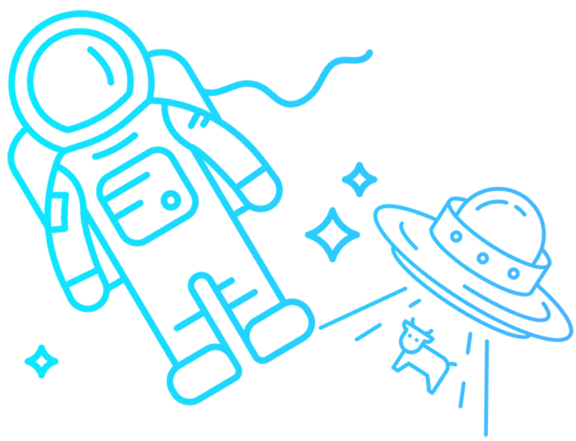
6월 모의평가 대비
우주설 모의고사 1회
정답 및 해설

우주설 지음

걱정 마라.
절망이야말로 가장 순수하고
치열한 열정이다.
사람들이 불행해지는 것은
진실하게 절망하지 않기 때문이다.

이문열, 젊은 날의 초상

우주설



2023학년도 대학수학능력시험 우주설 모의고사 해설지

수학 영역

6월 모의평가 대비 1회

정 답

공통과목									
1	④	2	③	3	②	4	①	5	②
6	①	7	④	8	③	9	⑤	10	②
11	⑤	12	③	13	①	14	④	15	②
16	32	17	12	18	6	19	3	20	64
21	34	22	31						
미적분									
23	③	24	⑤	25	④	26	②	27	①
28	②	29	7	30	18				

1. 정답 : ④

생략

2. 정답 : ③

생략

3. 정답 : ②

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 양변을 제곱하면,

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$, $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$

4. 정답 : ①

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a-x^2}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+x-a)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a-x^2}\right)}$$

극한값이 존재하기 위해서는 $a=2$ 이어야 한다.

$$\lim_{x\to1}\frac{(x^2+x-2)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x^2}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x^2}\right)}=\frac{3}{2}$$

5. 정답 : ②

생략

6. 정답 : ①

$\int_0^3 v(t)dt=0$ 을 이용하여 구한다.

7. 정답 : ④

공차를 d라 하면, $a_1=3$, $\sum_{k=1}^{4}S_k=10a_1+10d$ 이므로

$d=\dfrac{3}{2}$ 을 얻고, $S_4=4a_1+6d$ 이다.

8. 정답 : ③

그래프를 그린 뒤 $x>-4$인 정수 x를 차례로 대입하면
부등식 $|x|\le\log_2(x+4)$ 을 만족시키는 정수 x의 값은
$-1, 0, 1, 2$ 이다.

9. 정답 : ⑤

삼차함수에 절댓값을 씌었을 때, 실수전체의 집합에서
미분가능하려면 $(x-c)^3$ 꼴이어야 한다.

$g(x)=|f(x)-f'(x)|$
$\quad=|x^3+3x^2+(a-12)x+(b-a)|$

에서 이차함의 계수가 3이므로

$x^3+3x^2+(a-12)x+(b-a)=(x+1)^3$ 이어야 한다.

$a=15$, $b=16$ 을 얻는다.

10. 정답 : ②

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$이므로 (ⅰ), (ⅱ) 중 하나를 만족해야 한다.

