벡터방정식 유형 풀이방법 정리

벡터방정식이란 벡터를 덧셈, 뺄셈, 내적 등으로 구성한 식으로, 주로 미지의 점 P의 위치를 알기 위해서 표현합니다.
$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=10$ 이것도 벡터방정식이긴 하지만
쉬우므로 여기서는 제외하도록 하겠습니다.

벡터방정식 유형에 속하는 문제는
평가원 기출로는 18.06.29, 19.09.16, 20.11.19, 22.11.29가 있고,
교육청 기출로는 19.07.29가 있습니다.

벡터방정식 유형 풀이방법은 두가지 입니다.

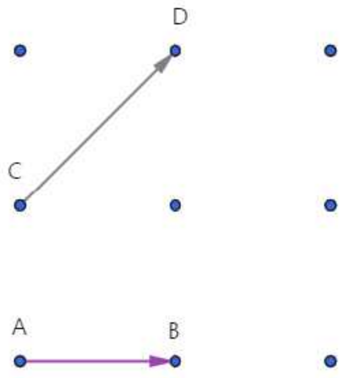
1. 꼬리물기
2. 시점통일 (벡터 쪼개기)

(내분점 방법도 있습니다. 다만, 적용하기 쉽고 문제 또한 쉽기때문에 생략했습니다.)

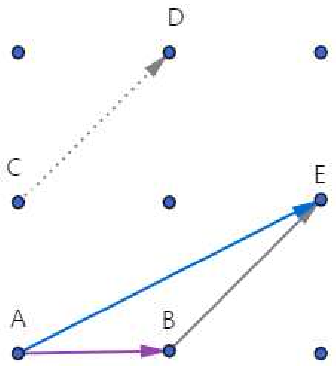
1. 꼬리물기

벡터방정식이 나올 때 최우선적으로 적용해야 할 방법입니다.
꼬리물기가 잘 안되면 그 다음인 시점통일 방법을 적용시킵니다.

벡터의 덧셈/뺄셈을 할 때, 평행이동 시켜서 한 벡터의 종점과 다른 벡터의 시점을 연결시키는 방식입니다.
벡터의 덧셈에서 삼각형법을 의미합니다.



이 상황에서 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ 라는 벡터방정식이 나오면 $\overrightarrow{CD}$의 시점인 점 C를 $\overrightarrow{AB}$의 종점인 점 B에 닿도록 평행이동 시킵니다.



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}$가 됩니다.

2. **시점통일** (벡터쪼개기)

벡터의 시점을 통일시키는 방법입니다.
기출이든 사설이든 벡터방정식 유형을 풀다가 막혔을때는 일단 시점통일을 한 후에 다시 한번 생각하는 것이 나을 정도로 강력한 방법입니다.

대부분 벡터의 뺄셈을 통해 시점통일을 합니다.

예시)
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}=2$ 가 있다면
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=$
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OB}|^2=$
$\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})+|\overrightarrow{OB}|^2=2$
따라서
$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BP}=2-|\overrightarrow{OB}|^2$ 가 됩니다.

이제 기출문제에 적용해보겠습니다.

18학년도 6월 모의고사 29번 - 2.시점통일

29. 좌표평면에서 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 한 점을 A, 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 한 점을 B라 할 때, 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$
(나) $\|\overrightarrow{PA}\|^2+\|\overrightarrow{PB}\|^2=20$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$의 최솟값은 m이고 이때 $|\overrightarrow{OP}|=k$이다. $m+k^2$의 값을 구하시오. [4점]

제대로 된 벡터방정식이라 할 수 있는 최초의 평가원 기출문제입니다.
(나)를 풀 때 1.꼬리물기는 적용 불가능하니 2.시점통일을 적용하겠습니다.

시점을 O로 통일시킬건데, 이유는 원이 등장하면 대부분 시점을 O로 통일하는게 편하고 또한 (가)의 시점이 O이기 때문입니다.

$|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2=$
$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}+|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}+|\overrightarrow{OP}|^2=$
$10-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}+2|\overrightarrow{OP}|^2$
구해야 하는 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 도 시점을 O로 통일시킵시다.

