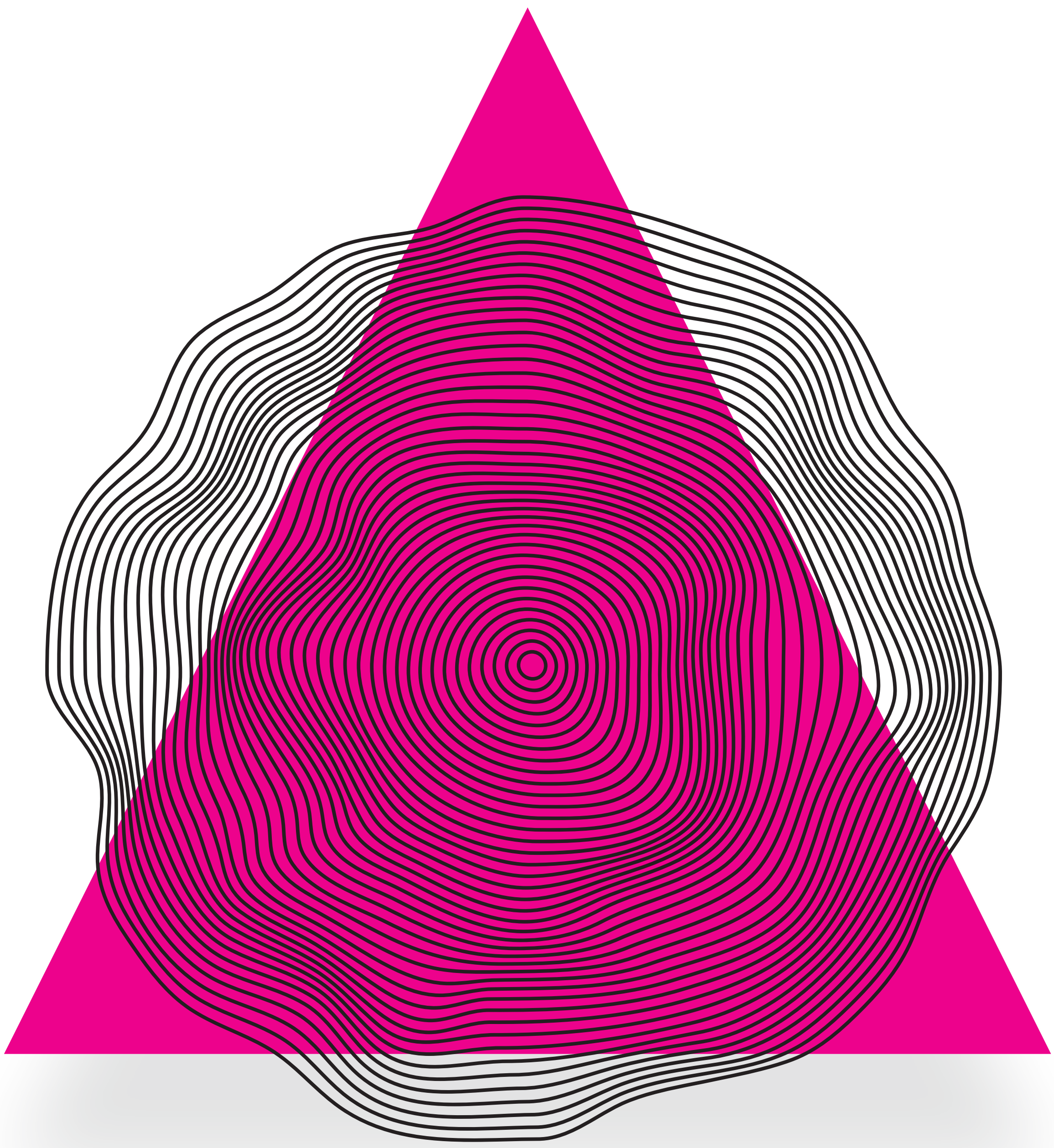
기출의_ 파급효과



smart is sexy
Orbi.kr

기출의 파급효과

수학영역 × 수학Ⅰ × EXTENSION

수학 I
EXTENSION
기출의 파급효과

수학 I

저자의 말

안녕하세요. 오르비 파급효과입니다. 집필한 지 4년째네요. EBS 선별, 기출의 파급효과 시리즈를 통해 큰 사랑을 받았습니다. 여기까지 오는데 너무 과분한 사랑을 주신 분들 너무 감사합니다. 이제 본격적으로 교재 소개를 해보겠습니다.

저는 다음과 같은 교재를 만들었습니다.

1. 기출의 파급효과 standard에는 수학Ⅰ 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

각 Chapter를 나누는 기준이 교과서 목차가 아닌 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구입니다. 기존 개념서들보다 훨씬 얇습니다. 빠르게 실전 개념을 정리할 수 있습니다. 예제 해설까지 꼼꼼히 읽는다면 준킬러, 킬러 문제에서 생각의 틀이 확실히 잡힐 것입니다. 각 Chapter를 '순서대로' 학습하신다면 더욱 큰 학습효과를 기대할 수 있습니다.

2. 최중요 준킬러 이상급의 기출을 기출의 파급효과 standard 칼럼 예제로 들어 칼럼에서 배운 태도와 도구를 바로 활용할 수 있도록 하였습니다.

수학Ⅰ 기출 중 킬러는 물론 오답률이 높은 문제들을 예제로 들었습니다. 본문 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

예제로 든 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예제들을 '순서대로' 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 기출의 진화과정을 느낀다면 자연스럽게 기출에 대한 태도와 도구들이 정리됩니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

예전 킬러 문제에 쓰였던 아이디어 2개 이상이 현재의 준킬러, 킬러에 쓰입니다. 수능 때 킬러를 풀 생각이 없어 과거의 킬러를 제대로 학습하지 않는 우를 범한다면 준킬러도 못 풀거나 빨리 풀기 힘듭니다. 따라서 태도와 도구를 기반으로 한 기출의 킬러 학습은 필수입니다.

