[나승민/한성은 모의고사]

6월 모의고사 연습(1/2)

나승민 (성균관대 수학과)

이투스 네오, 미래탐구목동

수학에 감각을 더하다.

instagram @cremath_david

한성은 (POSTECH 수학과)

5A ACADEMY

내일부터 열심히.

hansungeun.com/texta.html - 공개 자료 페이지.
smartstore.naver.com/hansungeun - 책 파는 데.
유튜브 한성은 / 인스타 hansungeun2

수학 영역

5지선다형

1. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이고 $\sin\theta=\frac{\sqrt{11}}{6}$일 때, $\cos\theta$의 값은? [2점]

① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ $-\frac{5}{6}$ ⑤ $-\frac{7}{6}$

2. 세 수 $\frac{21}{12}$, x, $\frac{39}{12}$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, x의 값은? [2점]

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{17}{6}$
④ 3 ⑤ $\frac{19}{6}$

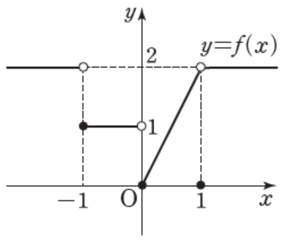
3. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-3)=80,\quad \sum_{k=1}^{10}(a_k+3b_k)=200$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+b_k)$의 값은? [3점]

① 250 ② 275 ③ 300
④ 325 ⑤ 350

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to0-}f(-x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

5. 두 양수 a, b에 대하여 $\log_{\sqrt{2}}a=\log_5 b=\log_2 4$일 때, $\log_3(a+b)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. $-1\le x\le 4$에서 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

7. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 1}\frac{xf(x)-2x^2-1}{x-1}=f(1)$을 만족시킬 때, $f(1)+f'(1)$의 값은? [3점]

① 8 ② 7 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

8. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치는

$$x(t) = -t^3 + 2t^2 + at$$

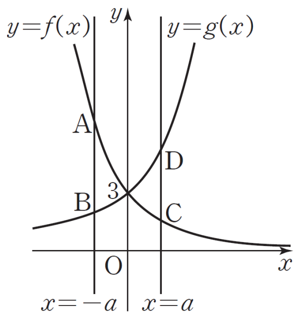
이다. $t=4$에서 점 P의 운동 방향이 바뀔 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 32 ② 28 ③ 24 ④ 20 ⑤ 16

9. 두 함수 $f(x)=2x+1$, $g(x)=x^2-ax+a$에 대하여 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위한 모든 정수 a의 값의 합은? [4점]

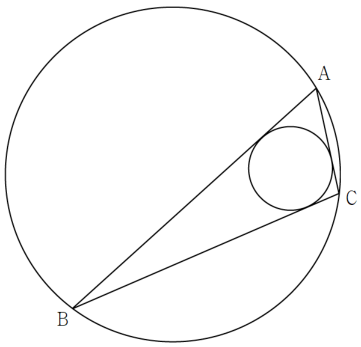
① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

10. 두 함수 $f(x)=\dfrac{3}{2^x}$, $g(x)=2^{x+1}+1$이 있다. 그림과 같이 직선 $x=-a$가 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=a$가 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $2\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}}=54$일 때, 양수 a의 값은? [4점]



① $-1+\log_2 5$ ② $\log_2 7$ ③ $-1+2\log_2 3$ ④ $\log_2 5$ ⑤ $1+\log_2 7$

11. 반지름의 길이가 $4\sqrt{3}$ 인 원에 내접하는 삼각형 ABC에 대하여 $\angle BAC = 60^\circ$ 이고 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$ 이다. $\overline{AB} + \overline{AC}$ 의 값은? [4점]



① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

12. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

를 만족시킨다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_1 = 2$

ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여 $(a_{n+1})^2 = 2a_{n+1} + 4\sum_{k=1}^{n} a_k$ 이다.

ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = 2n$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 구간 $[0,\ 4)$에서 $f(x)=ax(x-3)^2$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-4)+3$이다.

곡선 $y=f(x)$에 대하여 $\int_{-8}^{8}|f(x)|dx$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 46 ② 48 ③ 50
④ 52 ⑤ 54

14. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 열린 구간 $(-\infty,\ 2)$에서 $f'(x)>0$,
> 열린 구간 $(2,\ \infty)$에서 $f'(x)<0$이다.

함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x+1)f(x)-\int_{-1}^{x}f(t)dt$$

라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g'(-1)=0$
ㄴ. 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $0<k<g(2)$인 실수 k에 대하여 방정식 $g(x)=k$는 서로 다른 세 개의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. $a_1 = 1$인 수열 $\{a_n\}$은 집합

$A = \{n \mid n = 2^k,\ k$는 음이 아닌 정수$\}$

와 상수 d에 대하여 다음을 만족시킨다.

(가) $n \in A$이면 $a_{2n} = 2a_n$이다.
(나) $n \notin A$이면 $a_{n+1} = a_n + d$이다.

$\sum_{k=1}^{32} a_k = 218$일 때, a_{60}의 값은? [4점]

① 44 ② 48 ③ 52
④ 56 ⑤ 60

단답형

16. $\sqrt[3]{4} \times 4^{\frac{1}{6}}$의 값을 구하여라. [3점]

17. 함수 $f(x) = \int_{-1}^{x} (t^2 - 2t)dt$에 대하여,

$\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+3h)}{h}$의 값을 구하여라. [3점]

18. 곡선 $y=x^3+10$에 접하는 직선이 점 $(0,\ -6)$를 지날 때, 이 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하자. 이때 $m-n$의 값을 구하여라. [3점]

19. 1이 아닌 양수 a, b와 실수 x, y에 대하여

$$a^2b^3=1,$$
$$b\times a^x=a^4\times b^y$$

가 성립한다. $3x+2y$의 값을 구하여라. [3점]

20. 첫째항이 26이고 공차가 -4인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 -6이고 공차가 d인 등차수열 $\{b_n\}$에 대하여

$$a_m b_m>0$$

이 되게 하는 자연수 m의 개수가 2가 되게 하는 모든 실수 d값의 범위는 $p\le d<q$ 또는 $r<d\le s$이다. $20pr$의 값을 구하여라. (단, $p<q<r<s$이다.) [4점]

21. 자연수 k에 대하여 집합 A_k를

$$A_k = \left\{ \sin\frac{2m\pi}{k} \,\middle|\, m\text{은 모든 자연수} \right\}$$

로 정의하자. $A_6 \subset A_n$이 되도록 하는 50 이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하여라. [4점]

22. 두 양수 a, k에 대하여 $f(x) = kx^2(x-2a)^2$이고, 두 함수 $g(x)$와 $h(x)$가 각각

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x \le a \text{ 또는 } x \ge 2a) \\ -f'(x) & (a < x < 2a) \end{cases},$$

$$h(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

이다. 방정식 $f(x) = h(x)$의 모든 근을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열한 것을 α, β, γ라 할 때,

$$\gamma - \alpha = 2 + 2\sqrt{2},$$
$$f(\beta) = 4$$

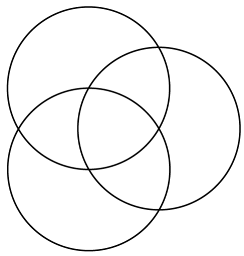
가 성립한다. $f(6)$의 값을 구하여라. [4점]

5지선다형

23. ${}_{3}\Pi_{4}$의 값은? [2점]

① 45 ② 54 ③ 63 ④ 72 ⑤ 81

24. 그림과 같이 반지름의 길이가 같은 3개의 원이 있다. 이 3개의 원은 각각 다른 2개의 원의 중심을 지난다. 3개 원의 내부에 만들어지는 7개의 영역에 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 1260 ② 1680 ③ 2520 ④ 3760 ⑤ 5040