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})=$
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}+|\overrightarrow{OP}|^2$ 가 됩니다.

이 때, (나)의 식과 결합시키면 구하는 것은 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+5$ 가 됩니다.

이후에는 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$의 최소를 구하는 내적의 최대최소 유형이 됩니다.

19학년도 9월 모의고사 16번 - 내분점

16. 좌표평면 위의 두 점 A(6, 0), B(8, 6)에 대하여 점 P가

$$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{10}$$

을 만족시킨다.
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 하고, 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{9\sqrt{10}}{5}$ ③ $\frac{12\sqrt{10}}{5}$
④ $3\sqrt{10}$ ⑤ $\frac{18\sqrt{10}}{5}$

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{10}$ 을 보시면 양변을 2로 나눠서 $|\overrightarrow{PM}|=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 로 만들면 점 M을 중심으로 하고 반지름이 $\frac{\sqrt{10}}{2}$인 원이 되네요. (M은 A와 B의 중점)

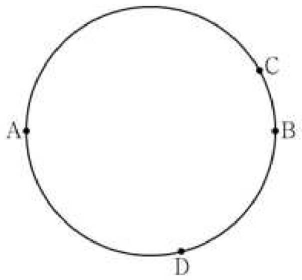
이런 것도 벡터방정식에 속하긴 하지만 내분점 방법을 적용하는 벡터방정식은 어렵지 않으므로 이 글에선 생략했습니다.

20학년도 수능 19번 - 1.꼬리물기

19. 한 원 위에 있는 서로 다른 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{AD}|^2$의 값은? [4점]

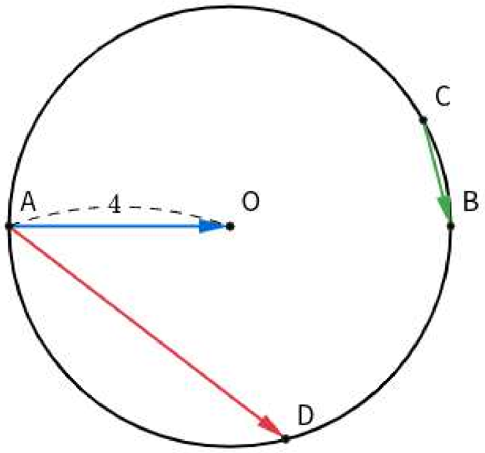
> (가) $|\overrightarrow{AB}| = 8$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
>
> (나) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40



(가) 해석은 어렵지 않고 (나) 해석이 관건인 문제입니다.

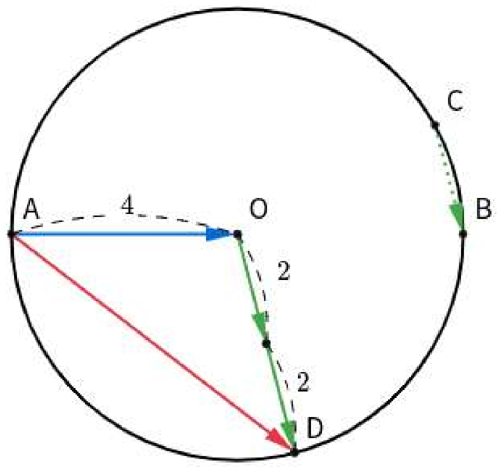
1.꼬리물기부터 적용하겠습니다.



$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO}$ 이고, $-2\overrightarrow{BC} = +2\overrightarrow{CB}$ 입니다. (O는 원의 중심)

따라서, (나)의 식은 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{CB}$ 가 됩니다.

꼬리물기를 위해 $\overrightarrow{CB}$의 시점인 C를 $\overrightarrow{AO}$의 종점인 O로 평행이동 시키겠습니다.



