한 눈에 보는 정답

0회									
1	②	7	①	13	④	19	⑤	25	22
2	⑤	8	②	14	③	20	④	26	32
3	①	9	⑤	15	③	21	①	27	195
4	③	10	⑤	16	②	22	18	28	13
5	①	11	④	17	①	23	27	29	5
6	④	12	②	18	③	24	15	30	12

1회									

2회									

3회									

4회									

0회 정답 및 해설

1	②	7	①	13	④	19	⑤	25	22
2	⑤	8	②	14	③	20	④	26	32
3	①	9	⑤	15	③	21	①	27	195
4	③	10	⑤	16	②	22	18	28	13
5	①	11	④	17	①	23	27	29	5
6	④	12	②	18	③	24	15	30	12

1. [수 I] 행렬과 그래프

행렬 $3A$의 모든 성분의 합이 15이므로 행렬 A의 모든 성분의 합은 5이다.

$\therefore\ 2+0+1+a=5$에서 $a=2$

정답 ②

2. [수 II] 삼각함수

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$에서 $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=-\dfrac{3}{4}$

$\therefore\ \cos4\theta=2\cos^2 2\theta-1=\dfrac{1}{8}$

정답 ⑤

3. [수 II] 미분법

$f(x)=xe^{-x^2}$에서 $f'(x)=e^{-x^2}+(-2x^2e^{-x^2})$

$\therefore\ f'(\sqrt{2})=-\dfrac{3}{e^2}$

정답 ①

4. [수 I] 수열

$a_n=a_1+(n-1)d$라 하면

$a_2+a_3+a_4+a_5=4a_1+10d=5a_1$에서

$a_1=10d$ 이다.

$\therefore\ a_k=(k+9)d=20d$에서 $k=11$

정답 ③

5. [적통] 확률

$\mathrm{P(A)}+\mathrm{P(B^C)}=\mathrm{P(A)}+(1-\mathrm{P(B)})=\dfrac{1}{2}$에서

$\mathrm{P(A)}-\mathrm{P(B)}=-\dfrac{1}{2}$ …(ㄱ)

$\mathrm{P(A\cup B)}=\mathrm{P(A)}+\mathrm{P(B)}=\dfrac{3}{4}$ …(ㄴ)

($\because$ 두 사건 A, B가 배반)

$\therefore$ 두 식 (ㄱ), (ㄴ)을 연립하면 $\mathrm{P(B)}=\dfrac{5}{8}$

정답 ⑤

6. 수열의 극한

무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n+2n}{n}\right)$이 수렴하므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2n}{n}=0$, 즉 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=-2$이고

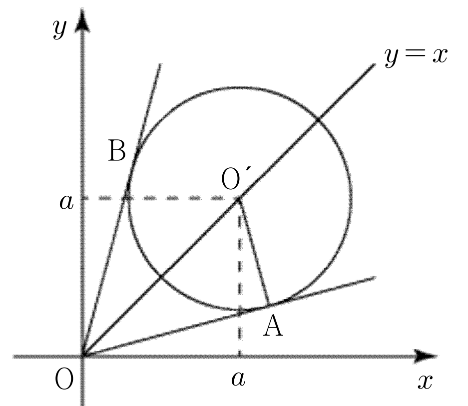
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n+nb_n)=3$에서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}+b_n\right)=0$

이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=2$

정답 ④

7. [기벡] 일차변환과 행렬

행렬 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환 f는 회전변환이다.



점 A가 회전변환 f에 의해 옮겨지는 점을 B라 할 때, 그림과 같이 θ가 최대가 되는 경우는 직선 OA와 직선 OB가 원 C에 접하는 경우이다.

원 C의 중심을 O´라 할 때, 원의 접선의 성질에 의해 $\angle\mathrm{AOO'}=\angle\mathrm{BOO'}=\dfrac{\pi}{6}$이므로

(단, O는 원점)

$\overline{\mathrm{OO'}}=\overline{\mathrm{AO'}}\times\sec\dfrac{\pi}{6}=12$이고, 점 O´는 직선 $y=x$에 있으므로 직선 OO´가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{4}$이다.