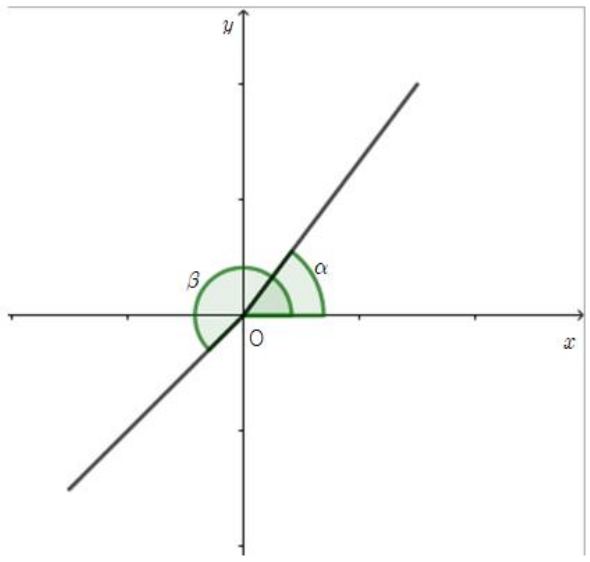
(ⅰ) $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\tan\beta=1$

(ⅱ) $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$, $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$, $\tan\beta=-1$

(ⅰ)의 경우 α는 제1사분면의 각이고, β는 제1사분면 혹은
제3사분면의 각이다. 이때 β가 제1사분면의 각이면 $\alpha<\beta$를
만족할 수 없다.

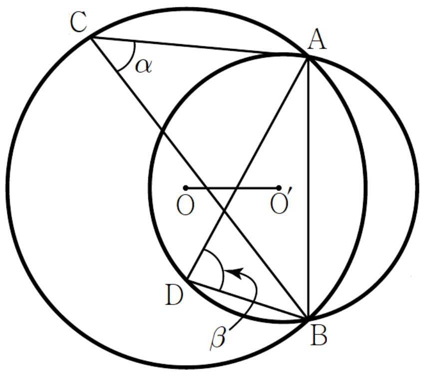
(ⅱ)의 경우 α는 제3사분면의 각이고, β는 제2사분면의 각이다.
이 경우도 $\alpha<\beta$를 만족할 수 없다.

그러므로 α는 제1사분면, β는 제3사분면의 각이다.
이를 그림으로 나타내면 아래와 같다.



따라서 구하려는 값은 $\cos(\beta)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

11. 정답 : ⑤



삼각형 ABC와 삼각형 ABD에서 사인법칙을 적용하면

$\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\dfrac{4}{3}=\dfrac{\overline{\mathrm{AO}}}{\overline{\mathrm{AO'}}}$ 를 얻는다. 삼각형 $\mathrm{AOO'}$에서 $\overline{\mathrm{AO}}=4k$,

$\overline{\mathrm{AO'}}=3k$라 하면 이등변 삼각형 $\mathrm{AO'B}$에서 $\angle\mathrm{AO'B}=2\beta$이고,

$\angle\mathrm{AOO'}=\alpha$이므로, $\angle\mathrm{OAO'}=(\beta-\alpha)$이다.

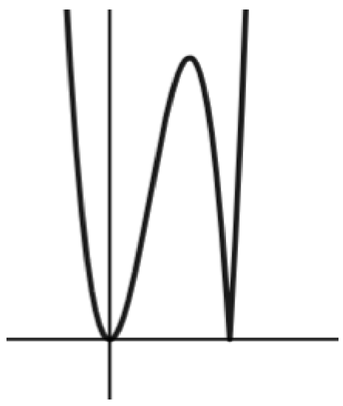
$\cos(\beta-\alpha)=\dfrac{5}{6}$, $\overline{\mathrm{OO'}}=1$를 이용하여 코사인 법칙을 적용하면

$1^2=(4k)^2+(3k)^2-2\times(4k)\times(3k)\times\dfrac{5}{6}$

$k=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 이다.

12. 정답 : ③

$f(x)=\left|x^3-6x^2\right|$ 라 하고, 방정식 $f(x)=f(k)$를 풀기위해 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려보면 $x=0,\ 6$에서 극솟값을 $x=4$에서 극댓값을 갖는 것을 알 수 있고 조건을 만족시키는 $k=-1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5$ 이다.



13. 정답 : ①

$2^x=t\ \ (t>0)$으로 치환하면

$\dfrac{1}{4}t^2+(\sin y)t+1\le 0$

최고차항의 계수가 양수인 이차부등식에서 0이하인 부분이 있으려면 판별식이 0이상이어야 한다.