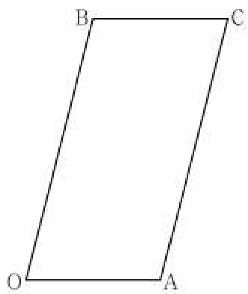
원의 반지름이 4이므로 $|\overrightarrow{CB}| = 2$ 를 알 수 있습니다.
이 문제는 $|\overrightarrow{CB}| = 2$ 를 알아내는 것이 핵심이었고, 이것만 알아내면 그 이후엔 무난한 문제 입니다.

22학년도 수능 29번 - 2.시점통일

29. 좌표평면에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OB}}=2\sqrt{2}$ 이고 $\cos(\angle \mathrm{AOB})=\frac{1}{4}$ 인 평행사변형 OACB에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ (0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1)$
>
> (나) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2$

점 O를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M\times m=a\sqrt{6}+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 유리수이다.) [4점]



(나)를 해석할 때 꼬리물기부터 적용해보려 했는데 내적이 있어서 불가능하네요. 따라서 시점 통일 방법을 적용하겠습니다.

(가)와 구해야 하는 $|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$ 모두 시점이 O이므로 (나)의 시점도 O로 통일하겠습니다.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=2$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{4}=1$ 이므로 (나)의 식은 결국 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3$ 으로 정리할 수 있습니다.

이후에는 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3$을 풀기 위해 내적을 푸는 도구들을 적용하면 됩니다.

19학년도 7월 29번(2019년 시행) - 1.꼬리물기

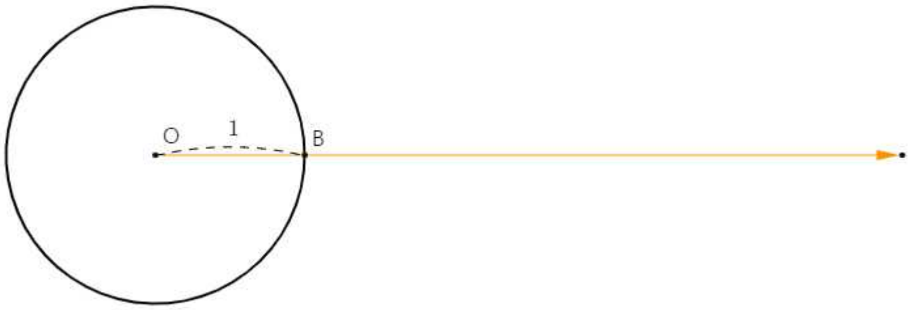
29. 중심이 O 이고 반지름의 길이가 1 인 원이 있다.
양수 x에 대하여 원 위의 서로 다른 세 점 A, B, C 가

$$x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 5\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$$

를 만족시킨다. $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 의 값이 최대일 때, 삼각형 ABC 의 넓이를 S라 하자. $50S$의 값을 구하시오. [4점]

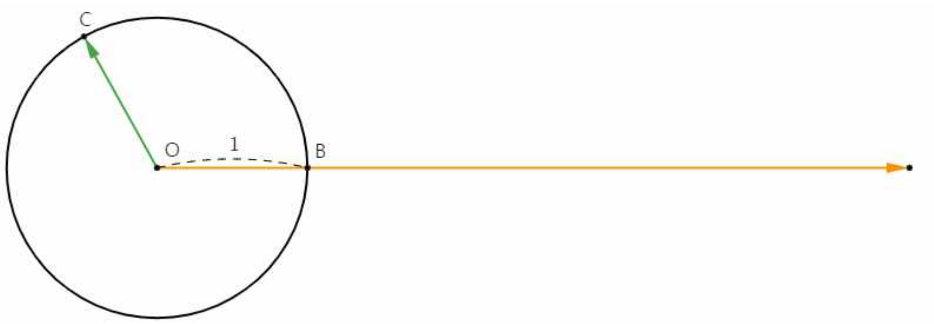
$5\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$부터 처리합시다. 꼬리물기 먼저 적용할게요.

A, B, C 모두 동점이라 셋 중 한 점의 위치를 고정시켜도 세 점 간의 상대적 위치는 같아요. 그래서 점 B의 위치를 먼저 정할게요. (아무데나 정해도 상관없어요.)