$\therefore\ a=\overline{\mathrm{OO'}}\times\cos\dfrac{\pi}{4}=6\sqrt{2}$

정답 ①

8. [적통] 확률

철수가 확인한 숫자가 영희가 확인한 숫자보다 큰 사건을 A라 할 때, $n(\mathrm{A})={}_{10}\mathrm{C}_2=45$이다.

(10개의 공 중 임의로 2개를 선택해 큰 숫자가 적힌 공을 철수에게 준다고 생각)

두 사람이 확인한 숫자의 합이 짝수인 사건을 B라 할 때, 이는 모두 짝수를 확인한 경우 또는 모두 홀수를 확인한 경우이므로

(i) 모두 짝수를 확인한 경우

짝수가 적힌 5개의 공 중 임의로 2개를 선택해 큰 숫자가 적힌 공을 철수에게 주는 경우와 같으므로, 경우의 수는 ${}_5C_2=10$ 이다.

(ii) 모두 홀수를 확인한 경우

(i)과 마찬가지로 경우의 수는 ${}_5C_2=10$ 이다.

$\therefore$ 구하는 확률 $\mathrm{P(B|A)}$은 $\dfrac{10+10}{45}=\dfrac{4}{9}$이다.

정답 ②

9. [적통] 순열과 조합

다항식 $(x+x^2+\cdots+x^n)(x+1)^n$의 전개식에서 x^n의 계수는 다항식 $(x+1)^n$의 전개식에서

(상수항)+(x의 계수)+⋯+(x^{n-1}의 계수)

와 같으므로

${}_nC_0+{}_nC_1+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^n-1=63$,

즉, $n=6$이다.

$\therefore$ 구하는 x^2의 계수는 ${}_6C_0+{}_6C_1=7$

정답 ⑤

10. [적통] 통계

주어진 제시문에서 $\hat{p}=\dfrac{20}{100}=\dfrac{1}{5}$이고,

신뢰구간 $\left[\hat{p}-k\dfrac{\sqrt{\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}}{\sqrt{100}},\ \hat{p}+k\dfrac{\sqrt{\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}}{\sqrt{100}}\right]$,

즉, $\left[\hat{p}-\dfrac{k}{25},\hat{p}+\dfrac{k}{25}\right]$가 $[a,3a]$와 같으므로

$\hat{p}=2a$에서 $a=\dfrac{1}{10}$이고, $\dfrac{k}{25}=a$에서 $k=2.5$

$\therefore\ \mathrm{P}(|Z|\le2.5)=2\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)=0.98$

이므로 $x=98$

정답 ⑤

11. [기벡] 벡터

구 S_1의 중심과 평면 α와 구 S_1의 접점을 지나는 직선은 평면 α에 수직이므로 평면 α의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 할 때,

$\vec{n}=(2-0,2-0,2-1)=(2,2,1)$이다.

따라서 평면 α의 방정식이

$2(x-2)+2(y-2)+(z-2)=0$

즉, $2x+2y+z=10$이므로 점 $(4,4,9)$와 평면 α와의 거리가 구 S_2의 반지름이다.

$\therefore$ 구하는 구 S_2의 반지름은

$$\frac{2\times4+2\times4+9-10}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=5$$

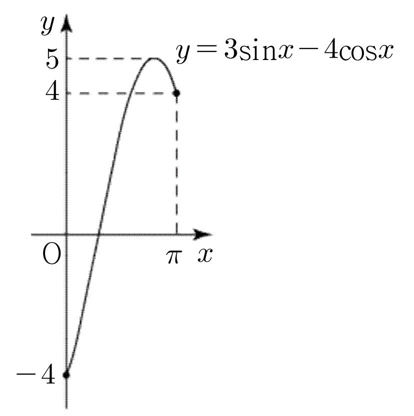
정답 ④

12. [수 II] 삼각함수

$3\sin x-4\cos x=5\sin(x-\alpha)$ 이므로

(단, $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$)

$y=3\sin x-4\cos x(0\le x\le\pi)$의 그래프를 나타내면 다음과 같다.



