

2023학년도 상현달 모의고사 by 달동네 공방사

# 수학 영역 (미적분)

제 2 교시

성명

수험 번호

## 5지선다형

1.  $\left(\frac{1}{\sqrt{2^3}} \times 2^{\sqrt{3}}\right)^{4\sqrt{3}+6}$  의 값은? [2점]

- ① 2      ② 4      ③ 8      ④ 16      ⑤ 32

2. 함수  $f(x)$ 가

$$f'(x) = 3x^2 + 6x, f(0) = 1$$

을 만족시킬 때,  $f(1)$ 의 값은? [2점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

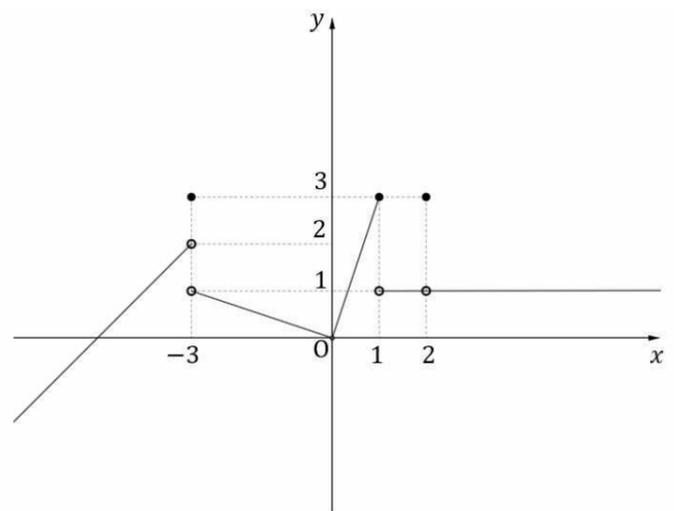
3. 공비가 양수인 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2 + a_5 = 18, \quad a_4 + a_7 = 72$$

일 때,  $a_3$ 의 값은? [3점]

- ① 4      ② 8      ③ 12      ④ 16      ⑤ 20

4. 함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① 2      ② 3      ③ 4      ④ 5      ⑤ 6

5. 첫째항이 1인 수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+1} \begin{cases} -2a_n & (|a_n| \leq 10) \\ \frac{1}{2}a_n & (|a_n| > 10) \end{cases}$$

일 때,  $\sum_{k=3}^{13} a_k$ 의 값은? [3점]

- ① 12      ② 14      ③ 16      ④ 18      ⑤ 20

6. 삼차함수  $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 8, \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{x-5} = 0$$

을 만족시킬 때,  $f(3)$ 의 값은? [3점]

- ① 4      ② 6      ③ 8      ④ 10      ⑤ 12

7.  $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 인  $\theta$ 에 대하여  $1 - \cos\theta = \frac{\cos\theta(\sin\theta + 2\cos\theta)}{1 + \cos\theta}$  일

때,  $\sin\theta - \cos\theta$ 의 값은? [3점]

- ①  $-\sqrt{3}$       ②  $-\sqrt{2}$       ③ 0      ④  $\sqrt{2}$       ⑤  $\sqrt{3}$

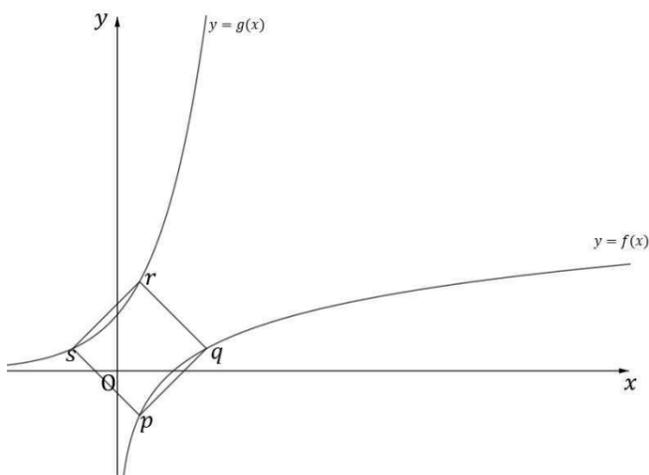
8. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t(t \geq 0)$ 에서의 위치  $x(t)$ 가

$$x(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - 13$$

이다. 점 P가 출발한 후  $t > 0$ 인 구간에서 처음으로 처음 속도와 같아질 때까지 이동한 거리는? [3점]

