제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $(-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2^2 \times 2^{-2} = 1$

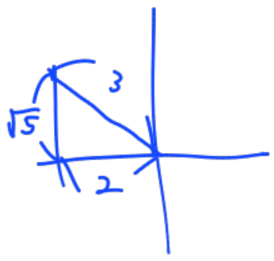
2. 함수 $f(x) = x^3 + 9$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

$3x^2$ $f'(2) = 12$

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

3. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 θ 에 대하여 $\cos^2\theta = \frac{4}{9}$ 일 때, $\sin^2\theta + \cos\theta$ 의 값은? [3점]

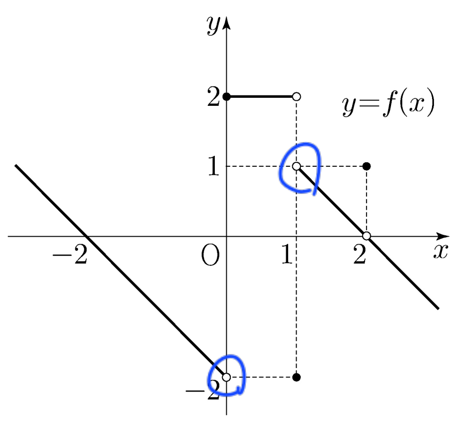
① $-\frac{4}{9}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{2}{9}$ ④ $-\frac{1}{9}$ ⑤ 0



$\frac{5}{9} - \frac{2}{3}$

$= \frac{5}{9} - \frac{6}{9} = -\frac{1}{9}$

4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$ 의 값은? [3점]

-2 1

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 + a_3 = \frac{3}{2}$$

일 때, $a_6 + a_7$의 값은? [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

$ar(1+r) = \frac{3}{2}$.

$a = \frac{1}{4}$

$r(1+r) = 6$.

$r = 2$.

$\frac{3}{2} \times r^4 = \frac{3}{2} \times 16 = 24$

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} x + a & (x < -1) \\ x & (-1 \le x < 3) \\ bx - 2 & (x \ge 3) \end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

$-1 + a = 1$

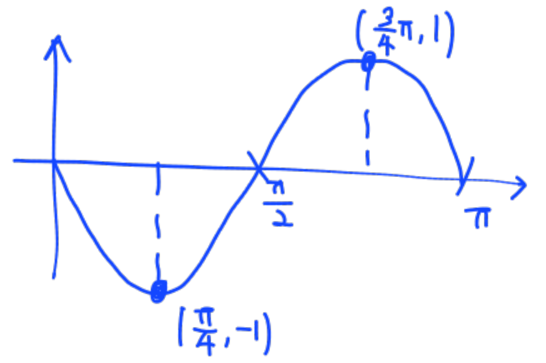
$a = 2$

$3 = 3b - 2$. ~~$-3 = 3b - 2$.~~

$b = \frac{5}{3}$.

7. 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = -\sin 2x$가 $x = a$에서 최댓값을 갖고 $x = b$에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

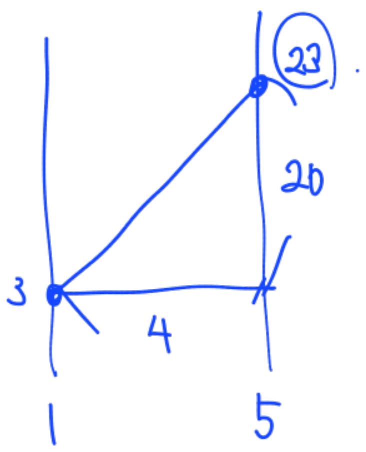


$\frac{2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$.

8. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최솟값은? [3점]

> (가) $f(1)=3$
>
> (나) $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 5$이다.

① 21　② 22　③ 23　④ 24　⑤ 25



9. 두 함수

$$f(x)=x^3-x+6,\quad g(x)=x^2+a$$

가 있다. $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x)\geq g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

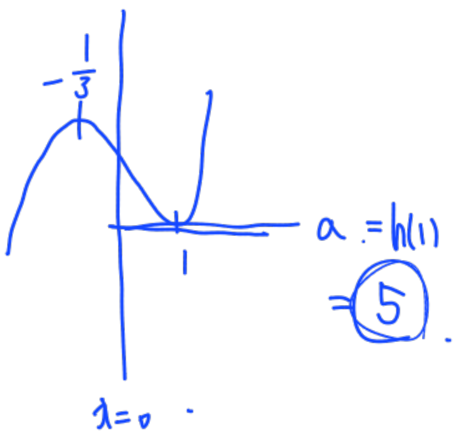
$x^3-x+6\geq x^2+a$.