$\sin^2 y-1\ge 0$

$\Rightarrow \sin y=\pm 1$

그런데 $\sin y=1$이면, $\dfrac{1}{4}t^2+(\sin y)t+1\le 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4}(t+2)^2\le 0$이므로 $t=-2$, 그러나 이는 $(t>0)$에 위배된다.

$\sin y=-1$이면, $\dfrac{1}{4}t^2+(\sin y)t+1\le 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4}(t-2)^2\le 0$이므로 $t=2$에서 성립. $x=1$을 얻는다.

$y=-\dfrac{\pi}{2}$일 때, $|x-y|$는 최솟값을 갖는다.

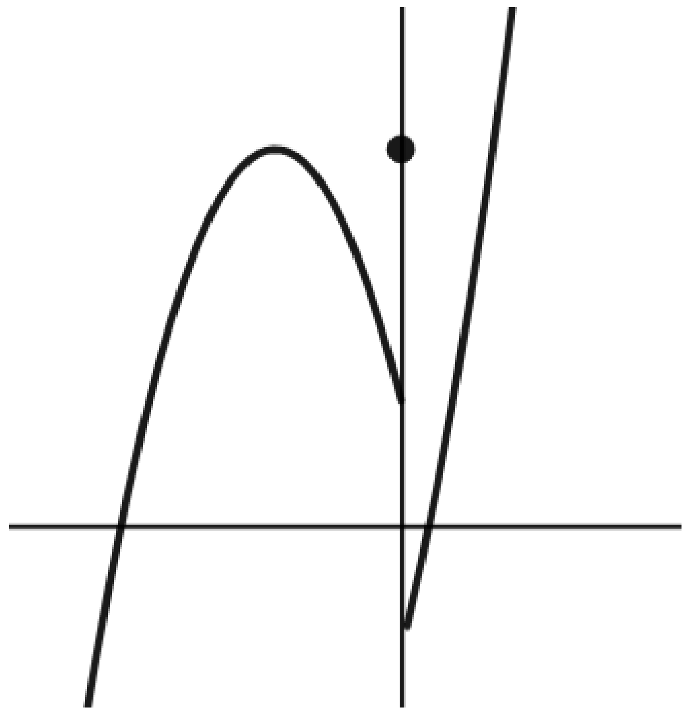
14. 정답 : ④

주어진 항등식을 정리하면 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x>0) \\ f(0) & (x=0) \\ -g(x) & (x<0)\end{cases}$ 이다.

$f(x)$가 연속함수 일 경우 (가) 조건을 만족시키기 위해서는 극값을 세 군데에서 가져야 한다. 이는 불가하므로 $f(x)$는 불연속함수임을 예상할 수 있다.

(나) 조건을 통해 함수 $f(x)$가 갖는 이차함수의 꼭짓점에 y좌표가 6임을 예상해 볼 수 있다.

그런데 이 경우 $h(6)-\lim\limits_{t\to 6+}h(t)=1$이므로 실근의 개수가 변하게 하는 요인이 부족하다. 그렇다면 또 다른 변수는 불연속점 $f(0)$의 y좌표가 6인 경우를 생각해 볼 수 있는데