(i) $1\le n\le3$, $n=5$ 일 때, $a_n=1$

(ii) $n=4$ 일 때, $a_n=2$

(iii) $n\ge6$ 일 때, $a_n=0$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1\times4+2\times1=6$

정답 ②

13. [수 I] 지수함수와 로그함수

점 A의 x좌표를 k라 하면 점 C의 x좌표는 $k-2^k$ 이므로, $\dfrac{2^k-2^{k-2^k}}{2^k}=\dfrac{3}{5}$에서

$2^k=t$로 치환하면

$\dfrac{t-\dfrac{t}{2^t}}{t}=1-\dfrac{1}{2^t}=\dfrac{3}{5}\ (\because t>0)$ 이므로

$2^t=\frac{5}{2}$이다.

$\therefore$ (점 A의 y좌표)$=t=\log_2 5-1$

정답 ④

14. [수 II] 미분법 + [적통] 적분법

$\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}$이므로 두 점 B, C의 x좌표를 각각 $p,\ -p$라 하자.

$S_1=\int_0^p a^x dx=\frac{1}{\ln a}(a^p-1)$

$S_2=\int_{-p}^0 a^x dx=\frac{1}{\ln a}\left(\frac{a^p-1}{a^p}\right)$

이므로 $S_1S_2=k(S_1-S_2)$에서 $k=\frac{1}{\ln a}$이다.

한편, $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}$이기 위해서는

방정식 $a^x=2x$의 해가 존재해야 하는데

원점에서 곡선 $y=a^x$에 그은 접선의 기울기가 2보다 작으면 이를 만족한다.

즉, 곡선 $y=a^x$의 접선의 방정식

$y-a^t=a^t\ln a(x-t)$ 에 $x=y=0$을 대입하면

$t=\log_a e$이므로 $e\ln a\le 2$이다.

$\therefore k\ge\frac{e}{2}$

정답 ③

15. [수 II] 방정식과 부등식 + [적통] 순열과 조합

$b+c+d\ge 3$이므로 부등식의 해의 개수가 6이도록 하는 a의 범위는 $1\le a\le 5$ 이다.

(i) $a=1$일 때, 구하는 부등식의 해는

$-(b+c+d)<x\le 0$ 이므로 $b+c+d=6$

$b'+c'+d'=3\,(b'\ge 0,\ c'\ge 0,\ d'\ge 0)$ 에서

순서쌍 (a,b,c,d)의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_3=10$

(ii) $a=2$일 때, 구하는 부등식의 해는

$-(b+c+d)<x\le 0$ 이므로

(i)과 마찬가지로

순서쌍 (a,b,c,d)의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_3=10$

(iii) $3\le a\le 5$일 때, 구하는 부등식의 해는

$-(b+c+d)<x<a,\ x\ne 1$이므로

$b+c+d=n\,(n=3,4,5)$

$b'+c'+d'=n-3\,(b'\ge 0,\ c'\ge 0,\ d'\ge 0)$

에서 순서쌍 (a,b,c,d)의 개수는

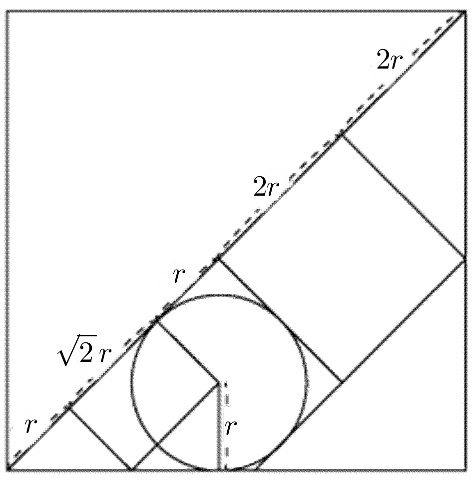
${}_3\mathrm{H}_0+{}_3\mathrm{H}_1+{}_3\mathrm{H}_2=1+3+6=10$

$\therefore$ 순서쌍 (a,b,c,d)의 개수의 총합은 30

정답 ③

16. [수 I] 수열의 극한

원 R_1의 반지름을 r이라 할 때,



보조선을 위와 같이 그리면

$(6+\sqrt{2})r=\sqrt{2}$이므로 $r=\frac{\sqrt{2}}{6+\sqrt{2}}$이다.