$x^3-x^2-x+6\geq a$　$(x\geq 0)$.

$h'(x)=3x^2-2x-1$

1　-1

3　1



$a=h(1)$

$=5$.

10. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]

$\overline{AC}=x$

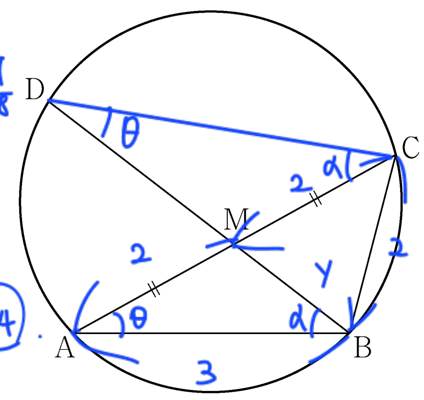
$2^2=x^2+3^2-2\cdot3\cdot x\cdot\frac{7}{8}$

$x^2-\frac{21}{4}x+5=0$.

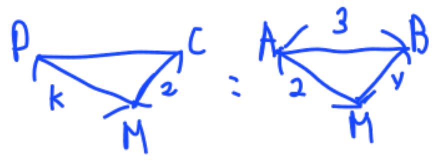
$4x^2-21x+20=0$.

1　-4

4　-5　$x=4$.



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$　② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$　③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$　④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$　⑤ $\sqrt{10}$



$y^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\times\frac{7}{8}$

$=13-\frac{21}{2}$

$=\frac{5}{2}$.

$k:2=2:y$

$4=\frac{\sqrt5}{\sqrt2}\times k$

$k=\frac{4\sqrt2}{\sqrt5}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

11. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

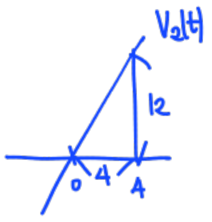
$$v_1(t) = 2 - t, \quad v_2(t) = 3t$$

$x_1(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2$.

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

$t=4$

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24



12. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

$a_n = 3n - k$.

(가) $a_5 \times a_7 < 0$
(나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \lvert a_{k+6} \rvert = 6 + \sum_{k=1}^{6} \lvert a_{2k} \rvert$

$15-k<0$, $21-k>0$ ⇒ $15<k<21$.

$a_7 + \cdots + a_{12} = 6 + (-a_3 - a_4 + |a_6| + a_8 + a_{10} + a_{12})$.

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

① $a_6 < 0$. $|18-k<0|$ $18<k<21$

$6a_{9.5} = 6 + 18d = 60$.

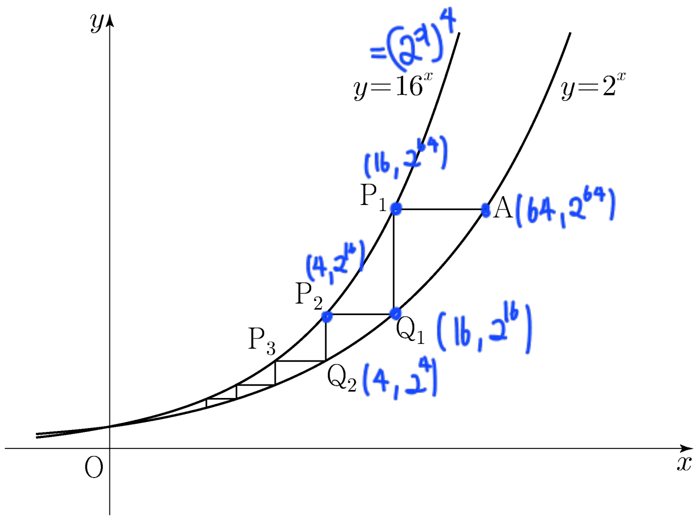
$k=18.5$

$a_{9.5} = 28.5 - k = 10$.

$a_{10} = 30 - 18.5 = 11.5 = \frac{23}{2}$.

13. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $\mathrm{A}(64,\ 2^{64})$이 있다. 점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.
점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n < \frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는? [4점]

① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60



$x_n = 64 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n < \frac{1}{k}$

$x_5 = 64 \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{16} \geq \frac{1}{k}$

$x_6 = 64 \times \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{64} < \frac{1}{k}$

$16 \leq k < 64$

48

14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x<0) \\ \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x\geq 0) \end{cases}$$

연속 미분가능.

$-F(x)+F(0)$

$F(x)-F(0)$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

$g(x).$ $(0,0)$

$g(0)=0$
$g'(0)=0.$
$-f(0)=f(0)$
$f(0)=0.$

$g'(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<0) \\ f(x). & (x\geq 0) \end{cases}$

<보 기>

ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f(x)=\begin{cases} -3x^2 & (x<0) \\ 3x^2. & (x\geq 0) \end{cases}$

$g(x)=x^3$

$g'(x)=3x^2=\{\ x>0.$

0 3k 0 0 0.