3. 평가원 문항뿐만 아니라 교육청, 사관학교 문항도 중요한 기출들입니다.

교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 매년 빠르게 발전하는 수능을 대비하기에는 부족합니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다.

이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다.
기출의 파급효과 standard에는 평가원, 교육청, 사관학교 기출 중 가장 핵심이 되는 142문제를 담았습니다.

4. 예제 해설과 유제 해설은 문제를 푸는데에 있어 필요한 생각의 흐름을 매우 자세하게 담았습니다.

예제 해설과 유제 해설은 단계별로 분리되어 있어 이해가 더욱 쉽습니다. 문제에서 필요한 태도와 도구들을 어떻게 쓰는지 과외처럼 매우 자세히 알려줍니다.

5. 더 많은 좋은 기출을 풀어보고 싶은 학생들을 위하여 기출의 파급효과 extension도 준비하였습니다.

기출의 파급효과 extension은 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 위해 예제보다는 다소 쉬운 유제 224문제로 구성되어 있습니다. extension의 유제는 연도순으로 배치되어있습니다.

standard와의 호환성을 위하여 extension에 담긴 기출 역시 standard의 목차를 따릅니다. **standard를 학습한 학생들이라면 extension을 워크북처럼 이용하시면 됩니다. standard 학습을 하면서 extension도 병행한다면 효과도 배가 될 것입니다.** standard를 잘 학습하셨다면 extension에 담긴 기출도 무리 없이 풀릴 겁니다.

standard를 학습하고 더 이상의 기출보단 n제로 학습하길 희망하는 학생들은 n제로 넘어가셔도 좋습니다. standard로 정말 중요한 기출을 거의 다 본 것이나 마찬가지이기 때문입니다.

짧거나 쉬운 Chapter는 2~3일을 잡으시고 길거나 어려운 Chapter는 6~7일 정도를 잡으시면 됩니다.
이를 따른다면 교재를 빠르면 한 달 내로 늦어도 두 달 내로 완료할 수 있을 것입니다.

개념을 한 번 떼고 쉬운 3~4점 n제(쎈 등)를 완료한 후 혼자 힘으로 할 수 있는 만큼 기출을 한 번 정도 열심히 풀고 기출의 파급효과를 시작하면 효과가 좋을 것입니다.

9월 평가원을 응시하기 전에 standard와 extension을 '제대로' 1회독을 완료하기만 해도 실력이 부쩍 늘어나 있을 것입니다. 9월 평가원 이후 수능 전까지는 기출의 파급효과에서 잘 안 풀렸던 기출 위주로 다시 풀며 끊임없이 실전 모의고사로 실전 연습을 한다면 수능 때도 분명 좋은 결과가 있을 것입니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

Chapter

05

수열

유제

01 05학년도 예비시행 나형 16번

한 은행은 고객으로부터 100만원을 연이율 5%의 5년 만기 정기예금으로 받으면, 그 중에서 90만원을 연이율 r%로 5년 동안 대출하고 나머지 10만원은 예비비로 보관한다. 5년 후 은행은 대출금을 이자와 함께 회수하고 고객에게 정기예금을 이자와 함께 지불하여 20만원의 수익을 얻으려고 한다. 이때, 대출 이율 r를 구하는 식은? (단, 모든 이자는 1년마다의 복리로 계산한다.) [4점]

① $10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5-9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5=10^5$

② $10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5-9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5=2\times10^5$

③ $10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5-9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5=3\times10^5$

④ $9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5-10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5=10^5$

⑤ $9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5-10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5=2\times10^5$

02 05학년도 예비시행 나형 27번

<보기>의 함수 중에서 그 그래프 위의 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(a, p)$, $\mathrm{B}(b, q)$, $\mathrm{C}(c, r)$를 선택하되, x좌표 a, b, c는 차례로 등차수열을 이루고 y좌표 p, q, r는 차례로 등비수열을 이루게 할 수 있는 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(x)=x$

ㄴ. $g(x)=\frac{1}{x}$

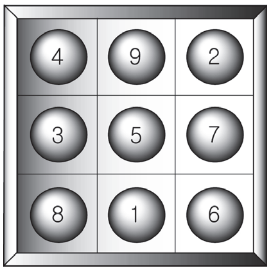
ㄷ. $h(x)=2^x$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

03 04년 4월 교육청 나형 11번

1 부터 9 까지 번호가 적힌 9 개의 공이 있다. 아래 그림과 같이 가로, 세로, 대각선 방향에 놓여 있는 공에 적힌 수들의 합이 각각 15 가 되도록 3×3 격자판 위에 빈칸 없이 공을 배열하였다.



위와 같은 방법으로 5 부터 40 까지 번호가 적힌 36 개의 공을 가로, 세로, 대각선 방향에 놓여 있는 공에 적힌 수들의 합이 각각 m 이 되도록 $n\times n$ 격자판 위에 빈칸 없이 모두 배열할 때, $m+n$ 의 값은? [4점]

① 137　② 139　③ 141
④ 143　⑤ 145

04 05학년도 6월 평가원 나형 14번

함수 $f(x)=\log_4 x$ 일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 양수 x 에 대하여 $f\left(\dfrac{x}{4}\right)=f(x)+1$ 이다.
ㄴ. 수열 $\{f(2^n)\}$ 은 등차수열이다.
ㄷ. $x>1$일 때, $f(f(x))>0$ 이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

05 05학년도 9월 평가원 나형 14번

일반항이 $a_n=2^{1-n}$ 인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,
<보기>에서 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

<보 기>

ㄱ. 수열 $\{\log a_n\}$은 등차수열이다.
ㄴ. 수열 $\{S_n+a_n\}$은 등비수열이다.
ㄷ. $S_n=\dfrac{1}{2}a_{n+1}+2$ 가 성립한다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