한편, $l_1=2\times 2\pi r=4\pi r$이고,

길이비가 $2r$, 도형의 개수비가 2이므로

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n=\frac{4\pi r}{1-2\times 2r}=\frac{4(\sqrt{2}+1)}{3}\pi$

정답 ②

17. [수 I] 수열

$\sum_{k=1}^{n} a_k+(n+1)a_{n+1}=6n^2$ ⋯(ㄱ)

$\sum_{k=1}^{n-1} a_k+na_n=6(n-1)^2\ (n\ge 2)$ ⋯(ㄴ)

에서 식 (ㄱ)에서 식 (ㄴ)을 빼주면

$(n+1)a_{n+1}=\boxed{n-1}\times a_n+12n-6$

$(n\ge 2)$

에서 $f(n)=n-1$이다.

이 때, $b_n=n(n-1)a_n$ 이라 하면

위 식에서

$n(n+1)a_{n+1}=n(n-1)a_n+12n^2-6n$

$(n\ge 2)$

이므로

$b_{n+1}=b_n+\boxed{12n^2-6n}\ (n\ge 2)$

에서 $g(n)=12n^2-6n$이다.

$$b_3-b_2=g(2)$$
$$b_4-b_3=g(3)$$
$$\vdots$$
$$b_n-b_{n-1}=g(n-1)$$

위의 나열된 식끼리 모두 더하면

$b_n=b_2+\sum_{k=2}^{n-1}(12n^2-6n)$

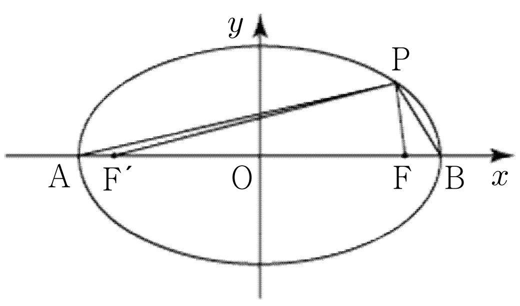
$=n(n-1)\times\boxed{4n-5}$

이므로 $h(n)=4n-5$이다.

$\therefore \frac{g(10)}{f(6)\times h(6)}=12$

정답 ①

18. [기벡] 이차곡선



타원의 다른 초점을 F′라 할 때,

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}=8$이므로 삼각형 PFF′는 이등변삼각형이다.

따라서 $\angle\mathrm{PFF'}=\theta$라 할 때,

$\cos\theta=\frac{1}{8}$이므로 제이코사인정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PA}}^2=2^2+9^2-2\cdot 2\cdot 9\cdot\frac{1}{8}=\frac{161}{2}$

$\overline{\mathrm{PB}}^2=2^2+1^2-2\cdot 2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{11}{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=86$

정답 ③

19. [수 I] 행렬과 그래프

ㄱ. 첫 번째 식에서

$AB-A=A(B-E)=B(A-E)=E$

이므로 $AB=BA$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $A^{-1}=B-E$ 이므로

두 번째 식에서 $B^2(A^{-1})^2+E=O$ 이다.

이 때, 양변의 오른쪽에 A^2을 곱하면

$A^2+B^2=O$ 이므로 $B^2=-A^2$ (참)

ㄷ. $(A+tB)(A-tB)=A^2-t^2B$

$(\because AB=BA)$

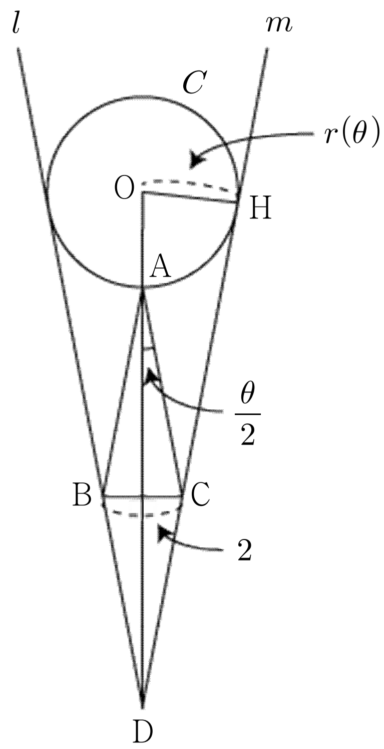
이다. 한편

$A^2-t^2B=(t^2+1)A^2\ (\because B^2=-A^2)$

에서 A의 역행렬이 존재하므로 임의의 실수 t에 대하여 $A+tB$ 의 역행렬 또한 존재한다. (참)

정답 ⑤

20. [수 II] 함수의 연속과 극한



직선 l과 직선 m의 교점을 D라 할 때,

삼각형 ABC와 삼각형 DBC는 합동이다.