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
> 이다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점] 2

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$a_1 \xrightarrow[\text{변화량 } 0]{21\text{번}} a_{22}$

$\dfrac{a}{k+1} - \dfrac{b}{k} = 0$

$a+b=21$

$a = 21-b$

$\dfrac{ak-bk-b}{k(k+1)} = 0$

$(21-2b)k = b$

$k = \dfrac{b}{21-2b}$

자연수

$(a-b)k - b = 0$

a, b, k 자연수

$b=10$ $k=10$

$b=9$ $k=\frac{9}{3}=3$

$b=8$ (x)

$b=7$ $k=\frac{7}{7}=1$

단답형

16. 방정식 $\log_2(x+2)+\log_2(x-2)=5$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x>2$

$x^2-4=32$

$x=6$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3+6x^2$이고 $f(0)=-1$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x) = 2x^4+2x^3-1$

$f(-2) = 32-16-1 = 15$

$|f(t)| = h(t)$

18. $\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=250$ 일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

$a=3$

우함수.

19. 함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 4일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

$b=4$

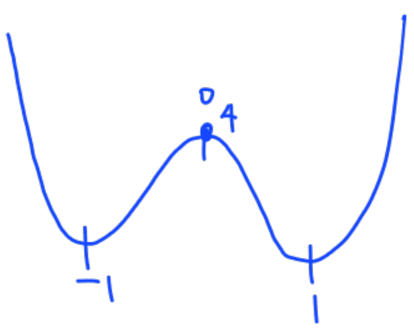
$f'(x) = 4x^3+2ax$

$= x(4x^2+2a)$

$2a=-4$

$a=-2$

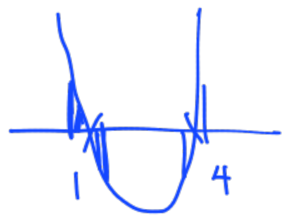
$a+b=2$



20. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

|간격 넓이| 근 주변에서 작아짐.

$|f(t)| = h(t)$

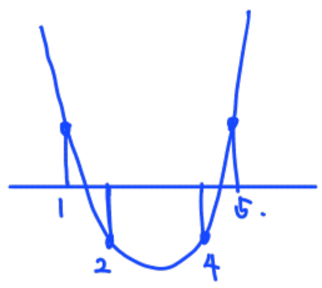


$g(x) = H(x+1) - H(x)$

$g'(x) = h(x+1) - h(x).$

$g'(1) = h(2) - h(1) = 0.$

$g'(4) = h(5) - h(4) = 0.$



$f(1) = -f(2)$

$f(4) = -f(5)$

$f(x) = 2x^2+ax+b.$

$f(1) = a+b+2.$

$f(2) = 2a+b+8.$

$3a+2b+10=0.$

$2b=-3a-10.$

$f(4) = 4a+b+32.$

$f(5) = 5a+b+50.$

$9a+2b+82=0.$

$6a+72=0$

$a=-12.$

$f(0) = b = 13.$

$f(x) = x^2 + mx + n$.

21. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

$\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right)^{\frac{2}{3}}$.

$\left(\frac{3}{4n+16}\right)^{\frac{2}{3}} = 2^k$. k는 정수.

$\frac{3}{4n+16} = 2^{\frac{3}{2}k}$ 유리수 k: $2\times$ 음의정수.

$= \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^6}, \frac{1}{2^9}, \frac{1}{2^{12}}$

$4n+16 = 2^{3m} \times 3$.
$n+4 = 2^{3m-2} \times 3$.

$2^7 \times 3$

$m=1$ $n+4 = 6$. $n=2$

$m=2$ $n+4 = 48$ $n=44$.

$m=3$ $n+4 = 384$ $n=380$

$m=4$ $n+4 = 3\times 2^{10}$.

380
46
426

22. 두 양수 a, $b\,(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} (x+3)f(x) & (x<0) \\ (x+a)f(x-b) & (x \geq 0) \end{cases}$$

3차 3차 근x 근0.

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> $$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$$ 의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

$3f(0) = af(-b)$.

$(x+3)^2(x-k)$.

$f(x) = (x+3)(x-k)$.

$b+k = 6$.

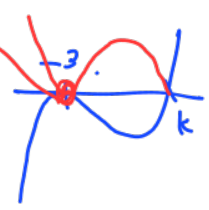
$af(-b) = (3-b)(-b-k) \times a$

$= a(6b-18)$.