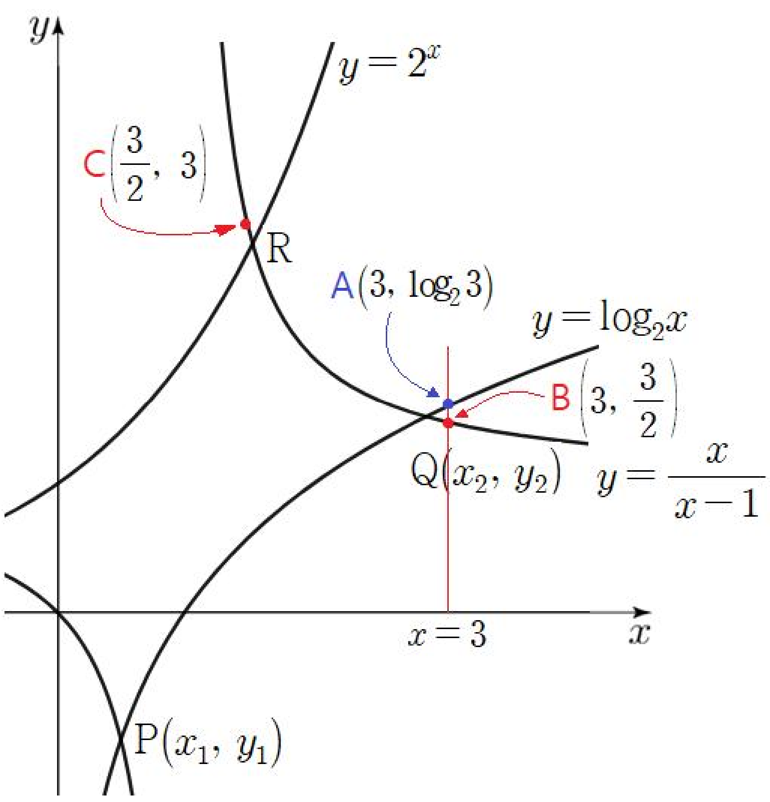


해당 개형은 모든 조건을 만족시키고, $\beta=0$이다.

$g(0)=-2$를 이용하여 $g(x)=(x+2)^2-6$을 얻고

$f(0)+f(2)=16$을 알 수 있다.

15. 정답 : ②



ㄱ. $y_1 < -1$과 $x_2 < 3$에 대하여 알아보자.
직선 $y=-1$을 그어보면
방정식 $\log_2 x=-1$, $\frac{x}{x-1}=-1$의 실근은 $x=\frac{1}{2}$로 동일하므로
점 $P(x_1, y_1)$의 좌표는 $P\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$이다.
$x_2 < 3$을 조사하기 위해 직선 $x=3$을 그어보자.
$\frac{3}{2} < \log_2 3$이므로 $x_2 < 3$을 알 수 있다. 그러므로
ㄱ은 참이다.

ㄴ. 유리함수 $y=\frac{x}{x-1}$는 자기 자신을 역함수로 갖는 함수이므로
$y=x$에 대칭이다.
그러므로 $y=\log_2 x$ 와 $y=2^x$에 각각 만나는 점 Q, R은
$y=x$에 대칭인 점이고, 직선 QR의 기울기는 -1이다.
$\angle PQR > \frac{\pi}{2}$은 직선 PQ의 기울기가 1보다 큰 지 묻는 것이다.
ㄱ의 풀이과정에서 표시한 점 $B\left(3, \frac{3}{2}\right)$에 대해서
직선 PB의 기울기는 1이고 직선 PQ의 기울기는 직선 PB의
기울기보다 크므로 $\angle PQR > \frac{\pi}{2}$이다.
ㄴ은 참이다.

ㄷ. 점 $B\left(3, \frac{3}{2}\right)$를 $y=x$에 대칭시켜 점 $C\left(\frac{3}{2}, 3\right)$를 표시하자.
직선 PC의 기울기는 4인데, 직선 PR의 기울기는 직선 PC의
기울기보다 작으므로
ㄷ은 거짓이다.

16. 정답 : 32
생략

17. 정답 : 12
$a_{k+1}+a_{k+2}=3$에 대하여 등차수열의 대칭성을 활용하면
$S_{k+2}-S_k=a_k+a_{k+1}=3$
$S_{2k+2}=(k+1)(a_k+a_{k+1})$
$\quad =(k+1)3$
$\quad =39$
$k=12$

18. 정답 : 6
생략

19. 정답 : 3
$a=2^p$, $b^{\log_3 a}=3^{pq\log_3 2}=8$에서
$pq\log_3 2=\log_3 8$
$pq=\log_3 8\times\log_2 3$
$\quad =3$

20. 정답 : 64
조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$는
$f(-1)=1$, $f(1)=-1$이며 $-1\le x\le 1$에서 감소함수인 경우와
$f(-1)=-1$, $f(1)=1$이며 $-1\le x\le 1$에서 증가함수인 경우가 있다.