06 05년 4월 교육청 나형 30번

다음과 같이 1, 3, 5, 7, 9를 규칙적으로 나열했을 때, 제20행에 나열된 수들의 합을 구하시오. [4점]

제1행				1			
제2행			3	5	7		
제3행		9	1	3	5	7	
제4행	9	1	3	5	7	9	1
⋮	⋮						

07 06년 3월 교육청 나형 14번

그림과 같이 좌표축 위의 다섯 개의 점

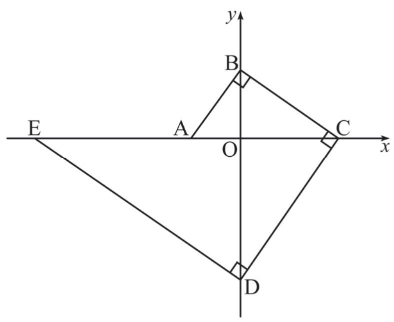
A, B, C, D, E 에 대하여

$\overline{AB}\perp\overline{BC}$, $\overline{BC}\perp\overline{CD}$, $\overline{CD}\perp\overline{DE}$ 가 성립한다.

세 선분 AO, OC, EA 의 길이가 이 순서대로

등차수열을 이룰 때, 직선 AB 의 기울기는?

(단, O 는 원점이고 $\overline{OA} < \overline{OB}$ 이다.) [4점]



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2

④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

08 07학년도 6월 평가원 나형 14번

다음은 어느 회사의 연봉에 관한 규정이다.

> (가) 입사 첫째 해 연봉은 a 원이고, 입사 19년째 해까지의 연봉은 해마다 직전 연봉에서 8% 씩 인상된다.
>
> (나) 입사 20년째 해부터의 연봉은 입사 19년째 해 연봉의 $\frac{2}{3}$ 로 한다.

이 회사에 입사한 사람이 28년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합은? (단, $1.08^{18}=4$로 계산한다.) [4점]

① $\frac{101}{2}a$ ② $\frac{111}{2}a$ ③ $\frac{121}{2}a$

④ $\frac{131}{2}a$ ⑤ $\frac{141}{2}a$

09 07학년도 6월 평가원 나형 17번

두 수열 a_n, b_n 에 대하여

$$b_n = \frac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n} \quad (n \ge 1)$$

이 성립한다. 다음은 $\{a_n\}$이 등차수열이기 위한 필요충분조건은 $\{b_n\}$이 등차수열임을 증명하는 과정이다.

> <증명>
>
> 수열 $\{a_n\}$을 첫째항 a, 공차 d 인 등차수열이라 하면,
>
> $$b_n = \frac{a+2(a+d)+3(a+2d)+\cdots+n\{a+(n-1)d\}}{1+2+\cdots+n}$$
>
> $$= \frac{a(1+2+\cdots+n)+d\{2+3\cdot 2+\cdots+n\cdot(n-1)\}}{1+2+\cdots+n}$$
>
> $$= a+\frac{2d\left\{\boxed{\text{(나)}}-\frac{n(n+1)}{2}\right\}}{n(n+1)}$$
>
> $$= a+\boxed{\text{(가)}}\cdot(n-1)$$
>
> 이므로 $\{b_n\}$은 공차가 $\boxed{\text{(나)}}$ 인 등차수열이다.
>
> 역으로 $\{b_n\}$을 등차수열이라 하면,
>
> $$b_{n+1} = \frac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+(n+1)}+\frac{(n+1)a_{n+1}}{1+2+\cdots+(n+1)}$$
>
> $$= \boxed{\text{(다)}}\cdot b_n+\frac{2}{n+2}a_{n+1}$$
>
> ⋮
>
> 이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\frac{2}{3}d$	$\frac{n}{n+2}$
②	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\frac{2}{3}d$	$\frac{n-1}{n+2}$
③	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$	$\frac{3}{2}d$	$\frac{n}{n+2}$
④	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$	$\frac{2}{3}d$	$\frac{n}{n+2}$
⑤	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$	$\frac{3}{2}d$	$\frac{n+1}{n+2}$

10 07학년도 9월 평가원 나형 11번

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=0$, $a_n+a_{n+1}=n$을 만족시킨다.

다음은 두 자연수 m, n에 대하여 $\sum_{k=n-m+1}^{n+m} a_k$ 의

값을 구하는 과정이다. (단, $m<n$이다.)

$$\sum_{k=n-m+1}^{n+m} a_k$$
$$=a_{n-m+1}+a_{n-m+2}+\cdots+a_{n+m-1}+a_{n+m}$$
$$=(n-m+1)+(n-m+3)+\cdots+(n+m-3)$$
$$+(\boxed{(가)})$$
$$=\frac{(\boxed{(나)})\{(n-m+1)+(\boxed{(가)})\}}{2}$$
$$=\boxed{(다)}$$

위 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$n+m-1$	m	mn
②	$n+m-1$	m	n^2
③	$n+m-1$	n	n^2
④	$n+m$	$m-1$	mn
⑤	$n+m$	$n-1$	n^2

11 07학년도 수능 나형 22번

첫째항이 0이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이 $a_{n+1}b_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$를 만족시킬 때, b_{27}의 값을 구하시오. [4점]

12 07년 3월 교육청 나형 14번

a, b, c가 서로 다른 세 실수일 때, 이차함수 $f(x)=ax^2+2bx+c$에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. a, b, c가 이 순서로 등차수열을 이루면 $f(1)=4b$이다.

ㄴ. a, b, c가 이 순서로 등차수열을 이루면 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

ㄷ. a, b, c가 이 순서로 등비수열을 이루면 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13 07년 3월 교육청 나형 22번

n개의 항으로 이루어진 등차수열 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n이 다음 조건을 만족한다.