$3f(0) = -9k$

$g(t)$의 근 $-3, 6$ 뿐.

7ㅈ.



$$\lim_{x\to -3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\left[\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right]}$$

$(x+3)(x-k)$

$(x+3)f(x)$: 근 $-3, -3, k$

$k=-3$
$b=9$

$(x+a)f(x-b)$: 근 $-a, -3+b, b+k$

<0. 6. 6.

$$g(x) = \begin{cases} (x+3)^3 \\ (x+a)(x-6)^2 \end{cases}$$

$g(0) = 27$

$g(0) = 36a$

$a = \frac{3}{4}$.

$g(4) = \left(4+\frac{3}{4}\right)\times 4 = 16+3 = 19$.

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

56 - 52.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

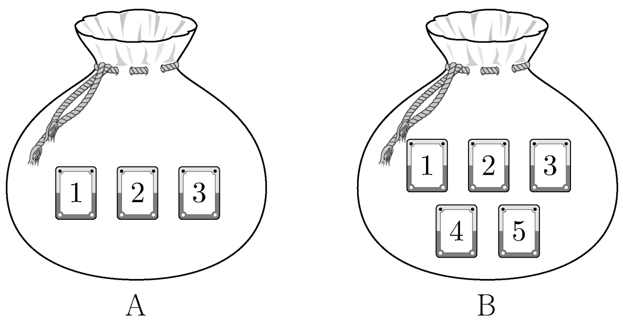
23. 5개의 문자 a, a, a, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

$\frac{5!}{3!} = 20$

24. 주머니 A에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 3장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있다.
두 주머니 A, B에서 각각 카드를 임의로 한 장씩 꺼낼 때, 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 차가 1일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{7}{15}$ ④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{3}{5}$



A	B
1	2
2	3
3	4
2	1
3	2

전체 3×5 =15.

해당5.

$\frac{1}{3}$.

25. 수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수이면 점 P를 양의 방향으로 1만큼 이동시키고, 6의 약수가 아니면 점 P를 이동시키지 않는다.

$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{3}$

이 시행을 4번 반복할 때, 4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{13}{18}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{17}{18}$

P좌표 0 $\quad {}_4C_0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

P좌표 1 $\quad {}_4C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81}$

$1 - \frac{9}{81} = \frac{8}{9}$

26. 다항식 $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$ 의 전개식에서 x^5의 계수가 12일 때, x^6의 계수는? (단, n은 자연수이다.) [3점]

0, 2, 4, ⋯ 0, 3, 6, ⋯

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

앞 뒤

x^2 x^3 뿐!

${}_4C_1 \times {}_nC_1 = 12$

$n=3$

x^6 만들기

앞	뒤	
0	6	$\Rightarrow {}_3C_2 = 3$
6	0	$\Rightarrow {}_4C_3 = 4$

7

27. 네 문자 a, b, X, Y 중에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건이 성립하도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

> (가) 양 끝 모두에 대문자가 나온다.
> (나) a는 한 번만 나온다.

① 384 ② 408 ③ 432 ④ 456 ⑤ 480

대 _ a _ _ 대

양끝 대문자 선택 ⇒ $2^2 = 4$
가운데 4자리중 a 선택 ⇒ $4 = 4$
나머지 3자리에 b, X, Y 중선택 ⇒ $3^3 = 27$

108
4
432

28. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 택할 때, 택한 수가 5의 배수 또는 3500 이상일 확률은? [4점]

① $\frac{9}{20}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{13}{20}$

전체: _ _ _ _ $5! = 120$.

① 5의 배수

_ _ _ 5 : $4\times3\times2 = 24$

② 3500 이상.

35 _ _ : $3\cdot2 = 6$.
4 _ _ _ : $4\cdot3\cdot2 = 24$
5 _ _ _ : $4\cdot3\cdot2 = 24$
54

③ 5의 배수 & 3500 이상.

4 _ _ 5. : $3\cdot2 = 6$.

$\frac{24+54-6}{120} = \frac{72}{120} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

단답형

29. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(f(1))=4$
(나) $f(1) \le f(3) \le f(5)$

1 2 3 4 5   1 2 3 4 5

① $f(1)=1$ (x)

② $f(1)=2 \to f(2)=4$.

$2 \le f(3) \le f(5)$ $\;{}_4H_2$

$f(4)$: 5

50.

③ $f(1)=3 \to f(3)=4$

$3 \le 4 \le f(5)$: 2

$f(2), f(4)$: 5×5

50.

115.

④ $f(1)=4 \to f(4)=4$

$4 \le f(3) \le f(5)$: ${}_2H_2 = {}_3C_2$

$f(2)$: 5.

