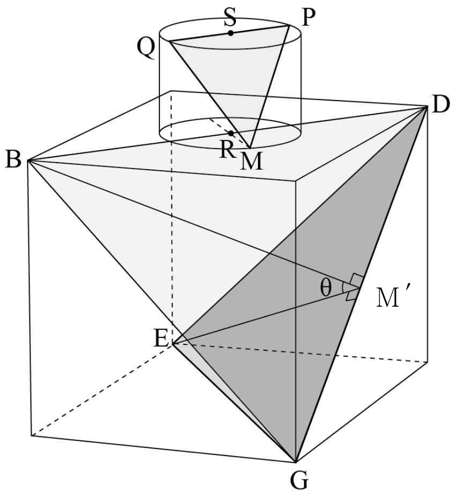
2014년 7월 모의고사 수학B형 30번 풀이

먼저, 교육청이 제시한 풀이를 살펴보도록 하자.

30. **[출제의도] 정사영을 이용하여 수학외적 문제해결하기**



원기둥의 밑면 α, β의 중심을 각각 R, S라 하자.

$\overline{\mathrm{PQ}} /\!/ \overline{\mathrm{DB}}$이고, $\overline{\mathrm{SM}} /\!/ \overline{\mathrm{RG}}$이므로 평면 MPQ와 평면 GDB는 평행하다.

삼각형 GDB와 삼각형 DEG는 모두 정삼각형이고 두 삼각형이 만나서 생기는 선분은 $\overline{\mathrm{DG}}$이다. 선분 DG의 중점을 M′이라 하고 $\theta = \angle \mathrm{BM'E}$라 하면

$\overline{\mathrm{BM'}} = \overline{\mathrm{EM'}} = 2\sqrt{6}$, $\overline{\mathrm{BE}} = 4\sqrt{2}$ 이므로

삼각형 BM′E에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \cos(\angle \mathrm{BM'E}) = \frac{24+24-32}{2\cdot 2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}} = \frac{1}{3}$$

삼각형 MPQ의 넓이 S는

$$S = \frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{3}$$ 이므로

삼각형 MPQ의 평면 DEG 위로의 정사영의 넓이는 $S\cos\theta = 2\sqrt{3}\times\frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$a = 3$, $b = 2$

따라서 $a^2 + b^2 = 13$

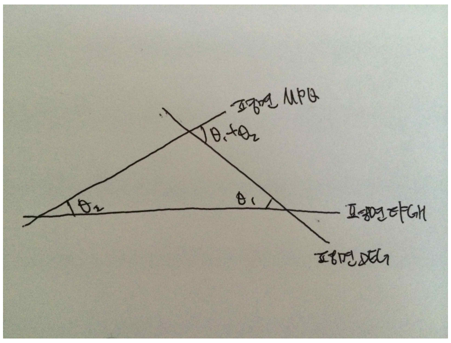
[출처] 인천광역시교육청

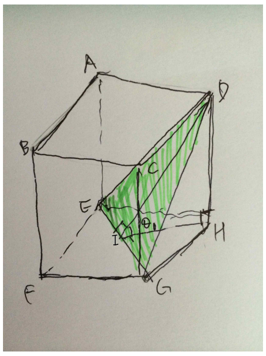
평행한 면을 정육면체 $ABCD-EFGH$에서 직접 지정하여 바로 이면각을 구해내는 방법이다. 그러나 이 풀이의 경우 일반적인 학생들이 시험장이 주는 긴장감 속에서 바로 떠올리기엔 매우 힘든 풀이라고 생각한다. 그러나, 한완수 Critcal Point에 나온 단면화를 이용한 풀이를 떠올리고 활용했다면, 보다 쉽게 문제를 해결할 수 있었을 것이다.

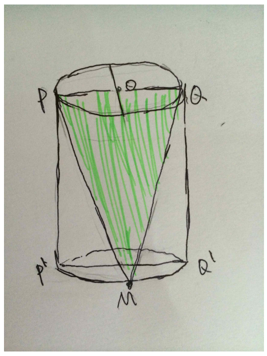
[출처] 한권으로 완성하는 수학 ver. 2015 기하와 벡터 CP 04 (P. 88)

2014년 7월 모의고사 수학B형 30번 풀이

30.



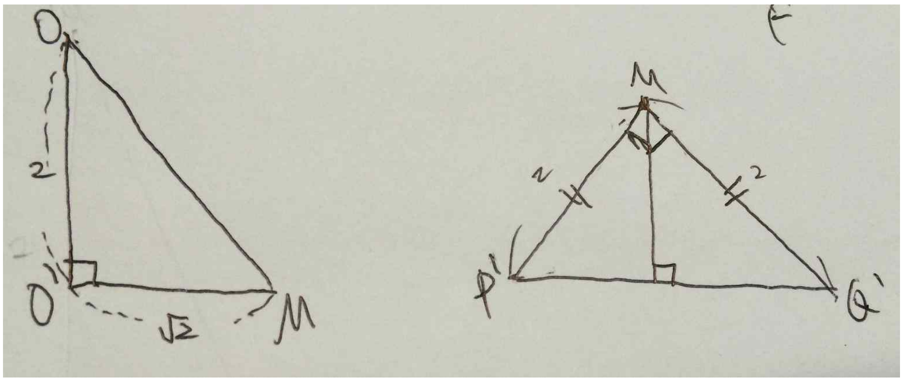




문제의 상황을 단면화 시켜본 것이다. 두 개의 평면 DEG와 MPQ가 밑면(평면 $EFGH$)과 이루는 각은 쉽게 구할 수 있다는 점에서 고안해낸 풀이법이다. 먼저 평면 DEG와 밑면이 이루는 각을 구해보도록 하자. 삼수선의 정리에 의해, 이면각을 쉽게 찾을 수 있다.

즉, $\cos\theta_1 = \dfrac{\overline{DI}}{\overline{IH}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\cdots$①

이제 평면 MPQ와 밑면이 이루는 각을 구하도록하자. $\triangle MPQ$의 평면 DEG 위로의 정사영의 넓이를 구하는 것이 문제이므로, 정사영을 이용해 이면각을 구하는 것이 가장 빠른 방법이 될 것이다.



$\triangle MPQ$의 넓이를 S, $\triangle MP'Q'$의 넓이를 S'라 하자.

$S = \dfrac{1}{2}\overline{PQ} \times \overline{OM}$에서 $\overline{PQ} = 2\sqrt{2}$, $\overline{OM} = \sqrt{6}$ 즉, $S = 2\sqrt{3}$

$\overline{PQ} \perp \overline{MN}$이고, 원주각의 성질에 의해 $\angle P'MQ' = \dfrac{\pi}{2}$이므로, $\triangle MP'Q'$은 직각이등변삼각형

$S' = 2$, $\cos\theta_2 = \dfrac{S'}{S}$이므로 $\cos\theta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\cdots$②

①, ②에서 $\cos(\theta_1 + \theta_2)$의 값을 구하면 삼각함수의 덧셈정리에 의해 $\cos(\theta_1 + \theta_2) = -\dfrac{1}{3}$

그런데, 이면각의 정의에 의해 예각을 취해야하므로, $\cos(\pi - (\theta_1 + \theta_2)) = \dfrac{1}{3}$을 사용해야한다.

정사영의 넓이는 $Scos(\pi - (\theta_1 + \theta_2)) = 2\sqrt{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

$p = 3$, $q = 2$이므로, $p^2 + q^2 = 13$

정답) 13