$y=x^n e^x$, $y=x^n e^{-x}$의 그래프

※ 다음 각 함수의 그래프의 개형을 그리시오.

1. $y = xe^x$

2. $y = x^2 e^x$

3. $y = x^3 e^x$

4. $y = x^4 e^x$

5. $y = x^n e^x$ (단, n은 3 이상의 홀수)

6. $y = x^n e^x$ (단, n은 짝수인 자연수)

7. $y=\dfrac{x}{e^x}$

8. $y=\dfrac{x^2}{e^x}$

9. $y=\dfrac{x^3}{e^x}$

10. $y = \frac{x^4}{e^x}$

11. $y = \frac{x^n}{e^x}$ (단, n은 3 이상의 홀수)

12. $y = \frac{x^n}{e^x}$ (단, n은 짝수인 자연수)

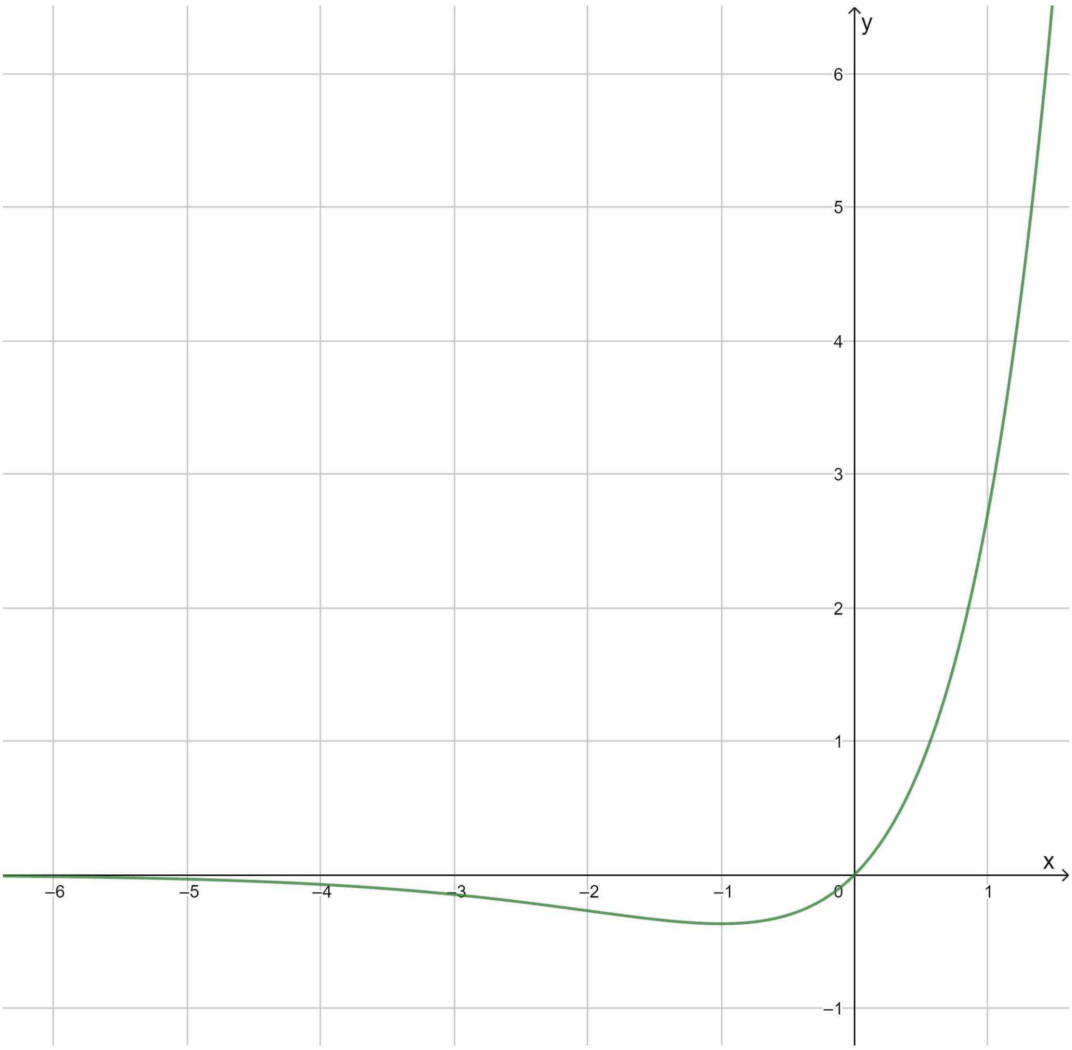
$y = x^n e^x$, $y = x^n e^{-x}$ 의 그래프 -해답-