- ① 40      ② 42      ③ 44      ④ 46      ⑤ 48

9. 그림과 같이 두 함수  $f(x) = \log_2 x + a$ ,  $g(x) = 2^{x-a}$ 의 그래프가 놓여있다. 곡선  $y = f(x)$ 의 그래프 위에 있는 두 점  $p, q$ 와 곡선  $y = g(x)$ 의 그래프 위에 놓여있는 두 점  $r, s$ 는 한 변의 길이가  $2\sqrt{2}$ 인 정사각형을 이룬다. 이때, 점  $r$ 의 좌표를  $(n, m)$ 이라 할 때,  $n+m$ 의 값은? (단, 0는 원점이고, 두 점  $p, q$ 는 각각 제4사분면, 제1사분면 위의 점이고, 점  $s, r$ 은 각각 점  $p, q$ 와  $y = x$ 에 대해 대칭관계이다.) [4점]



- ① 3      ②  $\frac{10}{3}$       ③  $\frac{11}{3}$       ④ 4      ⑤  $\frac{13}{3}$

10.  $f(-1) = -2$ 인 사차함수  $f(x)$ 에 대하여 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(-1, f(-1))$ 의 접선이  $y = f(x)$ 와 두 점  $(-1, f(-1))$ ,  $(5, f(5))$ 에서 접한다. 이 접선의  $y$  절편이 7일 때,  $f'(2)$ 의 값은? [4점]

- ① 7      ② 9      ③ 11      ④ 13      ⑤ 15

11. 두 양수  $a, b$ 에 대하여 곡선  $y = a \tan b\pi x$  ( $0 < x < \frac{3}{2b}$ ) 위의 두 점 A, B와  $x$ 축 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC는 정삼각형이다. 직선 AB가  $x$ 축과 서로 평행하고 두 직선 OA와 직선 OB의 기울기 곱이  $\frac{12}{5}$ 일 때,  $a^2b^2$ 의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

- ①  $\frac{1}{4}$       ②  $\frac{1}{2}$       ③  $\frac{3}{4}$       ④ 1      ⑤  $\frac{5}{4}$

12. 다항함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$f(x) = x^2 f'(x) - 7x^3 + 6x + \int_0^x f(x) dx - a$$

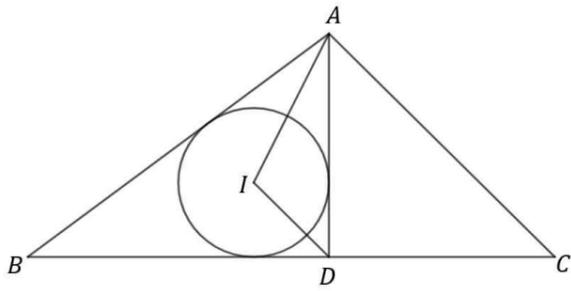
를 만족시킨다. 이때, 상수  $a$ 의 값은? [4점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

13. 그림과 같이  $\overline{BC} = 4$ 인 삼각형 ABC에 대하여 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 점 D라 하고 삼각형 ABD의 내접하는 원의 중심을 I라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 삼각형 AID의 외접원의 반지름 길이와 삼각형 ACD의 외접원의 반지름 길이는 동일하다.  
 (나)  $\sin(\angle CAD) = \cos(\angle ABD)$

삼각형 ACD의 외접원의 넓이는? [4점]



- ①  $\frac{13}{4}\pi$     ②  $\frac{7}{2}\pi$     ③  $\frac{15}{4}\pi$     ④  $4\pi$     ⑤  $\frac{17}{4}\pi$

14. 상수  $a$ 에 대하여 함수  $f(x) = 4(x-1)^2(x-4) + a$ 가 있다. 방정식  $|f(x)| = a$ 의 서로 다른 실수의 개수가 4일 때, 곡선  $y = |f(x)|$ 와 직선  $y = a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

- ① 4    ② 6    ③ 8    ④ 10    ⑤ 12

15. 서로 다른 두 등차수열  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ 에 대하여 등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ , 등차수열  $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $T_n$ 이라 할 때, 두 수열  $\{S_n\}$ ,  $\{T_n\}$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $\left| \frac{S_{m+1}}{S_m} \right| = \frac{m+1}{m}$ ,  $T_m = T_{m+1} = -45$ 인 자연수  $m$ 이 존재한다.

(나)  $S_n \times T_n > 0$ 을 만족시키는  $n$ 의 값의 총 개수는 5이다.