그래프 개형을 그려서 관찰하면 후자의 경우가
$f(4)$의 값이 더 크게나올 것을 알 수 있다.

$f(x)-x=a(x+1)x(x-1)$이라 하자. (단, $a>0$)
$f'(x)=a(3x^2-1)+1$에 대하여
$-1\le x\le 1$에서 $f'(x)\ge 0$이므로
$a\le 1$을 얻는다.
따라서 $f(4)$는 $a=1$일 때, 최댓값 64이다.

(역함수가 존재하려면 항상 $f'(x)\ge 0$ 또는 $f'(x)\le 0$이여야 하는 것은 아닙니다.)

21. 정답 : 34

출제의도는 여러 가지수열
그것을 알아냈는가?

$a_n + a_{100-n} = \dfrac{n^2}{101}$ 에 양변에 $\displaystyle\sum_{n=1}^{50}$ 을 하면,

$$a_{50} + \sum_{n=1}^{99} a_n = \frac{1}{101} \times \frac{50\times51\times101}{6} = 425 \cdots (ㄱ)$$

$a_m + a_{m+1} = \dfrac{9(m+1)}{50}$ 에 $m = 2M-1$ 을 대입

M 이 자연수가 되면, m 은 양의 홀수가 된다.

$a_{2M-1} + a_{2M} = \dfrac{9}{25}M$ 에 대하여

양변에 $\displaystyle\sum_{M=1}^{50}$ 을 하면,

$$a_{100} + \sum_{M=1}^{99} a_M = \frac{9}{25} \times \frac{50\times51}{2} = 459 \cdots (ㄴ)$$

(ㄴ)-(ㄱ)을 하면,

$a_{100} - a_{50} = 34$

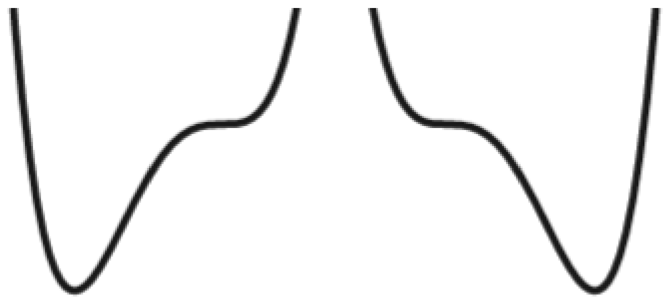
22. 정답 : 31

$\displaystyle\int_0^x f(t)dt = F(x)$ 라 하자. $F(0)=0$ 이고

$g(x)=F(x)\times\{F(x)-F(1)\}$ 로 해석하자.

$g(x)=0$ 의 실근이 3개 이므로 $F(x)=0$, $F(x)=F(1)$ 의 실근이 총 3개 라는 것인데

(가): $F'(x)=0$ 의 실근이 2개 이므로 가능한 개형으로



를 떠올릴 수 있다. $|g(x)|$ 가 미분가능하기 위해서는 $g(x)=0$ 일 때, $g'(x)=0$ 이어야 하는데

$g'(x)=2F'(x)\times\left(F(x)-\dfrac{F(1)}{2}\right)$ 이므로

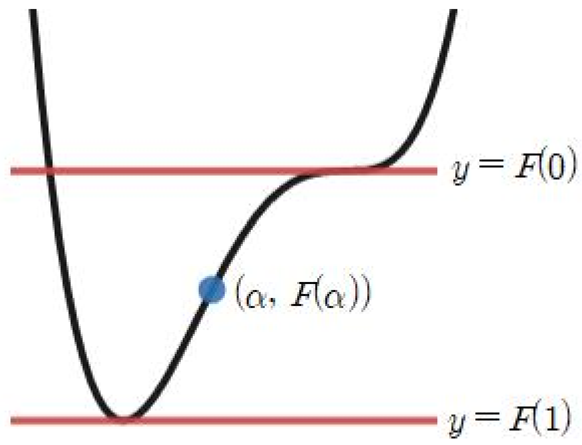
$F(x)=0$ 또는 $F(1)$ 일 때, $2F'(x)=0$ 또는 $F(x)=\dfrac{F(1)}{2}$ 이어야 한다.