(가) 처음 4개 항의 합은 26이다.
(나) 마지막 4개 항의 합은 134이다.
(다) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=260$

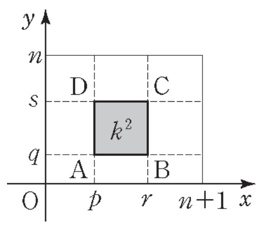
이때 n의 값을 구하시오. [4점]

14 09학년도 6월 평가원 나형 12번

자연수 n과 $0 \le p < r \le n+1$, $0 \le q < s \le n$을 만족시키는 네 정수 p, q, r, s에 대하여 좌표평면에서 네 점 $\mathrm{A}(p,\ q)$, $\mathrm{B}(r,\ q)$, $\mathrm{C}(r,\ s)$, $\mathrm{D}(p,\ s)$를 꼭짓점으로 하고 넓이가 k^2인 정사각형의 개수를 a_k라고 하자. 다음은 $\sum_{k=1}^{n} a_k$의 값을 구하는 과정이다.

(단, k는 n 이하의 자연수이다.)

그림과 같이 넓이가 k^2인 정사각형 ABCD를 만들 때, 두 점 A, B의 y좌표가 주어지면 x좌표의 차가 $r-p=k$인 변 AB를 택하는 경우의 수는 $\boxed{\text{(가)}}$이다.



또 두 점 A, D의 x좌표가 주어지면 y좌표의 차가 $s-q=k$인 변 AD를 택하는 경우의 수는 $\boxed{\text{(나)}}$이다.

따라서 $a_k = (n+1)(n+2) - (2n+3)k + k^2$ 이다. 그러므로

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \{(n+1)(n+2) - (2n+3)k + k^2\}$$

$= \boxed{\text{(다)}}$

(가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$n-k+1$	$n-k+2$	$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$
②	$n-k+2$	$n-k+1$	$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$
③	$n-k+1$	$n-k+2$	$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
④	$n-k+2$	$n-k+1$	$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
⑤	$n-k+1$	$n-k+2$	$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{2}$

15 09학년도 6월 평가원 나형 28번

자연수 n의 모든 양의 약수를 a_1, a_2, $\cdots$, a_k라 할 때,

$$x_n = (-1)^{a_1} + (-1)^{a_2} + \cdots + (-1)^{a_k}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x_8 = 2$

ㄴ. 자연수 m에 대하여 $n = 3^m$이면 $x_n = -m+1$이다.

ㄷ. 자연수 m에 대하여 $n = 10^m$이면 $x_n = m^2 - 1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16 09학년도 9월 평가원 나형 10번

자연수 n에 대하여 함수 $y = 2^{x+n}$의 그래프가 함수 $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$의 그래프와 만나는 점을 P_n이라 하자. 점 P_n의 x좌표를 a_n, y좌표를 b_n이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

ㄴ. 임의의 자연수 m, n에 대하여 $b_m b_n = b_{m+n}$이다.

ㄷ. $2b_n < b_{n+1}$을 만족하는 자연수 n이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

CHAPTER

05 해설

01 05학년도 예비시행 나형 16번

답 : ④

(예비비 10만원+연이율 $r\%$로 5년 동안 대출해준 90만원의 원리합계)$-$(연이율 5%의 5년 만기 정기예금 100만원의 원리합계)$=2\times10^5$

$\left\{10^5+9\times10^5\times\left(1+\frac{r}{100}\right)^5\right\}-10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5=2\times10^5$이므로

$9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5-10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5=10^5$이다.

comment

원리합계 유형은 등비수열의 합을 활용하여 해결하면 된다.

02 05학년도 예비시행 나형 27번

답 : ③

1. (ㄱ)의 경우 서로 다른 세 점은 각각 $\mathrm{A}(a, a)$, $\mathrm{B}(b, b)$, $\mathrm{C}(c, c)$이고 $p=a$, $q=b$, $r=c$이다. a, b, c가 차례로 등차수열을 이룬다고 하자. 그러면 p, q, r도 차례로 등차수열을 이룬다.

   수열 $\{a_n\}$이 등차수열인 동시에 등비수열이려면 $a_n=k$ (k는 상수) 이어야 한다.
   그러나 $p\neq q\neq r$이므로 p, q, r은 등차수열이고 등비수열이 아니다. (X)

2. (ㄴ)의 경우 서로 다른 세 점은 $\mathrm{A}\left(a, \frac{1}{a}\right)$, $\mathrm{B}\left(b, \frac{1}{b}\right)$, $\mathrm{C}\left(c, \frac{1}{c}\right)$이고 $p=\frac{1}{a}$, $q=\frac{1}{b}$, $r=\frac{1}{c}$이다.

   만약 p, q, r이 차례로 등비수열을 이루면 $q^2=pr$이어야 한다. p, q, r이 차례로 등비수열을 이룬다고 하자. $\left(\frac{1}{b}\right)^2=\frac{1}{a}\times\frac{1}{c}$, $b^2=ac$ $\cdots$ ㉠

   이때, a, b, c가 차례로 등차수열을 이룬다고 하면 $2b=a+c$이다. $b=\frac{a+c}{2}$를 ㉠에 대입하면

   $\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=ac$, $\frac{a^2+2ac+c^2}{4}=ac$, $a^2-2ac+c^2=0$, $(a-c)^2=0$ $\therefore a=c$

   $a\neq c$이므로 a, b, c가 차례로 등차수열을 이루는 동시에 y좌표 p, q, r이 차례로 등비수열을 이룰

수는 없다. (X)

3. (ㄷ)의 경우 서로 다른 세 점은 $\mathrm{A}(a, 2^a)$, $\mathrm{B}(b, 2^b)$, $\mathrm{C}(c, 2^c)$이고 $p=2^a$, $q=2^b$, $r=2^c$이다.

   a, b, c가 차례로 등차수열을 이룬다고 하면 $2b=a+c$이다.
   p, q, r이 차례로 등비수열을 이룬다고 하면 $q^2=pr$이므로 $2^{2b}=2^a\times 2^c=2^{a+c}$, $2b=a+c$이다.
   즉, a, b, c가 차례로 등차수열을 이루면 동시에 p, q, r은 차례로 등비수열을 이룬다. (O)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

03 04년 4월 교육청 나형 11번

답 : ③

1. 36개의 공을 $n\times n$ 격자판 위에 빈칸 없이 모두 배열하므로 $36=6\times 6=n\times n$에서 $n=6$이다.

