리의 양의 정수이므로 $f(2011)=3$
$f(n)=1$ 또는 $f(n)=2$이다.
(나)에서 주어진 식의 좌변을 인수분해하면
$\{g(n)-\log 2\}\{g(n)-\log 5\}<0$
$\therefore\ \log 2 < g(n) < \log 5$
이때 $\log n = f(n)+g(n)$이므로
ⅰ) $f(n)=1$ 일 때 $1+\log 2 < f(n)+g(n) < 1+\log 5$
$\therefore\ \log 20 < \log n < \log 50$
따라서 양의 정수 n 은 $21, 22, \cdots, 49$ 로 29 개다.
ⅱ) $f(n)=2$ 일 때 $2+\log 2 < f(n)+g(n) < 2+\log 5$
$\therefore\ \log 200 < \log n < \log 500$
따라서 양의 정수 n 은 $201, 202, \cdots, 499$ 로 299 개다.
ⅰ), ⅱ)에 의하여 양의 정수 n 의 개수는 $29+299=328$ 이다.

A형 30번-2 정답 12
해설
$0 \le \log m < \log n < 2$
$[\log m], [\log n] = 0, 1$

0	0
0	1
1	1

ⅰ) $1 \le m < n < 10,\ \dfrac{m}{n} < 1$
$P_m = (0, \log m),\ P_n = (0, \log n)$
$\overline{P_m P_n}^2 = (\log \dfrac{m}{n})^2 = 1 + (\log 2)^2$

$\log\frac{m}{n}=-1\pm\log 2=\log\frac{1}{5}$ or $\log\frac{1}{20}$
$\therefore n=20m$ 또는 $n=5m$

ㄱ) $n=5m$ 일 때, $(m,n)=(2,10),(3,15),(4,20),(5,25),$
$(6,30),(7,35),(8,40),(9,45)$
ㄴ) $n=20m$ 일 때, $(m,n)=(1,20),(2,40),(3,60),(4,80)$

iii) $10\le m<n<100$
$P_m(1,-1+\log m)$, $P_n(1,-1+\log n)$
$\overline{P_mP_n}^2=(\log\frac{m}{n})^2-1+(\log 2)^2=1+(\log 2)^2$
은 성립할 수 없다.
따라서 총 12개

A형 30번-3 정답 540
해설
$f(m)$은 $\log m$의 지표이므로 정수이고
$1\le m\le 1000$에서 $0\le f(m)\le 3$,
$2\le 2m\le 2000$에서 $0\le f(2m)\le 3$이다.
따라서 주어진 조건 $2f(m)-f(2m)=1$을 만족시키는 순서쌍 $(f(m),f(2m))$은 $(1,1)$, $(2,3)$이다.
i) $(f(m),f(2m))=(1,1)$일 때
$f(m)=1$에서 $10\le m<100$
$f(2m)=1$에서 $10\le 2m<100$
따라서 $10\le m<50$이므로 m은 40개다.
ii) $(f(m),f(2m))=(2,3)$일 때
$f(m)=2$에서 $100\le m<1000$
$f(2m)=3$에서 $1000\le 2m<10000$
따라서 $500\le m<1000$이므로 m은 500개다.
i), ii)에서 구하는 m의 개수는 540이다.

A형 30번-4 정답 ④
해설
$\sqrt{10}=3.162$에서 $\log 3.162=\log\sqrt{10}=\frac{1}{2}=0.5$이다.
ㄱ. $\log 10<\log 14<\log 31.62$에서 $1<\log 14<1.5$이므로 $a_{14}=1$
ㄴ. $\log 3<\log\sqrt{10}<\log 4$이므로
$\log 3<0.5$, $\log 4>0.5$
또, $\log 10<\log 20<\log 31.62$이므로
$1<\log 20<1.5$
즉, $a_1=a_2=a_3=0$, $a_4=a_5=a_6=\cdots=a_{20}=1$이므로

$\sum_{n=1}^{20} a_n = 0+0+0+1+1+\cdots+1 = 17$

ㄷ. $a_n = 2$이려면 $1.5 < \log n < 2.5$이어야 한다.

그런데 $\log 10\sqrt{10} = \log 31.62 = 1.5$,

$\log 100\sqrt{10} = \log 316.2 = 2.5$이므로

$31.62 \le n < 316.2$ $\quad\quad \therefore 32 \le n \le 316$

즉, $a_n = 2$를 만족시키는 자연수 n의 개수는 285이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

A형 30번-5 정답 ③

해설

$\log(n+1) - \log n = \log\frac{n+1}{n} \ne$ (정수)이고

$0 < \log(n+1) - \log n < 1$이므로

$g(n+1) < g(n)$이 성립하기 위해서는

$\log(n+1) =$ (정수)일 때이고, 이때 $g(n+1) = 0$

즉, $n+1 = 10^l$ (l은 자연수) 꼴이어야 한다.

$\therefore n = 10-1,\ 10^2-1,\ 10^3-1, \cdots$

즉, $n_k = 10^k - 1$

이때 $f(n_k)$는 $\log(10^k-1)$의 지표이므로

$f(n_k) = k-1$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} f(n_k) = \sum_{k=1}^{10}(k-1) = 45$

A형 30번-6 정답 13

해설

$\begin{cases} g(n) \ge \frac{1}{3}f(n) \cdots (1) \\ 0 \le g(n) \le \frac{1}{2} \cdots (2) \end{cases}$ 에서 n이 자연수이므로 $f(n) = 0, 1, 2, 3, \cdots$이다. 그런데 조건(1)에서

$f(n)$은 0 또는 1이다.

i) $f(n) = 0$일 때,

$0 \le g(n) \le \frac{1}{2}$이므로 $n = 1, 2, 3$

($\because$ $\log 3.1 = 0.4914$, $\log 3.2 = 0.5051$)

ii) $f(n) = 1$일 때,

$\frac{1}{3} \le g(n) \le \frac{1}{2}$에서

$0.3222 = \log 2.1 < \frac{1}{3} < \log 2.2 = 0.3424$이고 $0.4914 = \log 3.1 < \frac{1}{2} < \log 3.2 = 0.5051$이므로

$\log 2.1 < g(n) < \log 3.2$

그러므로 $n = 22,\ 23,\ \cdots,\ 31$
i)과 ii)에서 13개