(ASA 합동)

따라서, 원 C의 중심을 O, 직선과 접하는 한 접점을 H라 할 때, $\angle\mathrm{ODH}=\frac{\theta}{2}$이므로

$\frac{r(\theta)}{2\cot\frac{\theta}{2}+r(\theta)}=\sin\frac{\theta}{2}$에서

$r(\theta)=\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{1-\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{2\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\frac{\theta}{2}}$이다.

따라서

$2\lim_{\theta\to\pi-0}\frac{\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)(\pi-\theta)}{\cos\frac{\theta}{2}}=4\lim_{\theta\to\pi-0}\frac{(\pi-\theta)}{\cos\frac{\theta}{2}}$

에서 $\pi-\theta=k$로 치환하면

$\theta\to\pi-0$ 일 때, $k\to+0$ 이므로

구하는 극한값은 $4\lim\limits_{k\to+0}\dfrac{k}{\sin\dfrac{k}{2}}=8$

정답 ④

21. [적통] 적분법

양변을 x에 대해 미분하면

$a+g(x)=g'(x)f(g(x))=xg'(x)$

$(\because f^{-1}(x)=g(x))$

이므로,

(i) $x=0$일 때, $\underline{g(0)=-a}$ …(ㄱ) 이다.

(ii) $x\neq 0$일 때, $\dfrac{g'(x)}{g(x)+a}=\dfrac{1}{x}$의 양변을 x에 대해 적분하면

$\ln|g(x)+a|=\ln|x|+C$ 이므로

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 기울기가 양수인 일차함수 …(ㄴ) 임을 알 수 있다.

$(\because$ $g(x)$는 증가함수)

한편, 처음 주어진 식에 $x=1$을 대입하면

$\int_0^{g(1)}f(x)dx$이고, (ㄱ)에서 $f(-a)=0$

이므로 $g(1)$로 가능한 값은 0 또는 $-2a$ 일 수 있지만, $g(1)=-2a$일 경우, (ㄱ)과 (ㄴ)을 동시에 만족할 수 없으므로

$\underline{g(1)=0}$ …(ㄷ) 이다.

따라서, $g(x)=a(x-1)$($\because$ ㄱ, ㄷ) 이고,

$f(a)+g(a)=8$에서 $a=3$ $(\because a>0)$이므로

$f(a^2)+g(a^2)=f(9)+g(9)=28$

정답 ①

22. [수 II] 함수의 연속과 극한

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(16x-15)+(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{\ln(16x-16)}{x-1}+2)$

에서 $x-1=k$로 치환하면

$x\to1$일 때, $k\to0$ 이므로 구하는 극한값은

$\lim\limits_{k\to0}(\dfrac{\ln(1+16k)}{k}+2)=18$

정답 18

23. [기벡] 일차변환과 행렬

일차변환 f를 나타내는 행렬을 A라 할 때,

$A\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $A^2\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 이므로

$A\begin{pmatrix}3&-1\\5&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ 이다.

$A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}5&-1\\9&-2\end{pmatrix}$

이므로, $A^{-1}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 에서 $a=10$, $b=17$이다.

$\therefore a+b=27$

정답 27

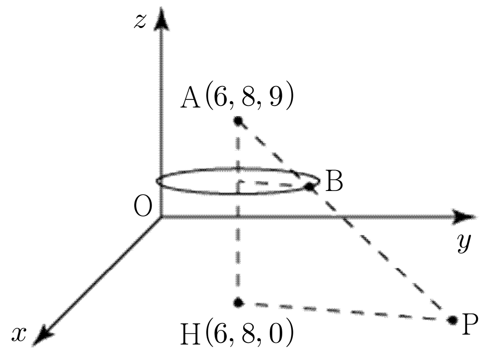
24. [수 I] 지수함수와 로그함수

$p_1+p_2+\cdots+p_9=1$에서 $k=1$ 이므로

$p_2=\log3-\log2$ 이다. $\therefore 10^{k+p_2}=15$

정답 15

25. [기벡] 공간도형과 공간좌표



점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(6,8,0)$이다.