15.

⑤ $f(1)=5 \to f(5)=4$ (x)

30. 주머니에 1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 12개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기 순서대로 a, b, c라 하자. $b-a \ge 5$일 때, $c-a \ge 10$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

차이 : $c-a\ge2$, $b-a\ge1$, $c-b\ge1$

전체 : ${}_{12}C_3 = \frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1} = 220$

$\frac{P(b-a\ge5 \cap c-a\ge10)}{P(b-a\ge5)}$.

$b-a=5$.

a	b	c
1	6	→ 7~12
2	7	→ 8~12
3	8	→ 9~12
4	9	→ 10~12
5	10	→ 11~12
6	11	→ 12.

총 21 $c-a\ge10$. 3

$b-a=6$.

a	b	c
1	7	→ 8~12
2	8	→ 9~12
3	9	→ 10~12
4	10	→ 11, 12
5	11	→ 12.

총 15 $c-a\ge10$. 3.

$b-a=7$

a	b	c
1	8	9~12
2	9	10~12
3	10	11, 12
4	11	12

총 10 해당 3.

$b-a=8$.

a	b	c
1	9	10~12
2	10	11, 12
3	11	12.

총 6 해당 3.

$b-a=9$

a	b	c
1	10	11, 12
2	11	12

총 3 해당 3.

$b-a=10$

a	b	c
1	11	12

총 1 해당 1

$\frac{\text{해당}\; 3\times5+1}{\text{총}\; 1+3+6+10+15+21} = \frac{16}{56} = \frac{2}{7}$ $p+q=9$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

70.53.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

$\frac{1}{n+\frac{3}{2}-n+\frac{1}{2}} = 1$

24. 곡선 $x^2-y\ln x+x=e$ 위의 점 $(e,\ e^2)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $e+1$ ② $e+2$ ③ $e+3$ ④ $2e+1$ ⑤ $2e+2$

$2x-\left(\frac{dy}{dx}\ln x+\frac{y}{x}\right)+1=0.$

$2e-(t+e)+1=0.$

$t=e+1.$

25. 함수 $f(x)=x^3+2x+3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

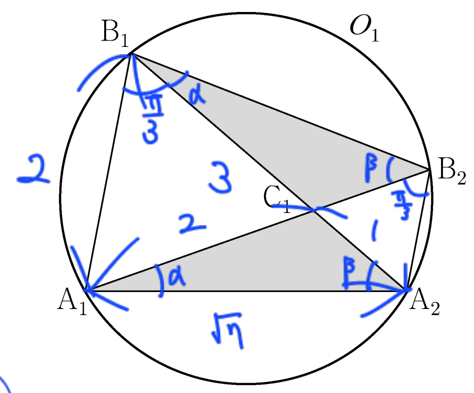
① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

$f'(x) = 3x^2+2$.

$g'(3) = \frac{1}{f'(g(3))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$

26. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1A_2}=3$이고 $\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 $A_1A_2B_1$과 이 삼각형의 외접원 O_1이 있다.
점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1에 평행한 직선이 원 O_1과 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 두 선분 A_1B_2, B_1A_2가 만나는 점을 C_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1A_2C_1$, $B_1C_1B_2$로 만들어진 ⧖ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1A_2에 평행한 직선이 직선 A_1A_2와 만나는 점을 A_3이라 할 때, 삼각형 $A_2A_3B_2$의 외접원을 O_2라 하자. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 B_3, C_2를 잡아 원 O_2에 ⧖ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1

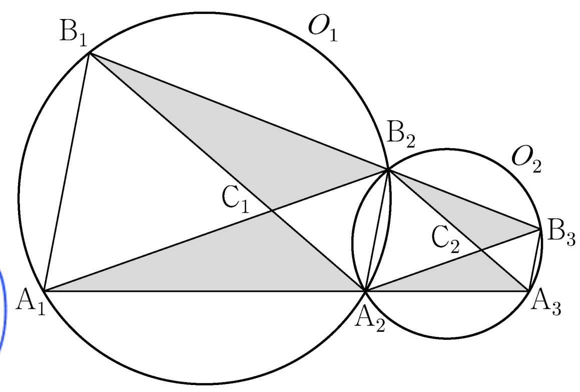


$\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$.

$\frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \cdot 3$

$\frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{4}$.

R_2



$\frac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

⋮ ⋮

① $\frac{11\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{13\sqrt{3}}{9}$
④ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

27. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=3$.

이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$a_n=3n+1$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots$

$\frac{3}{2}$.

28. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\neq 0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$$

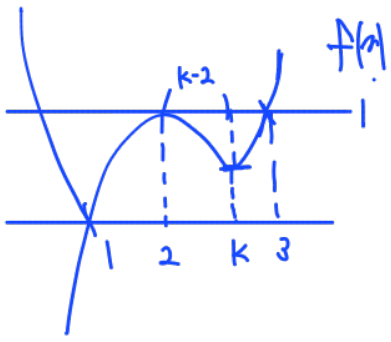
이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은? [4점]

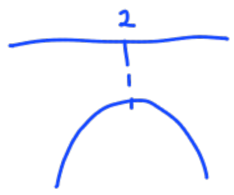
> (가) 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고,
> 함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소이다.
> (다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=0$.

$g'(2)=0$, $g(2)\leq 0$.

① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$ ④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$





$\ln|f(2)|\leq 0$

$|f(2)|\leq 1$

$g'(x)=\begin{cases}\frac{f'(x)}{f(x)}\\ 1\end{cases}$

$\oplus\to\ominus$.

$|f(x)|=1$ 근 3개.

$2+\frac{3}{2}(k-2)$

$\frac{3}{2}k-1$

$f(x)-1=\frac{1}{2}(x-2)^2\left(x-\frac{3}{2}k+1\right)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-3)$.

$f(1)-1=\frac{1}{2}\left(2-\frac{3}{2}k\right)$

$-2=2-\frac{3}{2}k$.

$\frac{3}{2}k=4$

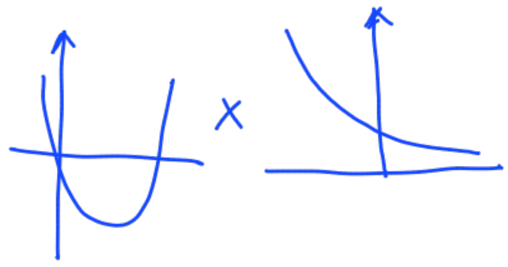
$k=\frac{8}{3}$

$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-3)+1$

$f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}}{9}\cdot-\frac{1}{3}+1$

$=\frac{25}{27}$

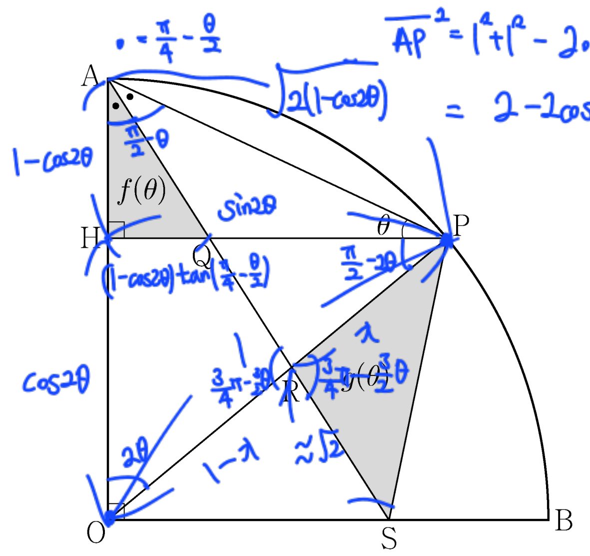
$\ln\frac{25}{27}$



단답형

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle$OAP를 이등분하는 직선과 세 선분 HP, OP, OB의 교점을 각각 Q, R, S라 하자. $\angle \mathrm{APH} = \theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PSR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta^3 \times g(\theta)}{f(\theta)} = k$일 때, $100k$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]

$\overline{AP}^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 2\theta = 2 - 2\cos 2\theta$



$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta^3 \times \cancel{\frac{1}{2}} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2(1-\cos 2\theta)}}{1+\sqrt{2(1-\cos 2\theta)}} \times \sin(\frac{3}{4}\pi - \frac{3\theta}{2})}{f(\theta) = \cancel{\frac{1}{2}} \times (1-\cos 2\theta)^2 \times \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta^3 \times 2\theta}{4\theta^4} = \frac{1}{2}$$

$100k = 50$

$1 - x : x = 1 : \sqrt{2(1-\cos 2\theta)}$

$x = \sqrt{2(1-\cos 2\theta)}\,(1-x)$

$x = \frac{\sqrt{2(1-\cos 2\theta)}}{1+\sqrt{2(1-\cos 2\theta)}}$

30. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \frac{x^2 - ax}{e^x}$$

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x) = f'(t)(x-t) + f(t)$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.