2. 가로, 세로, 대각선 방향에 놓여 있는 공에 적힌 수들의 합이 각각 m이 될 때, 격자판 위의 공들의 정확한 배열은 알기 힘들다. 하지만 **m의 값만 구하면 되므로 '공에 적힌 숫자들의 합'을 관찰**하면 된다. 36개의 공에 적힌 숫자들을 모두 더하면

   $$5+6+\cdots+39+40=\frac{36(5+40)}{2}=18\times 45=810$$

   가로 방향에 놓여 있는 공에 적힌 수들의 합이 m이고, 6×6 격자판에는 가로줄이 총 6개 있으므로 $6m=810$이다. $\therefore m=135$

   따라서 $m+n=135+6=141$이다.

comment

교육청 문항이고 풀이도 간단하지만 핵심 아이디어는 매우 중요하다. **'수열의 정확한 항'을 알 수 없을 때는 '수열의 합'을 관찰**해야 한다! **'15년 3월 교육청 A형 30번' 문항**과 같이 학습하자.

04 05학년도 6월 평가원 나형 14번

답 : ②

1. $f\left(\frac{x}{4}\right)=\log_4\frac{x}{4}=\log_4 x-\log_4 4=f(x)-1$ (X)

2. $f(2^n)=\log_4 2^n=n\log_4 2=\frac{n}{2}$

   $f(2^n)$은 n에 관한 일차식이므로 수열 $\{f(2^n)\}$은 등차수열이다. 정확히 말하면 첫째항과 공차가 모두 $\frac{1}{2}$인 등차수열이다. (O)

3. $x>1$일 때 $f(x)>0$이다. 이때, $f(x)=t$라 하면 $t>0$일 때 $f(t)>0$을 따져주면 된다.
$0<t\le 1$일 때 $f(t)\le 0$이므로 $x>1$일 때 항상 $f(f(x))>0$이 아니다. (X)

옳은 것은 ㄴ뿐이다.

※ 선지 (ㄷ)은 부등식 $f(f(x))>0$의 해를 직접 찾아서 풀 수도 있다. $f(x)=t$로 치환하면 $f(t)>0$이다. $f(t)>0$의 해는 $t>1$이다. 치환을 풀어주면 $f(x)>1$이고 $f(x)>1$의 해는 $x>4$이다. 따라서 $x>4$일 때, $f(f(x))>0$이다.

05 05학년도 9월 평가원 나형 14번

답 : ③

$a_1=2^0=1$, $a_2=2^{-1}=\frac{1}{2}$, $a_3=2^{-2}=\frac{1}{4}$, $\cdots$이므로 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다. $\therefore S_n=\dfrac{1\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=2-2^{1-n}$

1. $\log a_n=\log 2^{1-n}=(1-n)\log 2=-(\log 2)n+\log 2$이다. $\log a_n$은 n에 관한 일차식이므로 수열 $\{\log a_n\}$은 등차수열이다. (O)

2. $S_n+a_n=(2-2^{1-n})+(2^{1-n})=2$이므로 수열 $\{S_n+a_n\}$은 등비수열이다. (O)
※ $S_n+a_n=2$이므로 수열 $\{S_n+a_n\}$은 '공비가 1인 등비수열'인 동시에 '공차가 0인 등차수열'이다.

3. $S_n=2-2^{1-n}$, $\frac{1}{2}a_{n+1}+2=\frac{1}{2}\times 2^{-n}+2=2^{-(1+n)}+2$에서
$-2^{1-n}\ne 2^{-(1+n)}$이므로 $S_n\ne\frac{1}{2}a_{n+1}+2$이다. (X)

옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

06 05년 4월 교육청 나형 30번

답 : 199

1. 우선, 제20행에 나열된 마지막 수를 구하자. **수열의 합**을 이용하면 된다.
제n행에 나열된 수의 개수는 $2n-1$이므로 제20행까지 나열된 모든 수의 개수는
$\sum_{n=1}^{20}(2n-1)=2\sum_{n=1}^{20}n-\sum_{n=1}^{20}1=2\times\frac{20\times 21}{2}-20=400$이다.

나열된 수들은 $1, 3, 5, 7, 9$가 이 순서대로 반복되므로 **제20행에 나열된 마지막 수, 즉 400번째 수는 9이다.**

2. 제20행에 나열된 수들의 합은 **제20행에 나열된 마지막 수인 9부터 거꾸로 더해나가자.** 제20행의 수들은 **뒤에서부터 거꾸로 나열**하면 $9, 7, 5, 3, 1, 9, 7, 5, 3, 1, \cdots$와 같이 나열된다.

   이때, 제20행에 나열된 수의 개수는 $2 \times 20 - 1 = 39$이므로 제20행에 나열된 수들의 합은
   $(9+7+5+3+1) \times 7 + (9+7+5+3) = 25 \times 7 + 24 = 175 + 24 = 199$

comment

낯선 수열에서 수열의 합을 관찰해야 하는 문항과 그렇지 않은 문항을 잘 비교하고, 수열의 합을 관찰해야 하는 문항은 왜 그래야만 하는지 그 이유를 생각하면서 공부하자.

07 06년 3월 교육청 나형 14번

답 : ①

1. 직선 AB의 기울기와 직선 DC의 기울기가 서로 같고,
   직선 BC의 기울기와 직선 ED의 기울기가 서로 같다는 점을 이용하자.

   (직선 AB의 기울기)=(직선 DC의 기울기)$=m$
   이라 하면 직선 AB와 직선 BC는 서로 직교하므로
   (직선 BC의 기울기)=(직선 ED의 기울기)$=-\dfrac{1}{m}$이다.