1. $y = xe^x$ ⇨ $y \geq -\dfrac{1}{e}$

$y' = (x+1)e^x$, $y'' = (x+2)e^x$

극소점 $\left(-1,\ -e^{-1}\right)$, 변곡점 $\left(-2,\ -2e^{-2}\right)$

$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$, $\lim_{x \to \infty} xe^x = \infty$

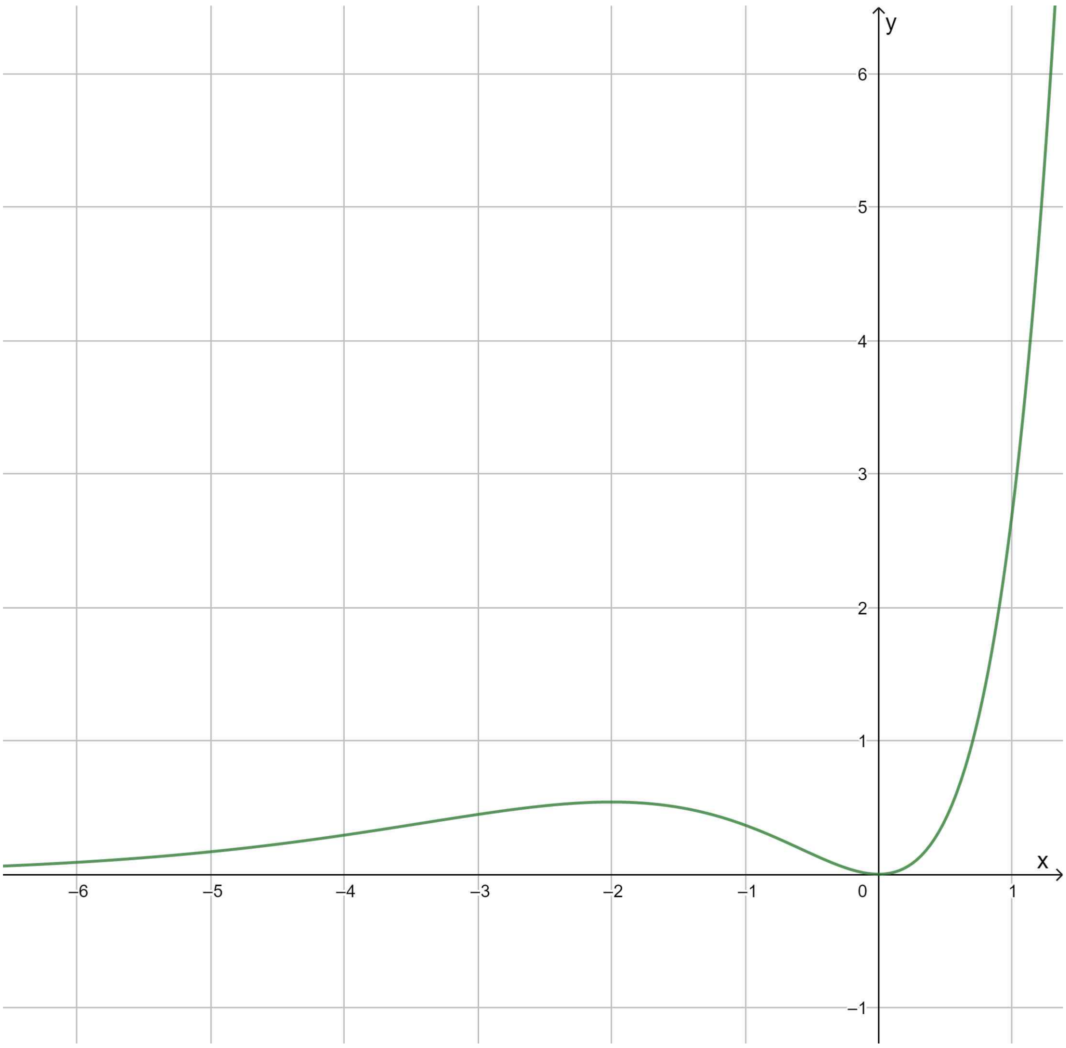


2. $y = x^2 e^x$ ⇨ $y \geq 0$

$y' = x(x+2)e^x$ ⇨ $x = 0$ 에서 극소(최소), $x = -2$ 에서 극대

$y'' = (x^2+4x+2)e^x = \{(x+2)^2-2\}e^x$ ⇨ $x = -2-\sqrt{2}$, $-2+\sqrt{2}$ 에서 변곡점

$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0$, $\lim_{x \to \infty} x^2 e^x = \infty$