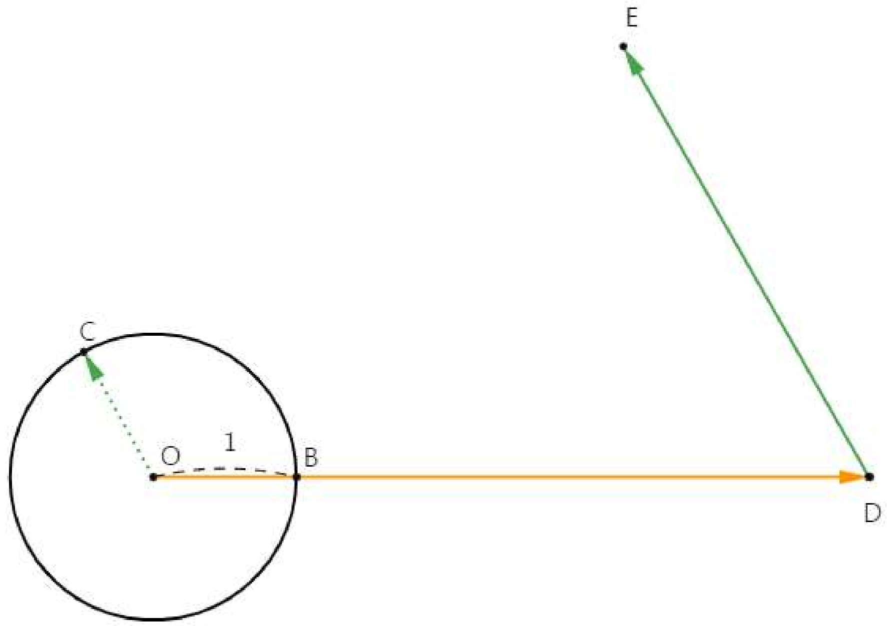
점 B의 위치를 정했고, 그러면 $5\overrightarrow{\mathrm{OB}}$는 주황색 벡터가 되죠.

점 C는 원 위를 자유롭게 돌아다니는 점입니다. 그 중 한 점을 잡으면 이렇게 되겠죠.