이 때, $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{AP}}$이므로 점 B의 자취는

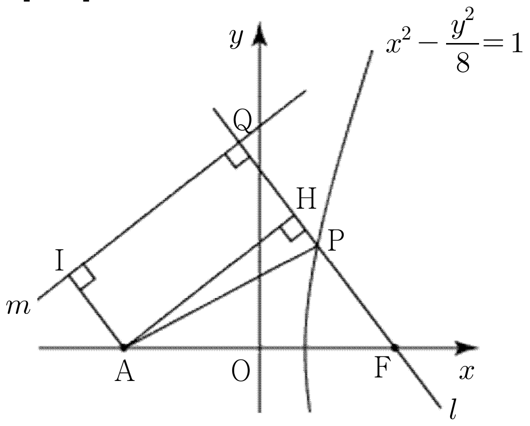
선분 AH를 $1:2$로 내분하는 점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 xy평면에 평행한 원이다.

따라서, 점 P의 자취는 점 H를 중심으로 하고 반지름의 길이가 12인 xy평면 위의 원이므로

선분 OP의 길이의 최댓값은 $\overline{\mathrm{OH}}+12=22$

정답 22

26. [기벡] 이차곡선



점 A는 쌍곡선 위의 다른 한 초점이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=k$ 라 하면 $\overline{\mathrm{PA}}=k+2$이다.

한편 점 A에서 직선 l과 직선 m에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 할 때

사각형 AHQI는 직사각형이고, $\overline{\mathrm{AI}}=2$ 이므로 $\overline{\mathrm{PH}}=k-2$이다.

피타고라스의 정리를 적용하면

$\overline{\mathrm{AH}}=2\sqrt{2k}$이고, $\overline{\mathrm{FH}}=2k-2$, $\overline{\mathrm{AF}}=6$ 이므로

다시 피타고라스의 정리를 적용하면

$k=2\sqrt{2}$이므로, $a^2=4k^2=32$

정답 32

27. [수학 II] 방정식과 부등식

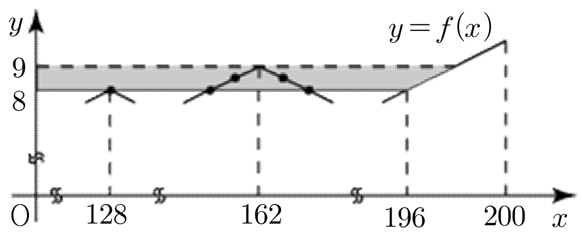
주어진 무리방정식을 풀기 위해

$\sqrt{[f(x)]+1}=X$ 로 치환하면

$X^2-X-6=(X+2)(X-3)=0$에서

$X=3$ $(\because X\geq0)$이므로 $[f(x)]=8$이다.

$8\leq f(x)<9$의 범위에 속하고 x좌표가 정수인 점을 그래프로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore$ 자연수 a의 최댓값은 195

정답 195

28. [적통] 통계

닫힌 구간 $[0,1]$에서 $f(x)=ax(x+\dfrac{b}{a})\geq0$ 이므로

(i) $a>0$일 때, $-\dfrac{b}{a}\leq0$에서 $b\geq0$

(ii) $a<0$일 때, $-\dfrac{b}{a}\geq1$에서 $b\geq-a$

…(ㄱ)

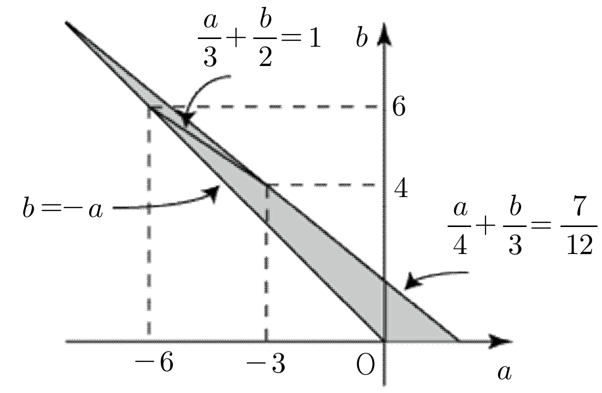
$\mathrm{P}(0\leq X\leq1)=1$이므로

$\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}=1$ …(ㄴ)