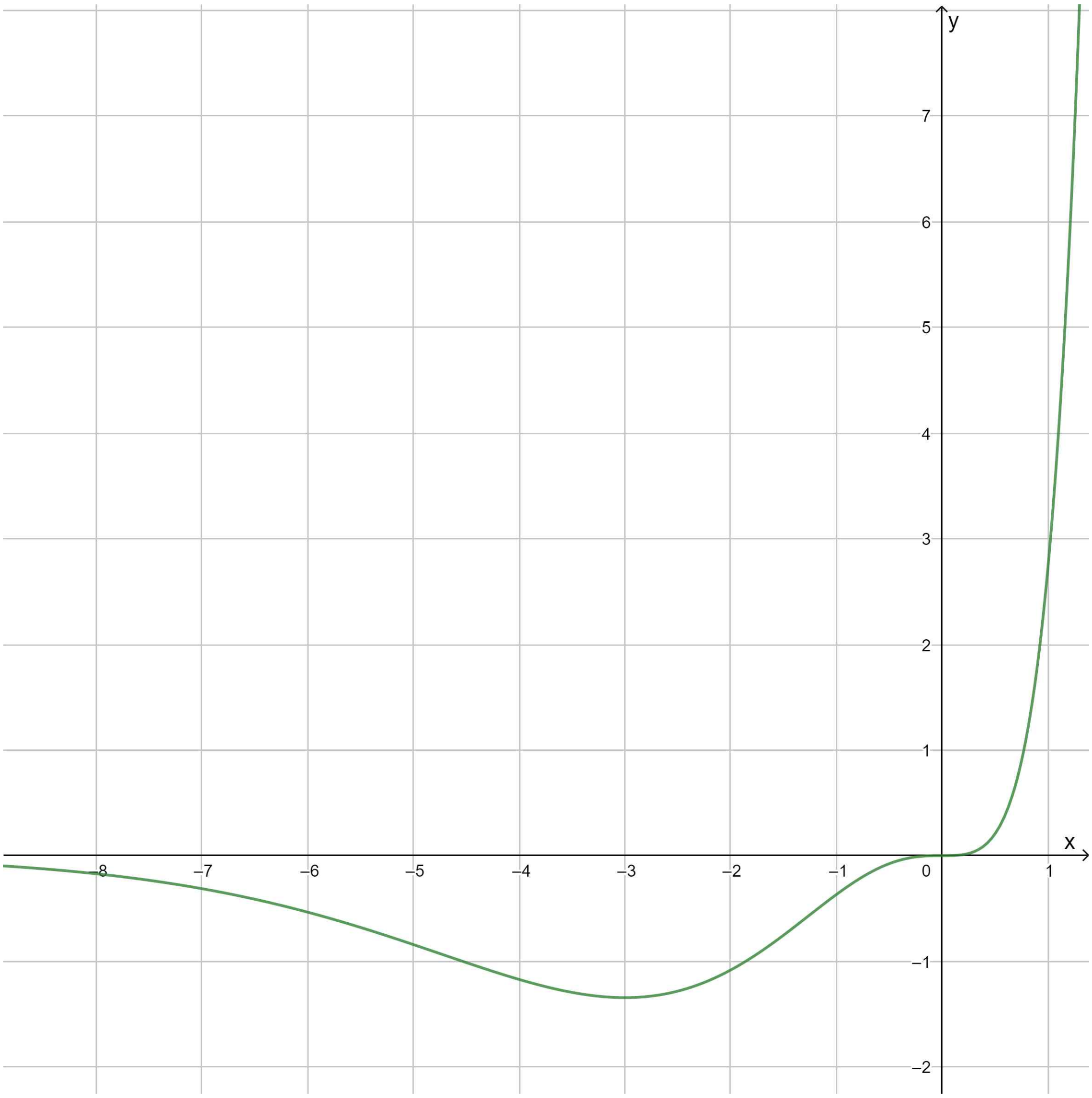


3. $y = x^3 e^x \;\Rightarrow\; y \geq -\dfrac{27}{e^3}$

$y' = x^2(x+3)e^x \;\Rightarrow\; x = -3$ 에서 극소(최소)

$y'' = x\left(x^2+6x+6\right)e^x = x\left\{(x+3)^2-3\right\}e^x \;\Rightarrow\; x = 0,\; -3-\sqrt{3},\; -3+\sqrt{3}$ 에서 변곡점

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3e^x = 0,\; \lim\limits_{x\to\infty} x^3e^x = \infty$