25. 두 사건 A, B에 대하여 A와 B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A \cup B) = 5\mathrm{P}(B) = 1$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

26. 한 개의 주사위를 두 번 던진다. 6의 눈이 한 번도 나오지 않을 때, 나온 두 눈의 수의 합이 3의 배수일 확률은? [3점]

① $\frac{9}{25}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{11}{25}$ ④ $\frac{12}{25}$ ⑤ $\frac{13}{25}$

27. 자연수 p에 대하여 다항식 $(x+p)^8$의 전개식에서 x^k의 계수를 a_k라 하자. 서로 다른 세 수 a_1, a_2, a_3 중 최댓값이 a_2일 때, a_6의 값은? [3점]

① 126 ② 168 ③ 252
④ 336 ⑤ 504

28. 수직선 위의 점 P는 원점에서 출발하여 동전을 한 번 던질 때마다 앞면이 나오면 양의 방향으로 2만큼, 뒷면이 나오면 음의 방향으로 1만큼 움직이는 시행을 반복한다. 7번의 시행 후 점 P가 A(5)의 눈에 도착할 때, 4번의 시행 점 P가 후 B(2)의 눈에 위치하였을 확률은? [4점]

① $\frac{14}{35}$ ② $\frac{16}{35}$ ③ $\frac{18}{35}$
④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{22}{35}$

단답형

29. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하여라. [4점]

(가) $f(1) < f(3) < f(5) < f(6)$
(나) $f(4) \le f(2)$

30. 다음 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수를 구하여라. [4점]

(가) $a+b+c+d+e=12$
(나) $a+b+c$는 $d+e$의 배수이다.

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n(n+1)}$의 값은? [2점]

① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ 0　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

24. $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\alpha-\frac{5\pi}{6}\right)$를 만족시키는 α에 대하여 $\tan\alpha$의 값은? [3점]

① $-2-\sqrt{3}$　② $-3-\sqrt{3}$　③ $-4-\sqrt{3}$　④ $-5-\sqrt{3}$　⑤ $-6-\sqrt{3}$

25. 미분가능한 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=x^3+x$에 대하여 합성함수 $h(x)=(g\circ f)(x)$가

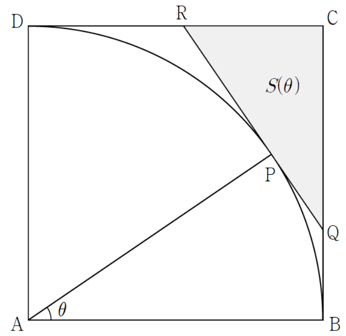
$$\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-f(x)-1}{x-1}=6$$

일 때, $f'(1)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

26. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD와 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원 C 위의 점 P에서의 접선이 두 선분 BC, CD와 만나는 점을 각각 Q, R이라 하자. $\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 할 때, 삼각형 CQR의 넓이는 $S(\theta)$이다. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은?

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [3점]

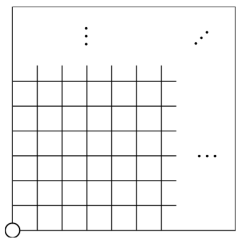


① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

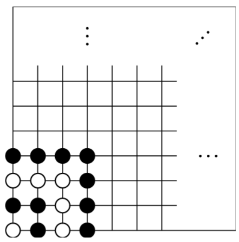
27. 돌을 놓을 수 있는 눈 $2n\times 2n$개가 있는 바둑판에 다음 단계에 따라 흰 바둑돌과 검은 바둑돌을 올려 놓는다.

> [단계1] [그림1]과 같이 바둑판 한쪽 구석의 눈에 흰 돌을 올려놓는다.
>
> [단계2] 놓인 돌들의 바깥쪽에 돌들을 놓아 한 변의 길이가 1 늘어난 정사각형이 되도록 한다. 이때 전 단계에서 흰 돌을 놓았다면 검은 돌을, 검은 돌을 놓았다면 흰 돌을 놓는다.

