음함수의 미분법 ⟨2ways⟩

① $g(t)$로 놓고 미분은 $g'(t)$로

② u로 놓고 미분은 $\frac{du}{dt}$로 ← u가 t에 대한 변수인 것을 아는 게 중요!

※ Step

① 식을 깔끔이 세워놓는 것으로부터 시작.

→ $t = \{g(t)\}^2 + g(t)$ 이런 식으로. (항등식)

(또는 $t = u^2 + u$)

② 문제에서 준 상황에 부합하는 상황 찾기.

ex). $t=a$ 일때 a는 몇이고 $g(a)$는 몇인지?

(또는 $u\big|_{t=a}$)

③ 그 다음에 ①에서 세운 식을 가지고 미분 / 대입.

→ $1 = 2\{g(t)\}\{g'(t)\} + g'(t)$

또는 $1 = (2u+1)\left(\frac{du}{dt}\right)$

$g'(t)$과 같은 것.

④ 주의할 점: '$t=a$' 라는 상황에서 t값과 $g(t)$값을 잘 정리해놓는 것이 중요하다. (u값)

⑤ 주의할 점 2: 항등식과 방정식 구분 잘 하기.

①에서 찾은 항등식은 미분해도 되지만 ②에서 찾은 방정식 미분 X.

[2020학년도 6월 21번]

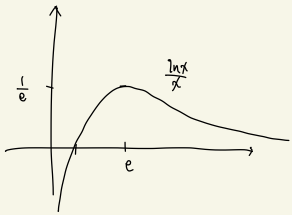
21. 함수 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 와 양의 실수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 a일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $a \times g'(a)$의 값은?21)

① $-\frac{\sqrt{e}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{e}}{4}$ ③ $-\frac{\sqrt{e}}{5}$

④ $-\frac{\sqrt{e}}{6}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{e}}{7}$

* 적용

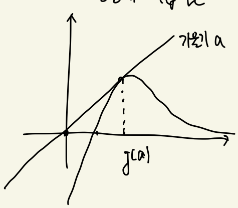
그래프를 먼저 그리자... $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ $x=e$에서 극대.



① 식 세우기. $x = g(t)$일 때 접선 기울기가 t !!

→ $f'(g(t)) = \frac{1 - \ln\{g(t)\}}{\{g(t)\}^2} = t$

② 상황에 부합하는 a가 몇인지: 원점을 지나는 접선!!



→ $\frac{f(g(a))}{g(a)} = \boxed{f'(g(a)) = a}$

항등식 (상상성립!!! 식 ①)

$(0,0), (g(a), f(g(a)))$

항등식X. 방정식. $t=a$에서만 성립. 얘를 미분하면 순간 그때 기울기 안돼!!!

→ $\frac{\ln\{g(a)\}}{\{g(a)\}^2} = \frac{1-\ln\{g(a)\}}{\{g(a)\}^2} = a$ 평변 ∴ $\ln(g(a)) = \frac{1}{2}$. $g(a) = e^{\frac{1}{2}}$.

$\boxed{a = \frac{1}{2e}}$.

③ ①의 식 미분 후 대입.

$\frac{-g(t)g'(t) + (\ln g(t) - 1)\,2g(t)g'(t)}{\{g(t)\}^4} = \frac{2\ln g(t) - 3}{g(t)^3} \cdot g'(t) = 1$

$t=a$ 대입 → $\frac{-2}{e^{\frac{3}{2}}} \cdot g'(a) = 1$ $\boxed{g'(a) = -\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}}$

[2022학년도 6월(미적분) 29번]

~~20~~. $t>2e$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$인 실수 α에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라.20)
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

$f'(x)=\frac{2t\ln x}{x}-2x=0$

$2t\ln x=2x^2$ $\quad t\ln x=x^2$

→ 항등식 $\boxed{t\ln k=k^2}$.

⟨$k=e^2$일 때⟩ $2t=e^4$. ⟨$t=\frac{e^4}{2}$⟩

$\therefore \alpha=\frac{e^4}{2}$.

항등식 미분 : $\ln k+\frac{t}{k}\cdot\frac{dk}{dt}=2k\cdot\frac{dk}{dt}$

$k=e^2$, $t=\frac{e^4}{2}$ 대입. $\frac{3e^2}{2}\frac{dk}{dt}\Big|_{t=\alpha}=2$

$\therefore \frac{dk}{dt}\Big|_{t=\alpha}=\frac{4}{3e^2}=g'(\alpha)$

$\frac{e^4}{2}\cdot\frac{16}{9e^4}=\boxed{\frac{8}{9}}$ 답: 17.

[201130] (가)

30. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오. [4점]

문자 3개

곡선 둘이 한점 → 접함. → 접점 u

(※ u도 t에 관한 함수라는 점을 알고 있어야 합니다)

$$\left(\begin{array}{l} t^3\ln(u-t)=2e^{u-a} \\ \frac{t^3}{u-t}=2e^{u-a}\end{array}\right)$$ 둘다 항등식이죠.

$2e^{u-a}$가 사라지니, 온전히 u와 t의 관계식

$\cancel{t^3}\ln(u-t)=\frac{\cancel{t^3}}{u-t}$ 을 뽑을 수 있습니다.

$(u-t)\ln(u-t)=1$ → $x\ln x=1$ 꼴, 이건 근이 하나로 정해져 있으니 $u-t=$(상수) 라는 걸 끌어내는 센스가 필요.

$\boxed{\therefore \frac{du}{dt}=1}$.

$t^3=(u-t)2e^{u-a}$ 라는 항등식 미분

$3t^2=\underbrace{\left(\frac{du}{dt}-1\right)2e^{u-a}}_{0}+(u-t)\cdot 2e^{u-a}\cdot\left(\frac{du}{dt}-\frac{da}{dt}\right)$

$3t^2=(u-t)\underbrace{2e^{u-a}}_{\frac{t^3}{u-t}}\left(\frac{du}{dt}-\frac{da}{dt}\right)$

$\therefore \frac{3}{t}=\left(1-\frac{da}{dt}\right)$ $\quad \frac{da}{dt}=1-\frac{3}{t}$.

$\frac{da}{dt}\Big|_{t=\frac{1}{3}}=f'\left(\frac{1}{3}\right)=-8$. $\quad\boxed{\therefore 64}$.

$e^a=\frac{u-t}{t^3}2e^u$

$\boxed{a=\ln(u-t)+\ln 2+u-3\ln t}$

$\boxed{\frac{da}{dt}=\frac{1}{u-t}\cdot\left(\frac{du}{dt}-1\right)+\frac{du}{dt}-\frac{3}{t}}$

→ $\frac{da}{dt}=1-\frac{3}{t}$ (a에대해 우선 정리한 게 직관적으로 더 잘 들어오긴 하네요.)