$F(1)\neq0$ 이므로 $F(x)=0$ 또는 $F(1)$ 일 때

$F(x)=\dfrac{F(1)}{2}$ 를 만족시킬 수 없으며 $g(x)$ 가 미분가능하려면

$F(x)=0$ 또는 $F(1)$ 일 때 $F'(x)=0$ 이어야 한다는 결론이 나온다.

또한 (다) 조건을 만족시키는 점 $(\alpha, F(\alpha))$ 를 표시하면
조건을 만족시키는 $F(x)$ 의 개형은 아래와 같다.



사차함수의 비율관계를 통해

$F(x)=\dfrac{1}{4}x(x-4)^3$ 을 얻고 $F(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 $-\dfrac{27}{4}$ 을 얻는다.

미적분

23. 정답 : ③

24. 정답 : ⑤

25. 정답 : ④

생략

26. 정답 : ②

$x-1=t$로 치환하면 $x\to1$일 때 $t\to0$이다. 구하려는 극한값은

$\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{f(1+t)}{t^3}}=\lim_{t\to0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{\frac{f(1+t)}{t^2}}=e$이다. 그런데

$\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$이므로 $\lim_{t\to0}\frac{f(1+t)}{t^2}=1$이어야 한다. 따라서

$f(1+t)=t^3+at^2+bt+c$라고 하면 $b=c=0$이어야 하고,

$\lim_{t\to0+}\frac{t^3+at^2}{t^2}=1$이므로 $a=1$이다. 그러므로 $f(1+t)=t^3+t^2$이고,

이 식에 $t=3$을 대입하면 $f(4)=f(1+3)=36$이다.

27. 정답 : ①

$e^{f(x)}$의 역함수를 $g(x)$라 하자.

$\Rightarrow e^{f(g(x))}=x$이므로 $f(g(x))=\ln x$, $f'(g(x))\times g'(x)=\frac{1}{x}$ 이다.

$f(g(e))=1$이므로 $g(e)=\frac{\pi}{4}$이고, $f'(x)=2\tan x\times\frac{1}{\cos^2 x}$이므로

$f'(g(e))\times g'(e)=\frac{1}{e}$

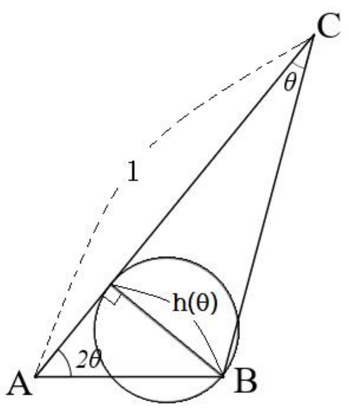
$\Rightarrow 2\times1\times2\times g'(e)=\frac{1}{e}$

$g'(e)=\frac{1}{4e}$

28. 정답 : ②

사인법칙 비례관계를 쓰지 않은 풀이

i) 원의 반지름이 최소일 때

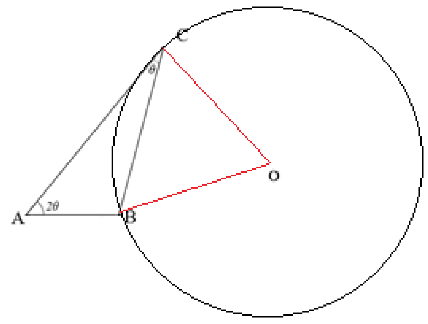


=> 원의 반지름은 점 B에서 내린 수선의 길이 $h(\theta)$를 지름으로 할 때에 최솟값을 가진다.