$g(5) + \lim_{t \to 5} g(t) = 5$일 때, $\lim_{t \to k-} g(t) \neq \lim_{t \to k+} g(t)$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$x \to \infty : 0$
$x \to -\infty : \infty$

$(x^2 - ax)e^{-x}$
$(2x-a)e^{-x} - (x^2 - ax)e^{-x}$
$(-x^2 + (a+2)x - a)e^{-x}$

접선의 방정식

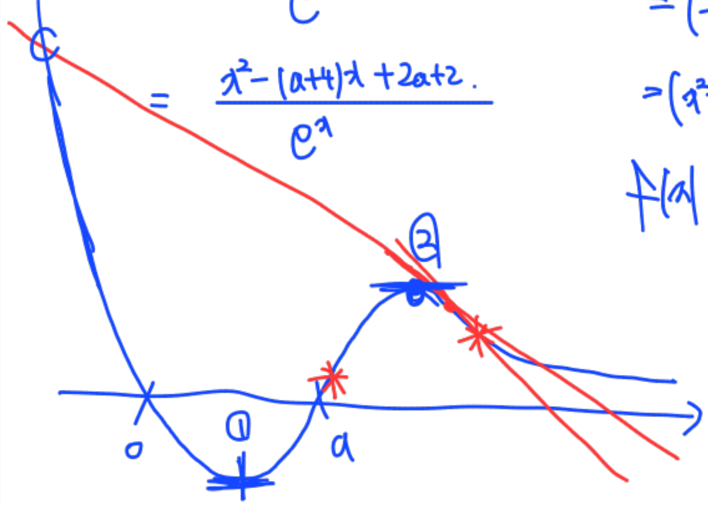
t에서 함수 f 접선의 교점 갯수 $: g(t)$

$f'(x) = \frac{(2x-a)e^x - (x^2-ax)e^x}{e^{2x}} = \frac{-x^2+(a+2)x-a}{e^x}$

$f''(x) = \frac{(-2x+a+2)e^x + (x^2 - (a+2)x + a)e^x}{e^{2x}}$

$= \frac{x^2 - (a+4)x + 2a + 2}{e^x}$

$f''(x)$
$= (-2x+a+2)e^{-x} + (x^2 - (a+2)x + a)e^{-x}$
$= (x^2 - (a+4)x + 2a + 2)e^{-x}$
$= (x-5)(x-a+1)e^{-x}$



$f(x)$

2번째 변곡

접선의 변화가 생김

$g(5)$: 변곡 $\Rightarrow 2$

$\lim_{t \to 5} g(t)$: 변곡전후 $\Rightarrow 3$

$f''(5) = \frac{25 - 5a - 20 + 2a + 2}{e^5} = \frac{1}{e^5}(-3a + 7) = 0$

$a = \frac{7}{3}$

$(x-5)(x-a+1)$
$(x-5)(x-\frac{4}{3})$

$-x^2 + \frac{13}{3}x - a$

$\frac{13}{3}$

$p + q = 16$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 두 벡터

$$\vec{a}+2\vec{b},\quad 3\vec{a}+k\vec{b}$$

가 서로 평행하도록 하는 실수 k의 값은? (단, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$) [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

24. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 6이고 한 점근선의 방정식이 $y=2x$일 때, 두 초점 사이의 거리는? (단, a와 b는 양수이다.) [3점]

① $4\sqrt{5}$ ② $6\sqrt{5}$ ③ $8\sqrt{5}$ ④ $10\sqrt{5}$ ⑤ $12\sqrt{5}$

25. 좌표평면에서 두 직선

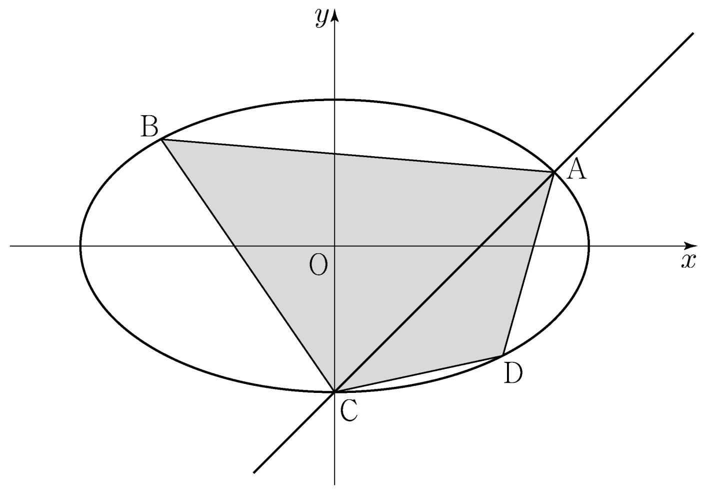
$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{3}, \quad x-1=\frac{2-y}{3}$$

가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{11}}{11}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{7}$