$S_7 = T_7$ 일 때, 수열  $\{S_n\}$ 의 최대값은? [4점]

- ① 15      ② 20      ③ 25      ④ 30      ⑤ 35

단답형

16.  $\frac{\log_2 27}{\log_2 9} + \log_9 3$ 의 값을 구하시오. [3점]

17. 이차함수  $f(x)$ 에 대하여  $f(2) = f(6) = 0$ 이고  $\int_2^6 f(x)dx = 64$ 일 때,  $f(5)$ 의 값을 구하시오. [3점]

18.  $a_1 = a_2 = 1$  인 수열  $\{a_n\}$  이 모든 자연수  $n$  에 대하여

$$a_{n+2}(a_n + a_{n+1}) = a_n a_{n+1}$$

을 만족시킬 때,  $\frac{a_5}{a_{10}}$  의 값을 구하시오. [3점]

19. 실수  $a$  와 양의 실수  $b$  에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수  $f(x)$  가

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 & (x > a) \\ 3x^2 + 6x + b & (x \leq a) \end{cases}$$

이다.  $a+b$  의 값을 구하시오. [3점]

20. 두 일차함수  $f(x), g(x)$  가 모든 실수  $x$  에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \int_2^x f(x) \cdot g(x) dx = a(x-1)^3 + \int_2^4 f(x) dx$$

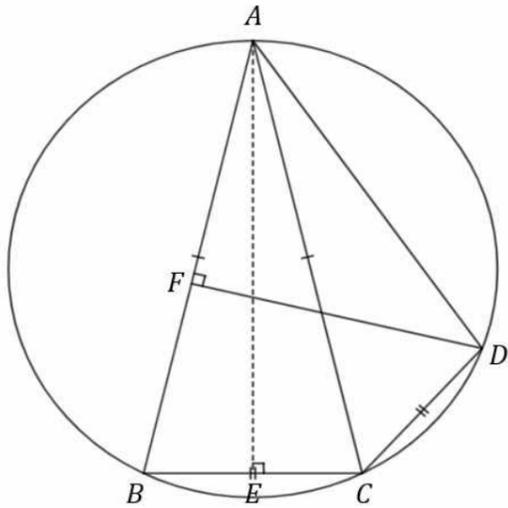
$$(나) -6 \int_b^x \{f(x) + g(x)\} dx = f(x) \cdot g(x)$$

$|a+b|$  의 값을 구하시오. [4점]

21. 그림과 같이 사각형 ABCD에 대해 점 A와 점 D에서 각각 선분 BC와 선분 AB에 내린 수선의 발을 점 E와 점 F라고 하자. 사각형 ABCD와 사각형 ABCD의 외접원은 다음 조건을 만족시킨다.

- (가)  $\overline{AB} = \overline{AC}$   $\overline{BC} = \overline{CD}$ ,  $\angle DAE = \angle ACD$   
 (다) 외접원의 중심과 선분 BC 사이의 거리는 8이다.

삼각형 ADF의 넓이가  $\frac{p}{q}\sqrt{3}$ 일 때,  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



22. 실수  $t$ 에 대하여  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + t$ 가 있다. 함수  $f(x)$ 와 상수  $a$ 에 대하여 정의된 함수

$$g(x) = [f(x)^2 - 8f(x) + a] \times [f(x)^2 - 8f(x) + 16]$$

가 최솟값  $k$ 를 가질 때,  $g(\alpha) = k$ 를 만족시키는 모든  $\alpha$ 에 대하여  $f(\alpha) \neq 4$ 이다.  $\alpha$ 의 값의 개수가 4가 되도록 하는 모든 실수  $t$ 의 값의 범위가  $n < t < m$ 일 때,  $a+n+m$ 의 값을 구하시오. [4점]

5지선다형

23.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{10x} - 1}{\ln(1+5x)}$ 의 값은? [2점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

24. 곡선  $e^{x^2y} - e^x + y^2 - 1 = 0$  위의 점 (1, 1) 에서의 접선의 기울기는? [3점]

- ①  $-\frac{e}{e+2}$     ②  $-\frac{e}{e+1}$     ③ 1      ④  $\frac{e}{e+1}$     ⑤  $\frac{e}{e+2}$

25.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 \times e^{\frac{1}{2n}} + 2 \times e^{\frac{2}{2n}} + 3 \times e^{\frac{3}{2n}} + \dots + n \times e^{\frac{n}{2n}})$ 의 값은?