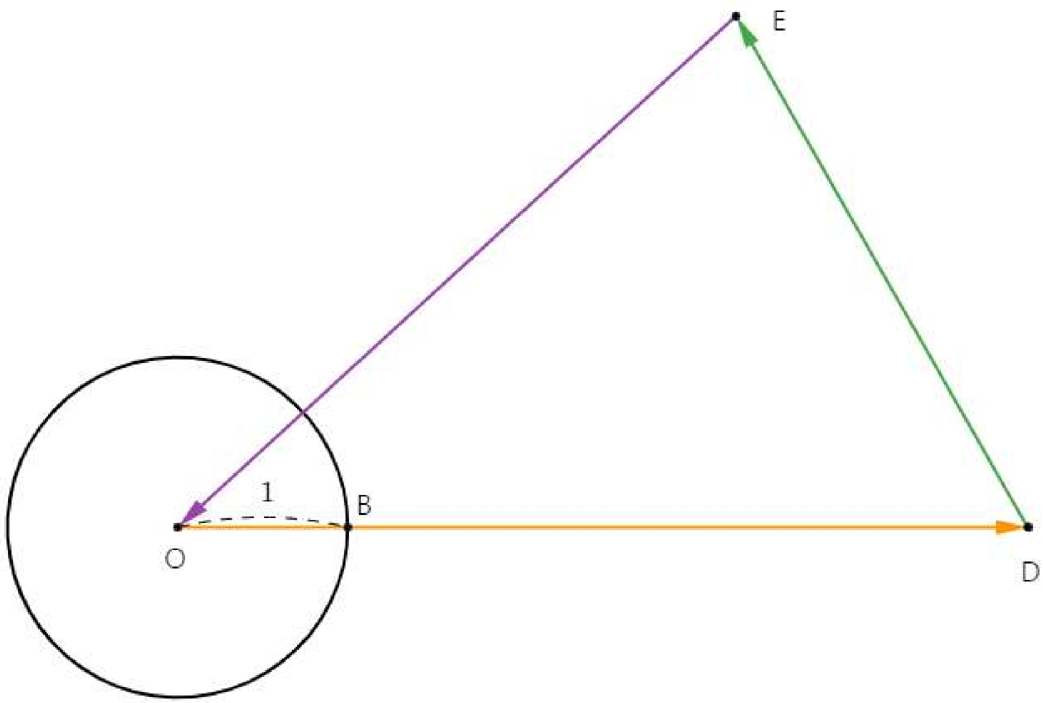
꼬리물기를 적용하기 위해

$5\overrightarrow{OB}$의 종점에다 $3\overrightarrow{OC}$의 시점을 붙여볼게요.

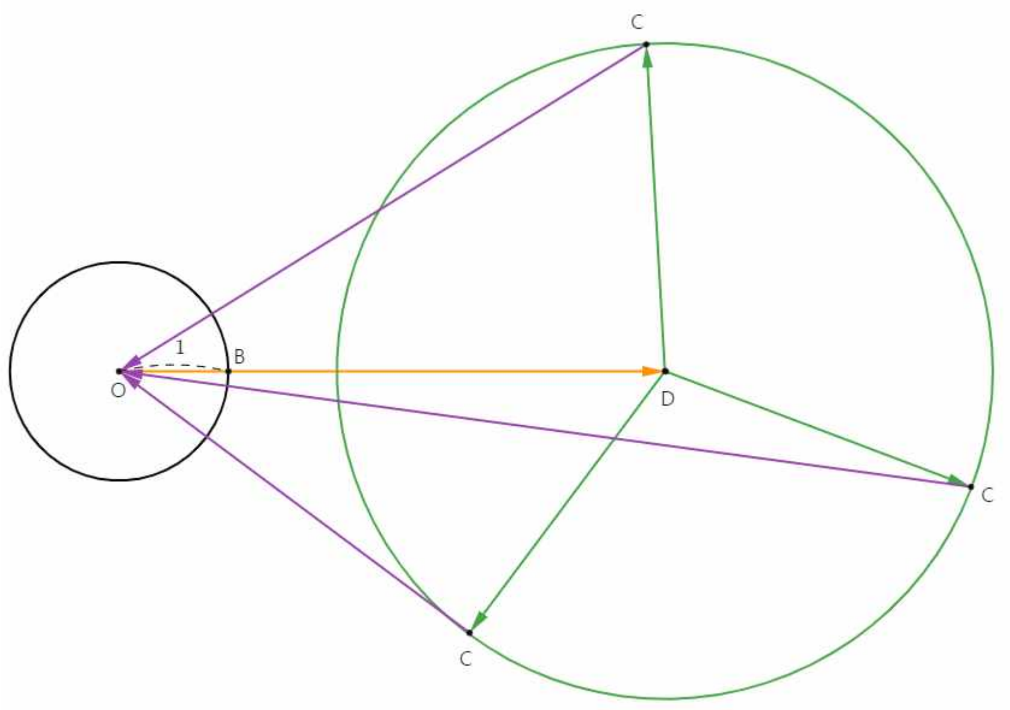


$5\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}$ 가 $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE}$ 가 되었습니다.

세 벡터의 합이 $\vec{0}$이므로 $x\overrightarrow{OA}$는 $\overrightarrow{EO}$가 되어야 겠네요.



그런데 C는 원 위를 움직이는 동점이기 때문에 C의 자취는 원이 되고 $3\overrightarrow{OC}$의 자취는 반지름이 3인 원이 되겠죠.



이렇게 점 C는 반지름이 3인 원 위에 존재하고 그에 따라서 $x\overrightarrow{OA}$도 정해집니다.

이렇게 이 문제의 벡터방정식 해석은 끝나고 이후 과정은 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 의 최대를 구하는 내적의 최대최소 유형으로 넘어갑니다.

<요약>

벡터방정식 유형 풀이방법은 2가지.

1. 꼬리물기
2. 시점통일 (벡터쪼개기)

꼬리물기를 최우선적으로 적용해보고 안 된다 싶으면 시점통일을 하시면 됩니다.