2. **점 A의 좌표를 $(-a, 0)(a>0)$이라 하면 직선 AB의 기울기가 $m(m>1)$이므로 점 B의 좌표는 $(0, am)$이다.** ($\overline{\mathrm{OA}} < \overline{\mathrm{OB}}$이므로 $m>1$이다.)

   (직선 BC의 기울기)$=-\dfrac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OC}}}=-\dfrac{am}{\overline{\mathrm{OC}}}=-\dfrac{1}{m}$이므로 $\overline{\mathrm{OC}}=am^2$
   따라서 **점 C의 좌표는** $(am^2, 0)$이다.

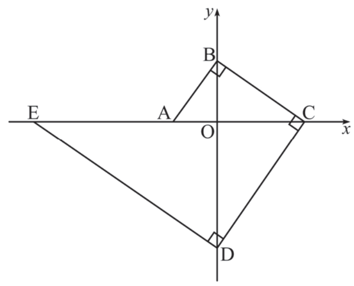
   (직선 DC의 기울기)$=\dfrac{\overline{\mathrm{OD}}}{\overline{\mathrm{OC}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{OD}}}{am^2}=m$이므로 $\overline{\mathrm{OD}}=am^3$
   따라서 **점 D의 좌표는** $(0, -am^3)$이다.

   (직선 ED의 기울기)$=-\dfrac{\overline{\mathrm{OD}}}{\overline{\mathrm{OE}}}=-\dfrac{am^3}{\overline{\mathrm{OE}}}=-\dfrac{1}{m}$이므로 $\overline{\mathrm{OE}}=am^4$
   따라서 **점 E의 좌표는** $(-am^4, 0)$이다.

3. 따라서 세 선분 AO, OC, EA의 길이는 각각 a, am^2, am^4-a이고, 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차중항을 이용하면 $2am^2 = am^4$이다. $a>0$이므로 양변을 a로 나누면
   $2m^2 = m^4$, $m^4 - 2m^2 = 0$, $m^2(m^2-2) = 0$, $m^2(m+\sqrt{2})(m-\sqrt{2}) = 0$
   $m>1$이므로 $m=\sqrt{2}$이다.

※ **다른 풀이 1: 삼각형의 닮음**

점 A의 좌표를 $(-a, 0)(a>0)$이라 하면 직선 AB의 기울기가 $m(m>1)$이므로 점 B의 좌표는 $(0, am)$이다. 네 삼각형 AOB, BOC, COD, DOE는 모두 서로 닮음이다.



$(\overline{\mathrm{OB}})^2=\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OC}}$, $a^2m^2=a\times\overline{\mathrm{OC}}$이므로 $\overline{\mathrm{OC}}=am^2$

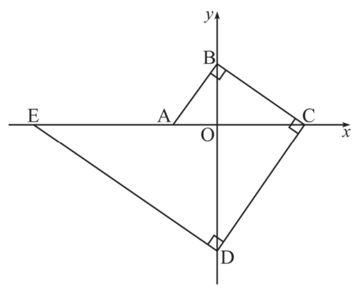
$(\overline{\mathrm{OC}})^2=\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OD}}$, $a^2m^4=am\times\overline{\mathrm{OD}}$이므로 $\overline{\mathrm{OD}}=am^3$

$(\overline{\mathrm{OD}})^2=\overline{\mathrm{OC}}\times\overline{\mathrm{OE}}$, $a^2m^6=am^2\times\overline{\mathrm{OE}}$이므로 $\overline{\mathrm{OE}}=am^4$

이후 풀이는 동일하다. 또한, **삼각함수를 이용해서 풀 수도 있다.**

※ **다른 풀이 2: 삼각함수**

$\overline{\mathrm{OA}}=k$, $\angle\mathrm{OAB}=\theta$라 하면 직선 AB의 기울기는 $\tan\theta$이다.



$\overline{\mathrm{OB}}=k\tan\theta$, $\overline{\mathrm{OC}}=k\tan^2\theta$

$\overline{\mathrm{OD}}=k\tan^3\theta$, $\overline{\mathrm{OE}}=k\tan^4\theta$ (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$)

따라서 세 선분 AO, OC, EA 의 길이는 각각

$k, k\tan^2\theta, k(\tan^4\theta-1)$이고, 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차중항을 이용하면

$2k\tan^2\theta=k\tan^4\theta$이다.

$2=\tan^2\theta$이므로 $\tan\theta=\sqrt{2}$이다. $(\because \tan\theta>0)$

따라서 직선 AB의 기울기는 $\sqrt{2}$이다.

08 07학년도 6월 평가원 나형 14번

답 : ④

1. 입사 첫째 해 연봉은 a원이고, 입사 19년째 해까지의 연봉은 해마다 직전 연봉에서 8%씩 인상된다.
또한 입사 20년째 해부터의 연봉은 입사 19년째 해 연봉의 $\dfrac{2}{3}$이다.

(입사 후 18년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합)

$=a+a(1.08)+a(1.08)^2+\cdots+a(1.08)^{17}$

입사 19년째 해의 연봉이 $a(1.08)^{18}$이므로

(입사 후 19년째 해부터 28년째 해까지 10년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합)

$=a(1.08)^{18}+a(1.08)^{18}\times\dfrac{2}{3}\times 9$

2. 따라서 회사에 입사한 사람이 28년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합은
$a+a(1.08)+a(1.08)^2+\cdots+a(1.08)^{17}+7a(1.08)^{18}$

$$=\frac{a\{(1.08)^{18}-1\}}{1.08-1}+7a(1.08)^{18}=\frac{3}{0.08}a+28a \quad (\because 1.08^{18}=4)$$

$$=\frac{75}{2}a+28a=\frac{75+56}{2}a=\frac{131}{2}a$$

comment

$1.08^{18}=4$를 본 다음, 회사에 입사한 사람이 28년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합을 식으로 나타낼 때 1.08^{18}**을 이용하기 쉽도록 식을 작성해야겠다고 의식**해야 한다. 어느 항까지 등비수열의 합으로 표현하느냐에 따라 식의 세부적인 형태가 변하지만, $=\frac{a\{(1.08)^{18}-1\}}{1.08-1}+7a(1.08)^{18}$이 계산하기 쉬운 형태이긴 하다.