$\mathrm{E}(X)=\int_0^1 xf(x)dx=\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{3}\leq\dfrac{7}{12}$ …(ㄷ)

(ㄱ)~(ㄷ)에서 점 (a,b)의 자취를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.

* ㄴ에서 자취를 구하고, ㄱ, ㄷ에서 자취의 범위(색칠된 부분)를 알 수 있다.



점 (a,b)의 자취의 길이는

$l=\sqrt{\{(-6)-(-3)\}^2+(6-4)^2}=\sqrt{13}$이므로

$l^2=13$

정답 13

29. [적통] 적분법

$h(x)=\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{f(x)}{2f'(x)}$, $i(x)=x$로 놓으면

$\int_0^2\dfrac{1}{g(x)}dx=\int_0^2 h(x)i'(x)dx$ 이다.

이 때, 부분적분법을 통해 정적분을 계산하면

$\int_0^2\dfrac{1}{g(x)}dx$

$=\left[\dfrac{x}{g(x)}\right]_0^2-\int_0^2\dfrac{x\left[\{f'(x)\}^2-f(x)f''(x)\right]}{2\{f'(x)\}^2}dx$

에서 등비수열의 성질에 의해

$f'(x)f''(x)=4\{f'(x)\}^2$ 이므로

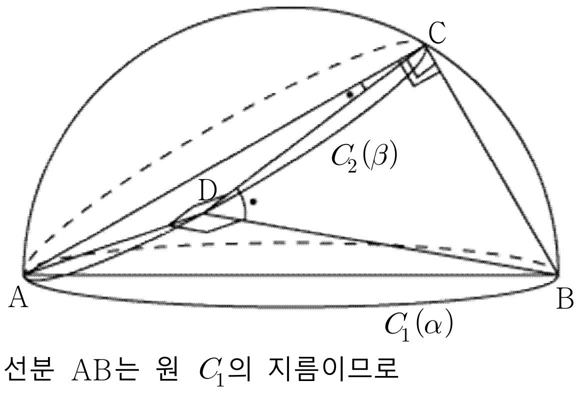
구하는 정적분의 값은

$2+\int_0^2\dfrac{3}{2}x\,dx=5$

$(\because$ 닫힌 구간 $[0,2]$에서 $f'(x)\neq0)$

정답 5

30. [기벡] 공간도형과 공간좌표



선분 AB는 원 C_1의 지름이므로

$\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ 이다.

선분 AC는 원 C_2의 지름이므로

$\angle \mathrm{ADC} = 90^\circ$ 이다.

따라서, 삼수선의 정리에 의해 직선 BC는 평면 β에 수직이므로 $\angle \mathrm{BCD} = 90^\circ$ 이다.

* 직선 BC는 평면 β에 수직인 것을 증명하는 방법은 이 외에도 여러 가지가 있으므로 생각해보기를 권장한다.

평면 BCA와 평면 BCD가 이루는 각의 크기와 평면 BDA와 평면 CDA가 이루는 각의 크기가 같으므로 $\angle \mathrm{ACD} = \angle \mathrm{BDC}$에서 삼각형 ACD와 삼각형 BDC는 합동이다.

(ASA 합동)

따라서, $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BD}} = a$, $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BC}} = b$라 하면

$a^2 + b^2 = 4$ 이므로, 조건 (나)에서

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times b \times \sqrt{a^2 - b^2}\right) \times b$$

$$= \frac{1}{6} b^2 \sqrt{4 - 2b^2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

에서 $b = 1$이다.

* $b^2 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$인 경우도 방정식을 성립시키나 문제에서 요구하는 답이 유리수이므로 제외

$\therefore \cos^2\theta = \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{3}{4}$이므로 $pq = 12$

정답 12