9. 좌표평면에서 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 회전하는 회전변환을 f, 직선 $y=x$에 대한 대칭변환을 g라 하자. 합성변환 $g^{-1}\circ f\circ g$에 의하여 직선 $x+2y+5=0$이 직선 $ax+by+5=0$으로 옮겨질 때, $a+2b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

*sol*1)

일차변환 $g^{-1}\circ f\circ g$을 나타내는 행렬을 구하면 $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$입니다.

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$의 양 변에 변환행렬의 역행렬을 곱하면

$x=\frac{1}{2}(x'-\sqrt{3}y'),\ y=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x+y)$입니다. 이를 $x+2y+5=0$에 대입하면

$\frac{1}{2}(x'-\sqrt{3}y'+2\sqrt{3}x'+2y')+5=0$이고, 상수항을 유지한 채 x', y'의 계수를 구하면

$a=\frac{1+2\sqrt{3}}{2},\ b=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$임을 알 수 있습니다. $\therefore a+2b=\frac{5}{2}$

*sol*2)

위에서 구한 변환행렬은 원점을 중심으로 $-\frac{\pi}{3}$회전하는 회전변환을 나타내는 행렬입니다.
중심이 원점인 회전변환에 의해서는 원점과 직선 사이의 거리가 변하지 않으므로
점과 직선 사이의 공식으로부터 $a^2+b^2=5$입니다.
또, 두 직선의 법선벡터인 $(1,2), (a,b)$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$혹은 $\frac{2\pi}{3}$ 입니다. (두 벡터의 방향을 정확하게 알 수 없기 때문에 사잇각이 $\frac{\pi}{3}$이라고 할 수는 없습니다.)
두 벡터의 크기와 사잇각을 모두 알고 있으므로 이를 내적에 관한 식으로 나타내면

$\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\left(\pm\frac{1}{2}\right)=\pm\frac{5}{2}=a+2b$

객관식이고 $-\frac{5}{2}$는 보기에 없으니 실전에서는 여기에서 답인 $\frac{5}{2}$를 찍고 넘어가면 되지만 지금은 답을 완전히 찾아내야겠죠.
우선 $(1,2)$가 x축과 이루는 각은 $\frac{\pi}{3}$보다 큽니다.(tan값으로부터) 이를 바탕으로 그림을 그려보면 회전시킨 직선의 x절편과 y절편은 모두 음수입니다. 따라서 a와 b는 모두 양수.
따라서 $(1,2)$와 (a,b)는 모두 제 1사분면의 점이고 이로부터 두 벡터의 사잇각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$보다 작으니 $\frac{\pi}{3}$임을 알 수 있습니다. 따라서 cos값은 $\frac{1}{2}$이고 문제의 답은 $\frac{5}{2}$가 됩니다.

$sol3)$

직선 위의 평행하지 않은 두 점의 이동으로 옮겨지는 직선의 방정식을 결정할 수 있으므로 두 절편 $(-5,0),\left(0,-\frac{5}{2}\right)$가 옮겨지는 두 점의 좌표를 $ax+by+5=0$에 대입한 후 연립방정식을 풀면 마찬가지로 a,b의 값을 구할 수 있습니다.

21. 함수 $f(x)=kx^2e^{-x}\ (k>0)$과 실수 t에 대하여
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와
y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자.
함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는
k의 최댓값은? [4점]

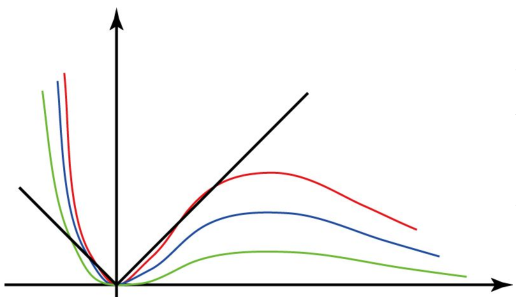
① $\dfrac{1}{e}$ ② $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\dfrac{e}{2}$ ④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

$sol1)$

정의에 따라 $g(t)=\begin{cases}|f(t)| & (|t|>|f(t)|)\\ |t| & (|f(t)|\geq |t|)\end{cases}$입니다.

즉, $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$와 $y=|x|$중 크지않은 값을 갖는 것의
그래프와 일치합니다. ($f(x)\geq 0$이므로 $|f(x)|=f(x)$)

조건식을 그래프에 관한 것으로 해석했으니 우선 $y=f(x)$의 그래프를 그리겠습니다.
$f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, $f(0)=0$
$\left(\lim\limits_{x\to\infty}x^ne^{-x}=0\text{의 증명은 생략하겠습니다.}\right)$



위의 정보를 바탕으로 k값을 변화시켜가며
그래프를 그려보면 k의 값이 커질수록
초록색→빨간색 으로 변해갑니다.
이 때 $f'(0)=0$이고 충분히 큰 x에 대하여 항상
$kx^2e^{-x}>-x$가 되므로 $x<0$인 부분에서는
항상 미분불가능한 부분이 생긴다는 것을
알 수 있습니다.