$\overline{AC}=\frac{h(\theta)}{\tan2\theta}+\frac{h(\theta)}{\tan\theta}$이므로,

$h(\theta)=\frac{\tan\theta\tan2\theta}{\tan\theta+\tan2\theta}=\frac{2\tan^2\theta}{3\tan\theta-\tan^3\theta}$ $r(\theta)=\frac{\tan^2\theta}{3\tan\theta-\tan^3\theta}$

ii) 원의 반지름이 최대일 때



=> 점C가 접점일 때 원의 반지름이 최댓값을 가진다. O에서 점B, C까지 거리가 반지름 $R(\theta)$로 같은 이등변삼각형

OBC에 대하여, $\overline{BC}=\frac{h(\theta)}{\sin\theta}$ 이고, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\frac{1}{2}\overline{BC}}{R(\theta)}$이므로,

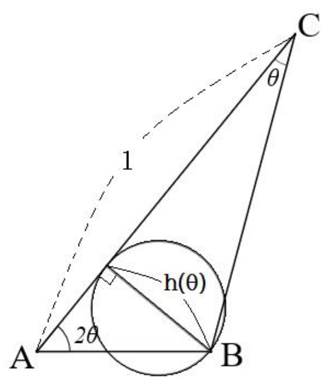
$\sin\theta=\frac{h(\theta)}{2R(\theta)\sin\theta}$ $R(\theta)=\frac{h(\theta)}{2\sin^2\theta}=\left\{\frac{\tan^2\theta}{(\sin^2\theta)(3\tan\theta-\tan^3\theta)}\right\}$

$\lim_{\theta\to0+}r(\theta)R(\theta)=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan^4\theta}{(3\tan\theta-\tan^3\theta)^2\sin^2\theta}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\frac{\tan\theta}{\theta}\right)^4}{\left(\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{\theta}\right)^2\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2}=\frac{1^4}{3^2\times1^2}=\frac{1}{9}$

사인법칙 비례관계를 쓴 빠른풀이

i) 원의 반지름이 최소일 때

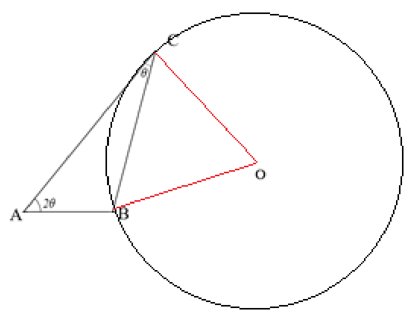


=> 원의 반지름은 점 B에서 내린 수선의 길이 $h(\theta)$를 지름으로 할 때에 최솟값을 가진다.

$\lim_{\theta\to0+}$인 상황에서 $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$가 1:2로 $\overline{AC}$를

나눠 가지므로, $\overline{BC}=\frac{2}{3}$이고, $h(\theta)=\frac{2}{3}\sin\theta$, $r(\theta)=\frac{1}{3}\sin\theta$

ii) 원의 반지름이 최대일 때



=> 점C가 접점이 될 때의 원의 반지름이 최댓값을 가진다.

마찬가지로 $\lim_{\theta\to0+}$인 상황에서 $\overline{BC}=\frac{2}{3}$, 사인법칙을 사용하면

$\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{2}{3}}{\sin\theta}=\lim_{\theta\to0+}2R(\theta)$이고, $\lim_{\theta\to0+}R(\theta)=\frac{1}{3\sin\theta}$

29. 정답 : 7

$f(x)=\theta$라 하여 라이프니츠 미분법으로 정리해보겠습니다.

삼각형 ABE에서 사인법칙을 이용하면

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AE}}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}\Rightarrow\frac{1}{\sin\theta}=\frac{(1-x)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$$

$$\Rightarrow\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=(1-x)\sin\theta$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=(1-x)\sin\theta$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\cos\theta=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}-x\right)\sin\theta$$

$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때, $\frac{1}{2}\cos\theta=\sin\theta$이므로

$\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$이다.