[그림2]는 [단계2]를 세 번 반복한 것이다. 이와 같이 [단계2]를 바둑판의 $2n\times 2n$개의 눈이 가득 찰 때까지 반복했을 때, 검은 바둑돌의 개수를 a_n, 흰 바둑돌의 개수를 b_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}\right\}$의 값은? [3점]



[그림1]



[그림2]

① $\frac{\sqrt{2}}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\sqrt{2}$　⑤ 2

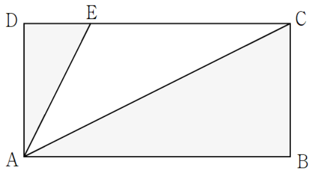
28. 함수 $f(x)=\ln x$와 $0<t<\frac{\pi}{4}$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선과 직선 $y=x$가 이루는 예각이 t인 점 P의 x좌표 중 가장 작은 것을 $g(t)$, 가장 큰 것을 $h(t)$라 하자. $0<a<\frac{\pi}{4}$인 실수 a가 $\tan a=\frac{1}{2}$를 만족시킬 때, $g'(a)\times h'(a)$의 값은? [4점]

① $-\frac{25}{2}$　② $-\frac{100}{9}$　③ -10
④ $-\frac{100}{11}$　⑤ $-\frac{25}{3}$

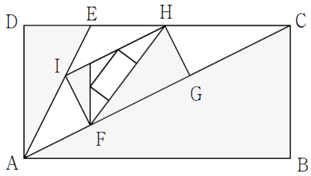
단답형

29. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AD}}=1$인 직사각형 ABCD가 있다. 선분 CD를 $3:1$로 내분하는 점을 E라 하고, 두 삼각형 ABC, ADE를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 AC 위의 두 점 F, G, 선분 CE 위의 점 H, 선분 AE 위의 점 I를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{FG}}:\overline{\mathrm{FI}}=2:1$인 직사각형 FGHI을 그리고, 그림 R_1과 같은 방법으로 직사각형 FGHI에 두 삼각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

R_1



R_2



30. 이차함수 $P(x)$와 실수 a에 대하여 함수

$$f(x)=P(x)e^{ax}$$

와 함수 $g(x)$는 $x>-1$인 모든 실수 x에 대하여

$$(x^2-1)g(x)=f(x)$$

일 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 1}g(x)=0$

(나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극댓값 $\frac{1}{e}$을 갖는다.

$60f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하여라. [4점]

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(4,\ 2)$, $\vec{b}=(-1,\ 1)$에 대하여 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

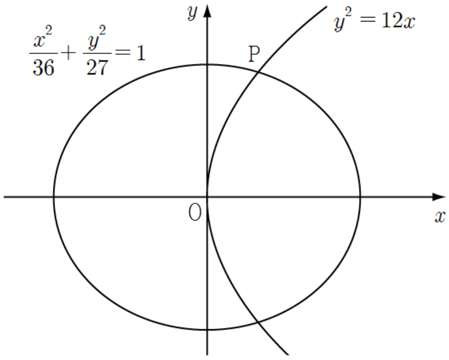
24. 두 점 $\mathrm{F}(-3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(3,\ 0)$을 초점으로 하는 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 장축의 길이와 단축의 길이의 곱이 80일 때, a^2의 값은? [3점]

① 17 ② 19 ③ 21
④ 23 ⑤ 25

25. 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC의 선분 BC 위의 점 D에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 24$일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$의 값은? [3점]

① $3\sqrt{3}$　② $2\sqrt{7}$　③ $\sqrt{29}$　④ $\sqrt{30}$　⑤ $\sqrt{31}$

26. 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$과 포물선 $y^2=12x$의 두 교점 중 한 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{PF}} \times \overline{\mathrm{PF'}}$의 값은? [3점]