09 07학년도 6월 평가원 나형 17번

답 : ①

1. $\frac{a(1+2+\cdots+n)+d\{2+3\times2+\cdots+n(n-1)\}}{1+2+\cdots+n}=a+\frac{2d\left\{(\text{가})-\frac{n(n+1)}{2}\right\}}{n(n+1)}$에서

$$(\text{좌변})=\frac{a(1+2+\cdots+n)+d\{2+3\times2+\cdots+n(n-1)\}}{1+2+\cdots+n}$$

$$=a+\frac{d\{2+3\times2+\ \cdots\ +n(n-1)\}}{1+2+\ \cdots\ +n}$$

$$=a+$$

$$\frac{d\left\{\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\right\}}{\frac{n(n+1)}{2}}=a+\frac{2d\left(\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k\right)}{n(n+1)}=a+\frac{2d\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right\}}{n(n+1)}$$

이므로 **(가)는** $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **이다.**

2. $a+\frac{2d\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right\}}{n(n+1)}=a+(\text{나})\cdot(n-1)$에서

$$(\text{좌변})=a+\frac{2d\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right\}}{n(n+1)}$$

$=a+2d\left(\frac{2n+1}{6}-\frac{1}{2}\right)=a+2d\left(\frac{2n-2}{6}\right)=a+\frac{2d}{3}\cdot(n-1)$이므로 **(나)는** $\frac{2d}{3}$ **이다.**

3. $\dfrac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+(n+1)}+\dfrac{(n+1)a_{n+1}}{1+2+\cdots+(n+1)}=(\text{다})\cdot b_n+\dfrac{2}{n+2}a_{n+1}$에서

$\dfrac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+(n+1)}=(\text{다})\cdot b_n$이다.

구해야 할 것은 **(다)이므로 양변을 b_n으로 나누면**

$(\text{다})=\dfrac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+(n+1)}\times\dfrac{1}{b_n}$이다. ($\because b_n\neq 0$)

이때, $b_n=\dfrac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$이므로

$(\text{다})=\dfrac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+(n+1)}\times\dfrac{1+2+\cdots+n}{a_1+2a_2+3a_3+\cdots\ na_n}$

$(\text{다})=\dfrac{1+2+\cdots+n}{1+2+\cdots+(n+1)}=\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}=\dfrac{n}{n+2}$이므로 **(다)는** $\dfrac{n}{n+2}$**이다.**

10 07학년도 9월 평가원 나형 11번

답 : ①

1. $\displaystyle\sum_{k=n-m+1}^{n+m}a_k=a_{n-m+1}+a_{n-m+2}+\ \cdots\ +a_{n+m-1}+a_{n+m}$

$=(n-m+1)+(n-m+3)+\cdots+(n+m-3)+(\boxed{\text{(가)}})$에서

$a_n+a_{n+1}=n$ 이므로

$a_{n-m+1}+a_{n-m+2}=n-m+1$

$a_{n-m+3}+a_{n-m+4}=n-m+3$

$\vdots$

$a_{n+m-3}+a_{n+m-2}=n+m-3$

$a_{n+m-1}+a_{n+m}=n+m-1=\boxed{\text{(가)}}$

(가)는 $n+m-1$**이다.**

2. $(n-m+1)+(n-m+3)+\cdots+(n+m-3)+(n+m-1)$

$=\dfrac{(\boxed{\text{(나)}})\{(n-m+1)+(\boxed{\text{(가)}})\}}{2}$에서

(좌변)$=(n-m+1)+(n-m+3)+\cdots+(n+m-3)+(n+m-1)$은 첫째항이 $(n-m+1)$**이고 공차가** 2**인 등차수열의** $(n-m+1)$**부터** $(n+m-1)$**까지의 합이다.** $\dfrac{n(a+l)}{2}$ **공식**을 이용하자.

$(n+m-1)$이 위 등차수열의 제k항이라 하면 $n-m+1+2(k-1)=n+m-1$에서 $2k=2m$, $k=m$이다. **따라서 $(n+m-1)$은 위 등차수열의 제m항이다.**

$\therefore (n-m+1)+(n-m+3)+\cdots+(n+m-3)+(n+m-1)$

$$=\frac{(m-1)\{(n-m+1)+(n+m-1)\}}{2}$$

따라서 **(나)는 m이다.**

3. $\dfrac{m\{(n-m+1)+(n+m-1)\}}{2}=\dfrac{m\times 2n}{2}=mn$이므로 **(다)는 mn이다.**

11 07학년도 수능 나형 22번

답 : 13

$\{a_n\}$은 첫째항이 0이고 공차가 0이 아닌 등차수열이므로 공차를 d라 하면

$a_{n+1}=nd$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{n(n-1)d}{2}$이다.

이를 $a_{n+1}b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$에 대입하면 $ndb_n=\dfrac{n(n-1)d}{2}$

$d\neq 0$, $n>0$이므로 양변을 nd로 나누면 $b_n=\dfrac{n-1}{2}$이다.

$\therefore b_{27}=\dfrac{26}{2}=13$

※ 위의 풀이에서는 등차수열과 등차수열의 합의 일반항을 이용하여 답을 구했다. 그런데 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k=S_n$이라 하면 $a_{n+1}b_n=S_n$이다. 하나의 식이 S_n과 a_{n+1}을 동시에 포함하고 있으므로 **수열의 합과 일반항 사이의 관계인 $S_n-S_{n-1}=a_n\,(n\geq 2)$을 이용해서 풀 수는 없을까?**

$a_{n+1}b_n=S_n$ … ㉠ $\qquad$ $a_nb_{n-1}=S_{n-1}\,(n\geq 2)$ … ㉡

㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면 $a_{n+1}b_n-a_nb_{n-1}=a_n\,(n\geq 2)$이다.