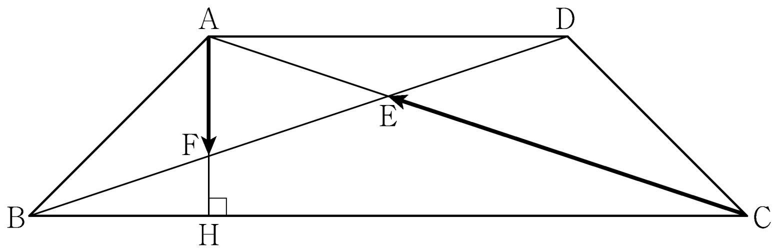
26. 좌표평면에서 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$과 직선 $y=x-1$이 만나는 두 점을 A, C라 하자. 선분 AC가 사각형 ABCD의 대각선이 되도록 타원 위에 두 점 B, D를 잡을 때, 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은? [3점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3



27. $\overline{AD}=2$, $\overline{AB}=\overline{CD}=\sqrt{2}$, $\angle ABC=\angle BCD=45°$ 인 사다리꼴 ABCD가 있다. 두 대각선 AC와 BD의 교점을 E, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, 선분 AH와 선분 BD의 교점을 F라 할 때, $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CE}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{9}$ ② $-\frac{2}{9}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{4}{9}$ ⑤ $-\frac{5}{9}$

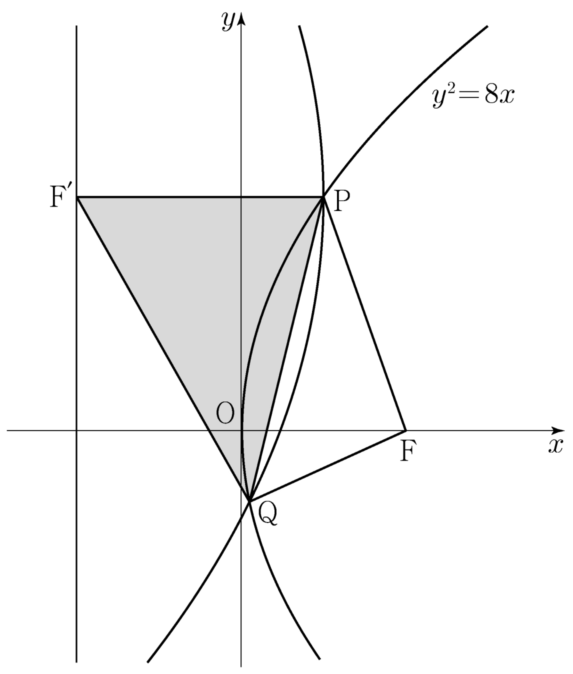


28. 좌표평면에서 직선 $y=2x-3$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 두 점 $A(c, 0)$, $B(-c, 0)\,(c>0)$에 대하여 $\overline{PB}-\overline{PA}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P의 좌표가 $(3, 3)$일 때, 상수 c의 값은? [4점]

① $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

단답형

29. 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P를 지나고 x축과 평행한 직선이 포물선 $y^2=8x$의 준선과 만나는 점을 F′이라 하자. 점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선이 포물선 $y^2=8x$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 PF′QF의 둘레의 길이가 12일 때, 삼각형 PF′Q의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 P의 x좌표는 2보다 작고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

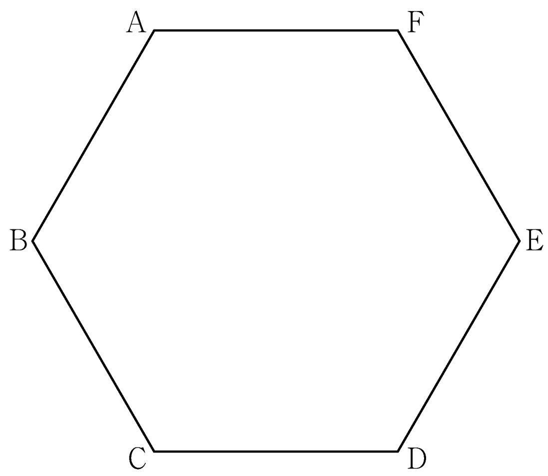


30. 좌표평면에서 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF의 변 위를 움직이는 점 P가 있고, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 Q가 있다. 두 점 P, Q와 실수 k에 대하여 점 X가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{CX}|$의 값이 최소가 되도록 하는 k의 값을 α, $|\overrightarrow{CX}|$의 값이 최대가 되도록 하는 k의 값을 β라 하자.

(가) $\overrightarrow{CX}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}$

(나) $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}+2\overrightarrow{XD}=k\overrightarrow{CD}$

$\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오. [4점]



＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.