① 35　② 38　③ 41　④ 44　⑤ 47

27. 두 곡선

$$y=\frac{1}{16}x^2, \quad y^2=x-a$$

에 동시에 접하는 직선의 개수가 2일 때, a의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

28. 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD와 점 P가

$$|9\overrightarrow{\mathrm{AP}}-6\overrightarrow{\mathrm{BP}}-5\overrightarrow{\mathrm{DP}}|=4$$

를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|$의 최솟값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

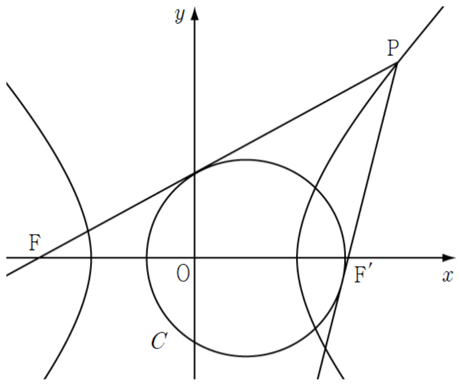
단답형

29. 원 C 위의 세 점 A, B, C는

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 64, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

을 만족시킨다. 원 C 위를 움직이는 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$의 최댓값이 48일 때, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$의 최댓값을 구하여라. [4점]

30. 그림과 같이 두 초점이 F$(-6, 0)$, F$'(6, 0)$인 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 두 직선 PF, PF$'$은 모두 원 $(x-2)^2+y^2=15$의 접선이다. $\overline{\mathrm{PF}} \times \overline{\mathrm{PF'}}$의 값을 구하여라. [4점]



[나승민/한성은 모의고사 6월 연습(1/2) 정답표]

〈공통〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	④	02	①	03	①	04	⑤	05	③
06	④	07	②	08	①	09	④	10	②
11	③	12	⑤	13	②	14	⑤	15	③
16	2	17	9	18	18	19	14	20	16
21	408	22	72						

〈확률과 통계〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	⑤	24	②	25	④	26	①	27	③
28	③	29	315	30	205				

〈미적분〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	⑤	24	①	25	④	26	②	27	③
28	②	29	531	30	45				

〈기하〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	③	24	⑤	25	②	26	①	27	④
28	①	29	72	30	128				

COMMENT 11

사인법칙에서 $a=12$이다. 삼각형의 넓이에서 $\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times(12+b+c)=\frac{1}{2}bc\times\frac{\sqrt{3}}{2}$이고,

코사인법칙에서 $144=b^2+c^2-bc$이다. 연립하여 풀면 $b+c=18$이다.

COMMENT 12

기역 : 준 식에 $n=1$을 대입하면, $a_1^{\,3}=2a_1^{\,2}$이고 $a_n>0$이므로 $a_1=2$이다.

니은 : 준 식의 n 자리에 $n+1$을 대입하면 $\sum_{k=1}^{n+1}a_k^{\,3}=2\left(\sum_{k=1}^{n+1}a_k\right)^2$이다.

여기서 준 식을 빼면, $a_{n+1}^{\,3}=2\left\{\left(\sum_{k=1}^{n+1}a_k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\right\}=2a_{n+1}\left(a_{n+1}+2\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$이다.

디귿 : 니은의 식과 니은 식의 n 자리에 $n-1$을 대입한 것을 빼면 등차수열 뜬다.

COMMENT 14

$g(x)=(x+1)f(x)-\int_{-1}^{x}f(t)dt$에서 $g(-1)=0$이고 $g'(x)=(x+1)f'(x)$이다.

$g'(x)$는 $x<-1$일 때 음수, $-1<x<2$일 때 양수, $2<x$일 때 음수이다.
$g(x)$는 다항함수이다. 삼차함수처럼 생겼지만, 삼차라는 보장은 없다.

COMMENT 15

(가)에 의해 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_4=4$, $a_8=8$, $a_{16}=16$, $a_{32}=32$이다.