$a_{n+1}=dn$, $a_n=d(n-1)$이므로 이를 $a_{n+1}b_n-a_nb_{n-1}=a_n\,(n\geq 2)$에 대입하면

$dnb_n-d(n-1)b_{n-1}=d(n-1)\,(n\geq 2)$, $d>0$이므로 양변을 d로 나누면

$nb_b-(n-1)b_{n-1}=n-1\,(n\geq 2)$이다. n 자리에 $2, 3, \cdots, n-1$을 대입하면

$2b_2-b_1=1$

$3b_3-2b_2=2$

$4b_4-3b_3=3$

$\vdots$

$nb_b-(n-1)b_{n-1}=n-1$

위의 등식들을 변끼리 모두 더하면 $nb_n - b_1 = \dfrac{(n-1)n}{2}\ (n \geq 2)$이다.

$a_{n+1}b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$에서 $a_2 b_1 = a_1 = 0$이다. 이때, $a_2 > 0$이므로 $b_1 = 0$이다.

$\therefore\ nb_n = \dfrac{(n-1)n}{2}$, $b_n = \dfrac{n-1}{2}\ (n \geq 1)$이므로 $b_{27} = \dfrac{26}{2} = 13$

12 07년 3월 교육청 나형 14번

답 : ③

1. $a,\ b,\ c$가 이 순서로 등차수열을 이루므로 $2b = a + c$이다. $f(1) = a + 2b + c = 4b$ (O)

2. $a,\ b,\ c$가 이 순서로 등차수열을 이루므로 $2b = a + c$이다. '$y = f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.'는 '방정식 $f(x) = 0$이 서로 다른 두 실근을 가진다'와 같다.

   방정식 $ax^2 + 2bx + c = 0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식 $D > 0$이어야 한다.
   $\dfrac{D}{4} = b^2 - ac = \left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2 - ac = \dfrac{a^2 - 4ac + c^2}{4} = \left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2$

   a, c는 서로 다른 두 실수이므로 $\dfrac{D}{4} = \left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2 > 0$이다. 따라서 $a,\ b,\ c$가 이 순서로 등차수열을 이루면 $y = f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다. (O)

3. $a,\ b,\ c$가 이 순서로 등비수열을 이루므로 $b^2 = ac$이다.

   $y = f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 방정식 $f(x) = 0$이 실근을 갖지 않아야 하므로 방정식 $ax^2 + 2bx + c = 0$의 판별식 $D < 0$이어야 한다. 그러나 $\dfrac{D}{4} = b^2 - ac = ac - ac = 0$이므로 방정식 $ax^2 + 2bx + c = 0$은 중근을 갖는다. 즉, $y = f(x)$의 그래프는 x축에 접한다. (X)

옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

13 07년 3월 교육청 나형 22번

답 : 13

1. (가)에서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 26$
   (나)에서 $a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 134$
   (다)에서 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2} = \dfrac{n(a_2 + a_{n-1})}{2}$
   $= \dfrac{n(a_3 + a_{n-2})}{2} = \dfrac{n(a_4 + a_{n-3})}{2} = 260$

2. $\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}+\dfrac{n(a_2+a_{n-1})}{2}+\dfrac{n(a_3+a_{n-2})}{2}+\dfrac{n(a_4+a_{n-3})}{2}$

$=\dfrac{n\{(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+(a_4+a_{n-3})\}}{2}$

$=\dfrac{n\{(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n)\}}{2}=\dfrac{n(26+134)}{2}=4\times260$

$80n=4\times260\qquad\therefore n=13$

comment

'처음 4개의 항, 마지막 4개의 항'을 보자마자 합이 같은 네 쌍을 이용하여 (다)의 $\sum_{k=1}^{n}a_k$를 표현해야겠다고 생각해야 한다.

14 09학년도 6월 평가원 나형 12번

답 : ④

1. 점 A의 x좌표 p가 가질 수 있는 가장 작은 값과 가장 큰 값을 구하자.
   p의 가장 작은 값은 0이고, 가장 큰 값은 $n+1-k$이다.

   따라서 가능한 p의 값의 개수는 $0\le p\le n+1-k$인 정수 p의 개수이므로 $n-k+2$이다. 따라서 두 점 $\mathrm{A,B}$의 y좌표가 주어지면 x좌표의 차가 $r-p=k$인 변 AB를 택하는 경우의 수 또한 $n-k+2$이므로 **(가)는 $n-k+2$이다.**

2. (나)도 1과 같이 구하면 된다.
   점 A의 y좌표 q가 가질 수 있는 가장 작은 값과 가장 큰 값을 구하자.
   p의 가장 작은 값은 0이고, 가장 큰 값은 $n-k$이다.

   따라서 가능한 q의 값의 개수는 $0\le q\le n-k$인 정수 p의 개수이므로 $n-k+1$이다. 따라서 두 점 $\mathrm{A,D}$의 x좌표가 주어지면 y좌표의 차가 $s-q=k$인 변 AD를 택하는 경우의 수 또한 $n-k+1$이므로 **(나)는 $n-k+1$이다.**

3. $\sum_{k=1}^{n}\{(n+1)(n+2)-(2n+3)k+k^2\}$

   $=\sum_{k=1}^{n}(n+1)(n+2)-(2n+3)\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}k^2$

   $=n(n+1)(n+2)-(2n+3)\times\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   $=\dfrac{n(n+1)}{6}\{6(n+2)-3(2n+3)+(2n+1)\}$

   $=\dfrac{n(n+1)}{6}(2n+4)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$이므로 **(다)는 $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$이다.**