따라서 $x>0$인 부분에서는 $y=x$와 $y=f(x)$의 교점이 존재하지 않거나, 혹은
교점이 존재하지만 그 교점에서 $y=f(x)$의 접선의 기울기가 1이 되어야만 합니다.

$x>0$인 부분에서 $y=x$와 $y=f(x)$의 그래프가 교점을 가지려면 k가 특정값 이상이 되야함은
위의 그래프에서 충분히 예상할 수 있습니다. 그런데 두 그래프가 서로 다른 두 교점을
가진다면 그 교점에서 두 함수는 서로 교차하게 되므로 미분계수가 같을 수 없고, 따라서
그 점에서 $g(x)$는 미분불가능하게 됩니다. 따라서 $g(x)$를 미분가능하게하는 k가 최댓값을
가질 때에는 두 그래프가 한 점에서 만나며 그 점에서의 미분계수가 일치할 것이라고
생각할 수 있습니다. 접점의 x좌표를 c라고 하고 이 상황을 식으로 표현하면,
$f(c)=c$, $f'(c)=1$입니다. 이를 계산하면,
$kc^2e^{-c}=c \Leftrightarrow kc=e^c$, $k(2c-c^2)e^{-c}=1$
$(2-c)kce^{-c}=2-c=1$
$\therefore c=1, k=e$

$sol2)$

이번엔 직관의 이용을 최대한 배제한 풀이입니다. 물론 이런 경우에도 풀이 방향은 그래프와 직관을 이용해 설계합니다.

$g(t)$의 정의에 의해 $g(t)=\begin{cases}|t| & (|t|>|f(t)|)\\ |f(t)| & (|f(t)|\geq|t|)\end{cases}$인데 $f(x)\geq 0$이므로

$g(t)=\begin{cases}|t| & (|t|>f(t))\\ f(t) & (f(t)\geq|t|)\end{cases}$입니다.

이제 $g(t)$를 알아보기 위해 두 함수
$a(t)=f(t)-(-t)\ (t\leq 0)$, $b(t)=f(t)-t\ (t\geq 0)$를 생각하겠습니다.
그러면 $g(t)$는 $a(t), b(t)$의 부호에 따라
$t<0$에서는 $g(t)=\begin{cases}f(t) & (a(t)<0)\\ -t & (a(t)\geq 0)\end{cases}$, $t\geq 0$에서는 $g(t)=\begin{cases}f(t) & (b(t)<0)\\ t & (b(t)\geq 0)\end{cases}$으로 나타낼 수 있습니다.

먼저 $a(0)=b(0)=0$이고 충분히 작은 $h>0$에 대하여 $a'(-h)>0$, $b'(h)<0$이므로
$a(-h)<0, b(h)>0$입니다. 따라서 0을 포함하는 소구간에서 $g(t)=f(t)$이므로 $g(t)$는
$t=0$에서 미분가능합니다.

이제 $a(t)$의 부호변화를 먼저 보겠습니다.
$a'(x)=k(2x-x^2)e^{-x}+1$, $a''(x)=k(2-2x-2x+x^2)e^{-x}=k(x^2-4x+2)e^{-x}$
$a(0)=0$이고 충분히 작은 양수 h에 대하여 $a'(-h)>0$이므로
적당한 음수 α에 대하여 $a(\alpha)<0$이 성립합니다.
또 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}kxe^{-x}+1=-\infty$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}kx^2e^{-x}+x=\infty$이므로 $a(\beta)>0$인 음수 β가 존재합니다.
$a(x)$는 연속함수이므로 중간값정리를 적용하면 $a(c)=0$을 만족하는 음수 c가 존재함을
알 수 있으며, c의 좌우에서 $a(x)$의 부호가 바뀔 것은 자명합니다.
또, 롤의 정리에 의하여 구간 $(c,0)$에 $a'(d)=0$을 만족하는 d가 존재하고 $c\neq d$이므로
$a'(c)\neq 0$입니다. ($\because x<0$에서 $a''(x)<0$이므로 $a'(x)$는 일대일 함수)

$a(c)=0$인 c는 구간 $(-\infty,d)$에 포함되는데 이 구간에서 $a'(x)<0$이므로 이 구간에 c는
단 하나 존재하고, $(d,0)$에서 $a'(x)>0$, $a(0)=0$이므로 구간 $(d,0)$의 x에 대하여 $a(x)<0$입니다.
따라서 $a(x)=0$의 음의 실근은 $x=c$로 유일하다는 것을 알 수 있습니다.