(나)에 의해 $a_3=4-d$,

$a_7=8-d$, $a_6=8-2d$, $a_5=8-3d$,

$a_{15}=16-d$, $a_{14}=16-2d$, $\cdots$, $a_9=16-7d$,

$a_{31}=32-d$, $a_{30}=32-2d$, $\cdots$, $a_{17}=32-15d$

이다. $\sum_{k=1}^{32}a_k$는, 좀 노가다인데,

$$\{1+2+4\times2+8\times4+16\times8+32\times16\}-\{1+(1+2+3)+(1+2+\cdots+7)+(1+2+\cdots+15)\}d$$

이므로 $683-155d$이다. $d=3$이고 $a_{64}=64$, $a_{60}=64-4d=52$이다.

COMMENT 20

조건 '$b_5\le0$이고 $b_6>0$' 또는 '$b_9<0$이고 $b_{10}\ge0$'를 만족시켜야 한다.

풀면 $\frac{2}{3}\le d<\frac{3}{4}$ 또는 $\frac{6}{5}<d\le\frac{3}{2}$이다.

COMMENT 21

적당한 k값들을 넣고 A_k들을 조사해보자. 예를 들어 $k=5$이면

$$A_5=\left\{0,\ \sin\frac{2\pi}{5},\ \sin\frac{4\pi}{5},\ \sin\frac{6\pi}{5},\ \sin\frac{8\pi}{5}\right\}$$

이다. 뭐 이런 식에 겹치는 것 빼면 되겠지. $A_6\subset A_n$이려면 대충 n이 3의 배수 각이다.

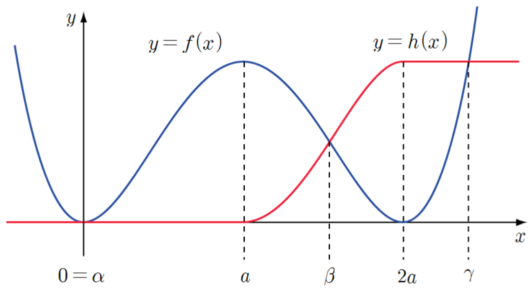
$\sin\frac{2\pi}{6}=\sin\frac{4\pi}{6}$, $\sin\frac{6\pi}{6}=0$, $\sin\frac{8\pi}{6}=\sin\frac{10\pi}{6}$이므로 $A_6=A_3$이다.

$$3+6+9+12+\cdots+48=408$$

이다.

COMMENT 22

$h(a)=0$이고 $h'(x)=g(x)$이다. 이를 이용하여 두 함수 $y=f(x)$와 $y=h(x)$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



$\alpha=0$이고 비율관계에 의해 $\gamma=a+\sqrt{2}a$이므로 $a=2$이다.

$f(\beta)=\frac{1}{2}f(a)$이므로 $f(a)=ka^4=8$에서 $k=\frac{1}{2}$이다.

※ 비율관계에 대하여 : 나도 이걸 외우고 있지는 않다.

함수 $P(x)=x^2(x+a)(x-a)$가 $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}a$에서 극값을 가짐을 확인한다.

※ β값에 대하여 : 못 구한다.

COMMENT 확률과 통계 28

$$\frac{{}_4C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times{}_3C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3}{{}_7C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^7}$$

COMMENT 확률과 통계 30

$d+e$는 12의 약수이다.

Case1) $a+b+c=10$, $d+e=2$ $\Rightarrow$ ${}_3H_7\times{}_2H_0=36$

Case2) $a+b+c=9$, $d+e=3$ $\Rightarrow$ ${}_3H_6\times{}_2H_1=56$

Case3) $a+b+c=8$, $d+e=4$ $\Rightarrow$ ${}_3H_5\times{}_2H_2=63$

Case4) $a+b+c=6$, $d+e=6$ $\Rightarrow$ ${}_3H_3\times{}_2H_4=50$

COMMENT 미적분 27

$$a_n=(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+\cdots((2n)^2-(2n-1)^2)$$
$$=3+7+11+\cdots+(4n-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=2n^2+n$$

$$b_n=4n^2-a_n=2n^2-n$$

COMMENT 미적분 28

$\frac{1-g(t)}{1+g(t)}=\tan t$이고 $\frac{h(t)-1}{h(t)+1}=\tan t$이다.