[3점]

- ①  $4 + e^{\frac{1}{2}}$     ②  $4 + 2e^{\frac{1}{2}}$     ③  $4 - 2e^{\frac{1}{2}}$     ④  $4 + 4e^{\frac{1}{2}}$     ⑤  $4 - 4e^{\frac{1}{2}}$

26. 등비수열  $\{a_n\}$ 이

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n} = 80, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n a_{n+1} = 16a_1$$

을 만족시킨다.  $a_2$ 의 값이 정수일 때,  $a_3$ 의 값은? [3점]

- ① 4    ② 6    ③ 8    ④ 10    ⑤ 12

27.  $x > 0$ 에서 이계도함수가 연속인 함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $f(3) = 9, f'(3) = 3$

(나) 구간  $(0, \infty)$ 에서  $xf'(x) = f(x) + x^2f''(x)$ 이다.

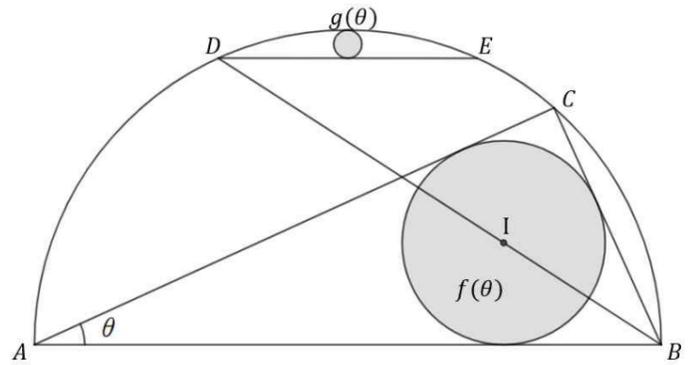
$\int_4^8 f(x)dx$ 의 값은? [3점]

- ① 24      ② 36      ③ 48      ④ 60      ⑤ 72

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분  $AB$ 를 지름으로 하는 반원이 있다. 호  $AB$  위에 점  $C$ 를  $\angle CAB = \theta$ 가 되도록 잡는다.

삼각형  $ABC$ 에 내접하는 원의 중심을  $I$ 라 하고 직선  $BI$ 가 호  $AB$ 와 만나는 점 중  $B$ 가 아닌 점을  $D$ 라 하자. 점  $D$ 를 지나고 선분  $AB$ 에 평행한 직선이 호  $BD$ 와 만나는 점을  $E$ 라 하자. 삼각형  $ABC$ 에 내접하는 원의 넓이를  $f(\theta)$ , 호  $DE$ 와 선분  $DE$ 에 동시에 접하는 원의 넓이를  $g(\theta)$ 라 할 때,

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$ 의 값은? [4점]



[4점]

- ①  $\frac{1}{32}$       ②  $\frac{1}{16}$       ③  $\frac{1}{8}$       ④  $\frac{1}{4}$       ⑤  $\frac{1}{2}$

단답형

29.  $a > b$ 를 만족하는 두 양의 상수  $a, b$ 에 대하여 실수 전체 집합에서 정의된 함수  $f(x)$ 가 구간  $[0, 2)$ 에서

$$f(x) = \begin{cases} ax & (0 \leq x < 1) \\ -bx + a + b & (1 \leq x < 2) \end{cases}$$

이고 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x+2) = f(x) + a - b$ 이다.

어떤 실수  $n$ 에 대하여 함수  $g(x) = (f(x) - n) \times e^{-\frac{(f(x)-n)^2}{8}}$  와 함수  $g(x)$ 의 최대값  $L$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식  $|g(x)| = L$ 의 서로 다른 실근의 개수는 6이고, 정수  $m$ 에 대하여  $|g(m)| = L$ 을 만족시키는  $m$ 의 값의 개수는 4이다.
- (나) 구간  $[t, t+2)$ 에서 함수  $g(x)$ 가  $x = k$ 에서 극값을 갖도록 하는  $k$ 의 개수를  $h(k)$ 라 할 때, 함수  $h(k)$ 가  $k = p$ 에서 불연속이 되도록 하는  $p$ 의 값의 개수는 2이다.

$a + b$ 의 값을 구하십시오. [4점]

30.  $f(-2) = 1$ 이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 와 직선  $5x + t$ 가 만나는 모든 점의  $x$ 좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을  $a_{t_1}, a_{t_2}, \dots, a_{t_m}$  ( $t_m$ 은 자연수)라 할 때,

함수  $g(t) = \sum_{k=1}^{t_m} |a_{t_k}|$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식  $g(t) = c$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이기 위한  $c$ 의 값의 범위는  $6 \leq c < 10$ 이다.
- (나) 함수  $g(t)$ 는 오직  $t = n$ 에서만 불연속이다.

양의 실수  $\alpha$ 에 대하여  $f''(\alpha) = 0$ 일 때,  $g'(36) = -\frac{q}{p}$ 이다.

$p + q$ 의 값을 구하십시오. (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

\* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인 하시오.