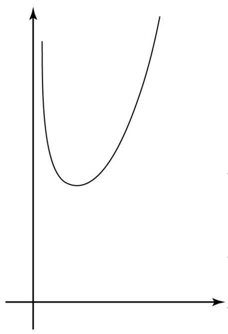
위의 내용에서 $x<0$의 범위에서 $f(c)=-c$인 c가 유일하게 존재하고 $a'(c)\neq 0$이므로 $f'(c)\neq -1$
입니다. 즉, k값에 상관없이 $y=g(t)$의 그래프에는 음수구간에서 항상 미분불가능한 점이
단 하나 존재합니다.

그런데 문제에서 $g(x)$의 미분불가능한 점이 단 하나만 존재하도록 하는 k의 값의 범위를
묻고 있으므로 x가 양수인 범위에서는 $g(x)$의 미분불가능한 점이 존재하지 않도록 해야합니다.

먼저 $b(x)=0$의 0이 아닌 실근이 존재하지 않도록 하는 k의 범위를 생각해보겠습니다.

$b(x)=0 \Leftrightarrow kx^2e^{-x}-x=0$이고 $x \neq 0$이므로 $kxe^{-x}=1,\ k=\dfrac{e^x}{x}$

$\dfrac{d}{dx}\dfrac{e^x}{x}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2},\ \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{e^x}{x}=\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}$이므로 $y=\dfrac{e^x}{x}$의 그래프는 다음처럼 그려집니다.



이 그래프와 상수함수 $y=k$가 교점을 갖지 않기 위해서는 k가 $y=\dfrac{e^x}{x}$의 극솟값인 e보다 작아야 합니다. 따라서 $b(x)=0$이 양수인 실근을 갖지 않기 위한 k의 범위는 $k<e$입니다. $\cdots$ (1)

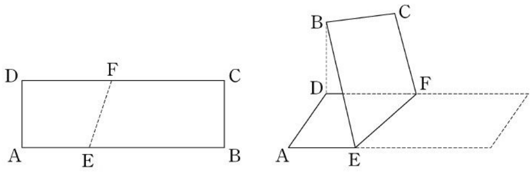
즉, e보다 작은 양수 k는 $g(t)$의 미분불가능점의 갯수가 하나라는 조건을 만족한다고 할 수 있습니다.

다음은 $b(x)=0$의 실근이 존재하지만 그 모든 x에 대하여 $b'(x)=0$인 경우를 생각합시다.
($b'(x)\neq 0$이면 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점에서의 미분계수가 일치하지 않는다는 뜻이므로
$g(t)$는 그 점에서 미분불가능.)
위 그래프에서 $b(x)=0$이 실근을 가질 조건은 $k \geq e$임을 바로 알 수 있고, $k=e$인 경우
그 실근은 $x=1$이고 $k>e$인 경우에는 구간 $(0,1),(1,\infty)$에 각각 하나씩 실근이 존재합니다.

$b(c)=0 \Leftrightarrow kce^{-c}=1$인 $x=c$에서의 미분계수를 보면
$\dfrac{d}{dx}\left(kx^2e^{-x}-x\right)\big|_{x=c}=k(2c-c^2)e^{-c}-1=(2-c)e^c\times e^{-c}-1=1-c$인데,
문제조건을 만족하려면 $1-c=0$이어야 하므로 $1=c$.
즉, 위에서 $k=e$인 경우에만 문제의 조건을 만족합니다. $\cdots$ (2)

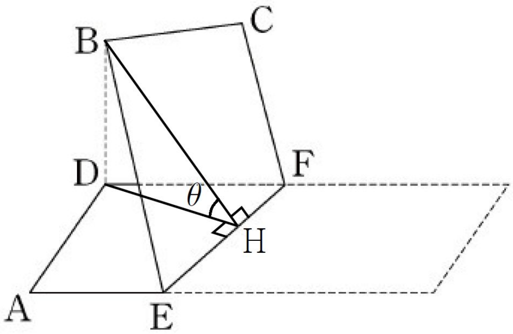
(1), (2)로부터 문제의 조건을 만족하는 양수 k의 범위는 $k\leq e$임을 알 수 있습니다.
따라서 k의 최댓값은 e.