각각의 식에 $t=a$를 대입하면 $g(a)=\frac{1}{3}$, $h(a)=3$이다.

각각의 식을 미분하고 $t=a$를 대입하면 $g'(a)=-\frac{10}{9}$, $h'(a)=10$이다.

COMMENT 미적분 29

$\tan(\angle\mathrm{EAC})=\tan(\angle\mathrm{CAD}-\angle\mathrm{EAD})=\frac{3}{4}$이다. $\overline{\mathrm{AF}}=4x$라 하면 $\overline{\mathrm{IF}}=3x$, $\overline{\mathrm{FG}}=6x$, $\overline{\mathrm{CG}}=6x$이므로 $16x=\sqrt{5}$에서 $x=\frac{\sqrt{5}}{16}$이다. 첫째항은 $\frac{5}{4}$, 닮음비는 $1:\frac{3\sqrt{5}}{16}$, 넓이비는 $256:45$, 구하는 값은 $\frac{320}{211}$이다.

COMMENT 미적분 30

$x>-1$, $x\neq1$일 때, $g(x)=\frac{f(x)}{(x+1)(x-1)}$이다.

(가)에서 $f(x)=k(x-1)^2e^{ax}$이다.

$g(x)=\frac{k(x-1)e^{ax}}{x+1}$이다. $g(2)=\frac{1}{e}$, $g'(2)=0$을 풀면 $k=3e^{\frac{1}{3}}$, $a=-\frac{2}{3}$이다.

※ $g(x)$를 두 점 $(-1,\ 0)$, $(x,\ k(x-1)e^{ax})$ 사이의 평균변화율로 만들다 망한 문제다.

COMMENT 기하 27

접점을 $(\alpha,\ \beta)$라 하자.

$$\beta=\frac{1}{16}\alpha^2,\ \beta^2=\alpha-a,\ \frac{1}{8}\alpha=\frac{1}{2\beta}$$

를 연립하여 풀면 $\alpha=4$, $\beta=1$, $a=3$이다.

COMMENT 기하 28

준 식을 변형하면

$$|6(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}})+5(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}})-2\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=4\ \Leftrightarrow\ \left|3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=2$$

이다. $3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$라 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=2$에서 점 P의 자취는 점 E를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원이다.

COMMENT 기하 29

선분 AC는 원의 지름이다. 원의 반지름의 길이를 r, $\overline{\mathrm{AB}}=2a$, $\overline{\mathrm{BC}}=2b$라 하자. $r^2=a^2+b^2$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=4a^2$이므로 $a=4$이다. $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2$ 때리면 최댓값은 $(r+b)^2-a^2=48$이다.

연립하여 풀면 $r=5$, $b=3$이다. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$의 최댓값은 $2a\times(a+r)$인 72이다.

COMMENT 기하 30

쌍곡선의 주축의 길이를 $2a$, $\overline{\mathrm{PF'}}=b$라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=b+2a$이다.

$\mathrm{A}(2,\ 0)$, 두 직선 PF, PF′과 원의 접점을 각각 B, C라 하면

$\overline{\mathrm{FB}}=7$이므로 $\overline{\mathrm{PB}}=b+2a-7$, $\overline{\mathrm{F'C}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{PC}}=b+1$이고 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$이므로 $a=4$이다.

$\cos(\angle\mathrm{BFA})=\frac{7}{8}=\frac{(b+8)^2+12^2-b^2}{24(b+8)}$에서 $b=8$이다.