$\frac{1}{2}\cos\theta=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}-x\right)\sin\theta$의 양변을

x에 대하여 미분하면

$$-\frac{1}{2}\sin\theta\frac{d\theta}{dx}=-\sin\theta+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}-x\right)\cos\theta\frac{d\theta}{dx}$$

$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$을 대입.

$$-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{5}\frac{d\theta}{dx}=-\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\frac{d\theta}{dx}$$

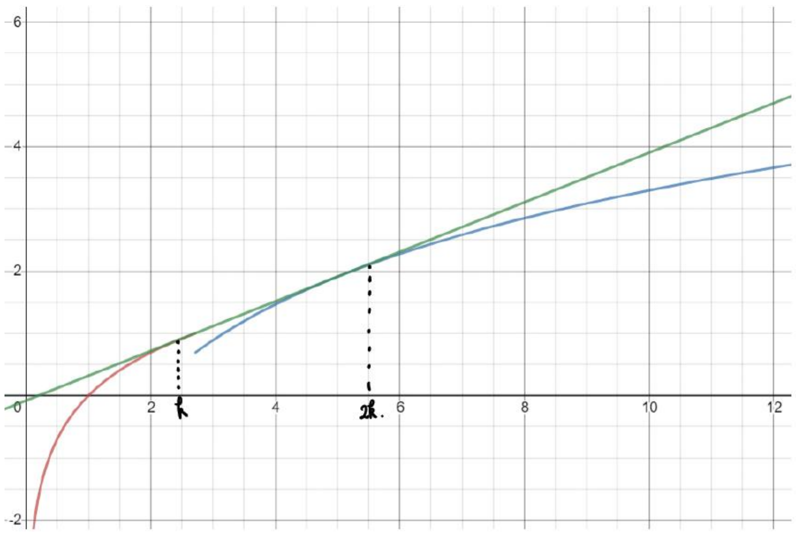
$\Rightarrow\frac{d\theta}{dx}=\frac{2}{5}$를 얻는다.

30. 정답 : 18

직선 $y=m(x-e)+b$는 점 (e,b)를 지나고,
기울기가 m이다.
$f(e)=-a+\ln(2e^2)=-a+2+\ln 2$인데,
$a+b>2+\ln 2$이므로 $b>f(e)$이다.

$g(m)$이 불연속인 지점은 곡선 $y=f(x)$와 직선
$y=m(x-e)+b$ 접하는 상황에서의 m이다.

그런데 $g(m)$이 양의 실수 전체의 집합에서
연속이므로, $0<x<e$, $x>e$인 구간에서
직선 $y=m(x-e)+b$이 공통접선을 갖는다.



$(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $(-a+\ln(2x^2))'=\frac{2}{x}$이므로 접선의
기울기가 동일하기 위해서 접점의 x좌표를 각각
k, $2k$라 하자. ($\frac{e}{2}<k<e$)

$(k, f(k))$에서 그은 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{k}x+\ln k-1$

$(2k, f(2k))$에서 그은 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{k}x+\ln 8k^2-a-2$

두 접선이 동일하기 위해서는 $\ln k-1=\ln 8k^2-a-2$
$\therefore a=\ln 8k-1$

$\frac{e}{2}<k<e$에서 $2\ln 2<\ln 8k-1(=a)<3\ln 2$이고,
$2<e<2\sqrt{2}$이므로 $a=2$이다. ($\because a$는 정수)
공통접선을 계산하면 $y=\frac{8}{e^3}x+2-\ln 8$이고,
점 (e,b)를 지나므로
$b=2+\frac{8}{e^2}-\ln 8$이다. $p=2$, $q=8$, $r=8$
$\therefore p+q+r=18$

6월 모의평가 기준 예상 등급컷

등급컷	원점수
1등급	80점
2등급	71점

우주설 수학

Naver ID, 우주설 (포만한)
ORBI ID, 우주설 (오르비)