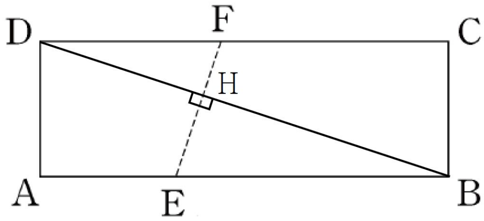
28. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=9$, $\overline{\mathrm{AD}}=3$인 직사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. 선분 AB 위의 점 E와 선분 DC 위의 점 F를 연결하는 선을 접는 선으로 하여, 점 B의 평면 AEFD 위로의 정사영이 점 D가 되도록 종이를 접었다.
$\overline{\mathrm{AE}}=3$일 때, 두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 각의 크기가 θ이다. $60\cos\theta$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]



$sol1)$

이면각을 작도하기 위해, B에서 평면 AEFD에 내린 수선의 발 D에서
교선인 선분 EF에 내린 수선의 발을 H라고 하면, 삼수선정리에 의해 $\overline{\mathrm{BH}}\perp\overline{\mathrm{EF}}$입니다.





이를 접기 전의 그림에 나타내보면,
위의 그림처럼 세 점 D, H, B가 한 직선 위에
있음을 알 수 있습니다.

$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{HD}}}$이니 접기 전의 그림에서 각 변의 길이를 구합시다.

$\angle\mathrm{FDH}=\phi$라고 하면 주어진 조건에 의해 $\tan\phi=\dfrac{1}{3}$입니다.

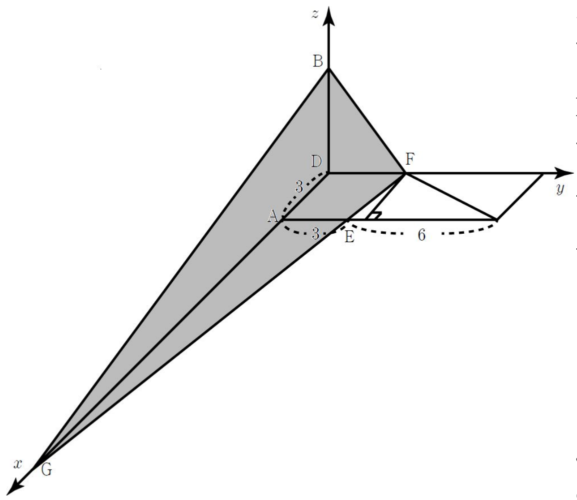
F에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 F′이라고 하면 $\angle\mathrm{EFF'}=\phi$이므로 $\overline{\mathrm{EF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}\times\tan\phi=1$입니다.

$\overline{\mathrm{DF}}=\overline{\mathrm{AE}}+\overline{\mathrm{EF'}}=4$입니다. $\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{DF}}\times\cos\phi$, $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{BE}}\times\cos\phi$이므로

$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{DH}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{DF}}\times\cos\phi}{\overline{\mathrm{BE}}\times\cos\phi}=\dfrac{\overline{\mathrm{DF}}}{\overline{\mathrm{BE}}}=\dfrac{4}{6}$, 따라서 $60\cos\theta=40$.

*sol*2)

이번엔 좌표공간을 도입해서 풀어보겠습니다.



그림에서 $\overline{\mathrm{BD}}=3\sqrt{2}$이고 $\overline{\mathrm{BE}}=6$이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=3\sqrt{2}$이다. 접히기 전의 B와 C의 위치를 $\mathrm{B_0}, \mathrm{C_0}$, F에서 $\overline{\mathrm{AB_0}}$에 내린 수선의 발을 H, $\overline{\mathrm{DF}}=$ t라고 하면, $\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{B_0F}}$에서 $\overline{\mathrm{BD}}^2+\overline{\mathrm{DF}}^2=\overline{\mathrm{FH}}^2+\overline{\mathrm{HB_0}}^2$이다.

$\overline{\mathrm{B_0H}}=9-t$이므로

$(3\sqrt{2})^2+t^2=3^2+(9-t)^2$이고

계산하면 $t=4$를 얻는다.

$\triangle\mathrm{AEG}$와 $\triangle\mathrm{HEF}$는 닮음이고 닮음비는 $3:1$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AG}}=9$이고 G의 x좌표는 12이다.

삼각형 BFG를 포함하는 평면의 세 절편의 좌표가 각각 $12, 4, 3\sqrt{2}$이므로 이 평면의 방정식은

$\dfrac{x}{12}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{3\sqrt{2}}=1$이다. 양 변에 12를 곱해서 정리하면 $x+3y+2\sqrt{2}z=12$.

따라서 이 평면의 법선벡터는 $(1, 3, 2\sqrt{2})$이고 밑면인 xy평면의 법선벡터인 $(0, 0, 1)$과의

내적으로 두 평면이 이루는 예각 θ에 대한 cos값을 구하면 $\cos\theta=\left|\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{18}}\right|=\dfrac{2}{3}$.

따라서 $60\cos\theta=40$