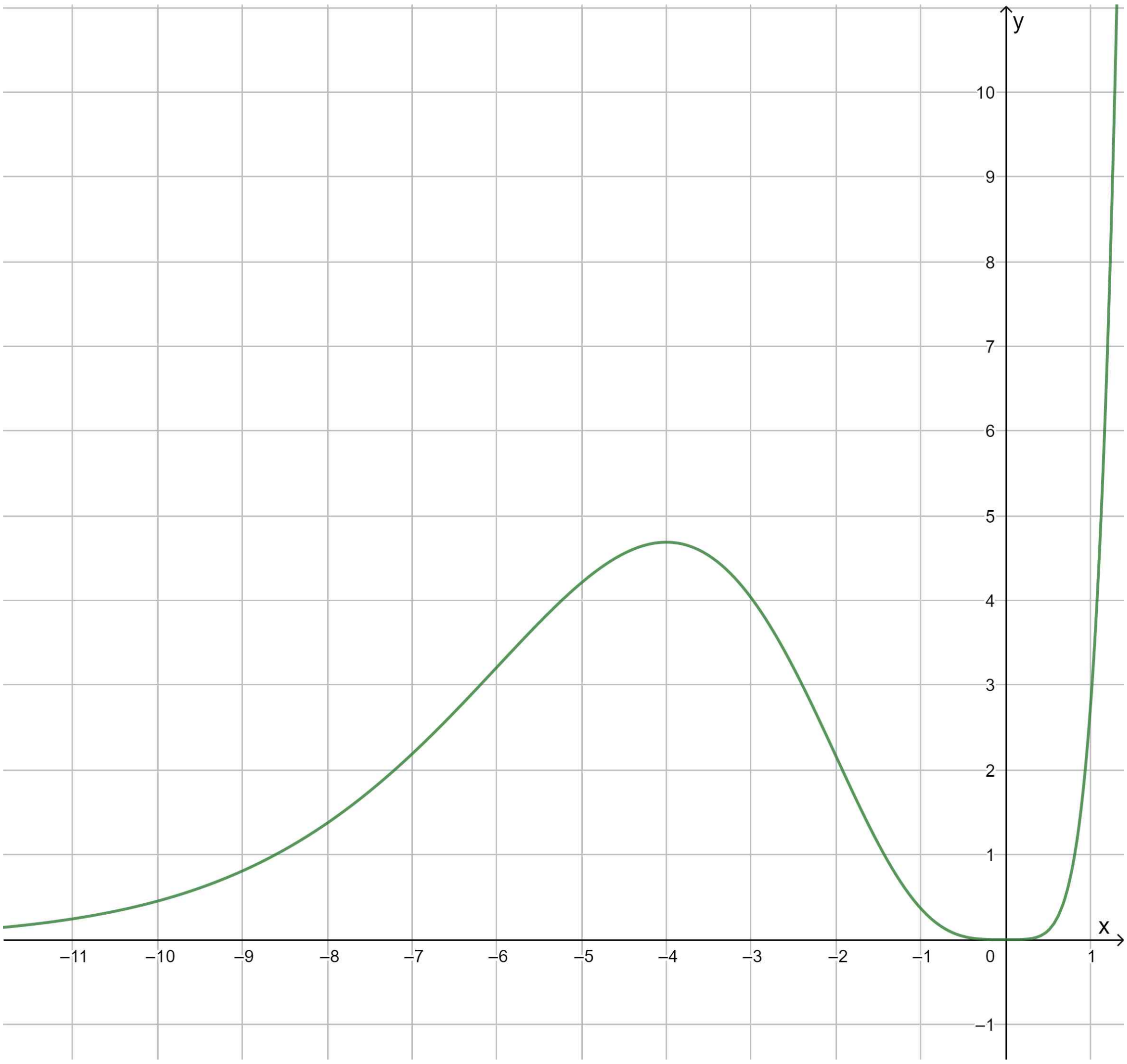


4. $y = x^4 e^x$ ⇨ $y \geq 0$

$y' = x^3(x+4)e^x$ ⇨ $x = 0$ 에서 극소(최소), $x = -4$ 에서 극대

$y'' = x^2(x^2 + 8x + 12)e^x = x^2(x+2)(x+6)e^x$ ⇨ $x = -2,\ -6$ 에서 변곡점

$\lim_{x \to -\infty} x^4 e^x = 0$, $\lim_{x \to \infty} x^4 e^x = \infty$



5. $\boldsymbol{y = x^n e^x}$ (단, n 은 3 이상의 **홀수**) ⇨ $y \ge -\dfrac{n^n}{e^n}$

$y' = x^{n-1}(x+n)e^x$ ⇨ $x = -n$ 에서 극소(최소)

$y'' = x^{n-2}\left(x^2 + 2nx + n^2 - n\right)e^x = x^{n-2}\left\{(x+n)^2 - n\right\}e^x$

⇨ $x = 0,\ -n-\sqrt{n},\ -n+\sqrt{n}$ 에서 변곡점

$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0,\ \lim_{x \to \infty} x^n e^x = \infty$

6. $\boldsymbol{y = x^n e^x}$ (단, n 은 **짝수**인 자연수) ⇨ $y \ge 0$

$y' = x^{n-1}(x+n)e^x$ ⇨ $x = 0$ 에서 극소(최소), $x = -n$ 에서 극대

$y'' = x^{n-2}\left(x^2 + 2nx + n^2 - n\right)e^x = x^{n-2}\left\{(x+n)^2 - n\right\}e^x$

⇨ $x = -n-\sqrt{n},\ -n+\sqrt{n}$ 에서 변곡점

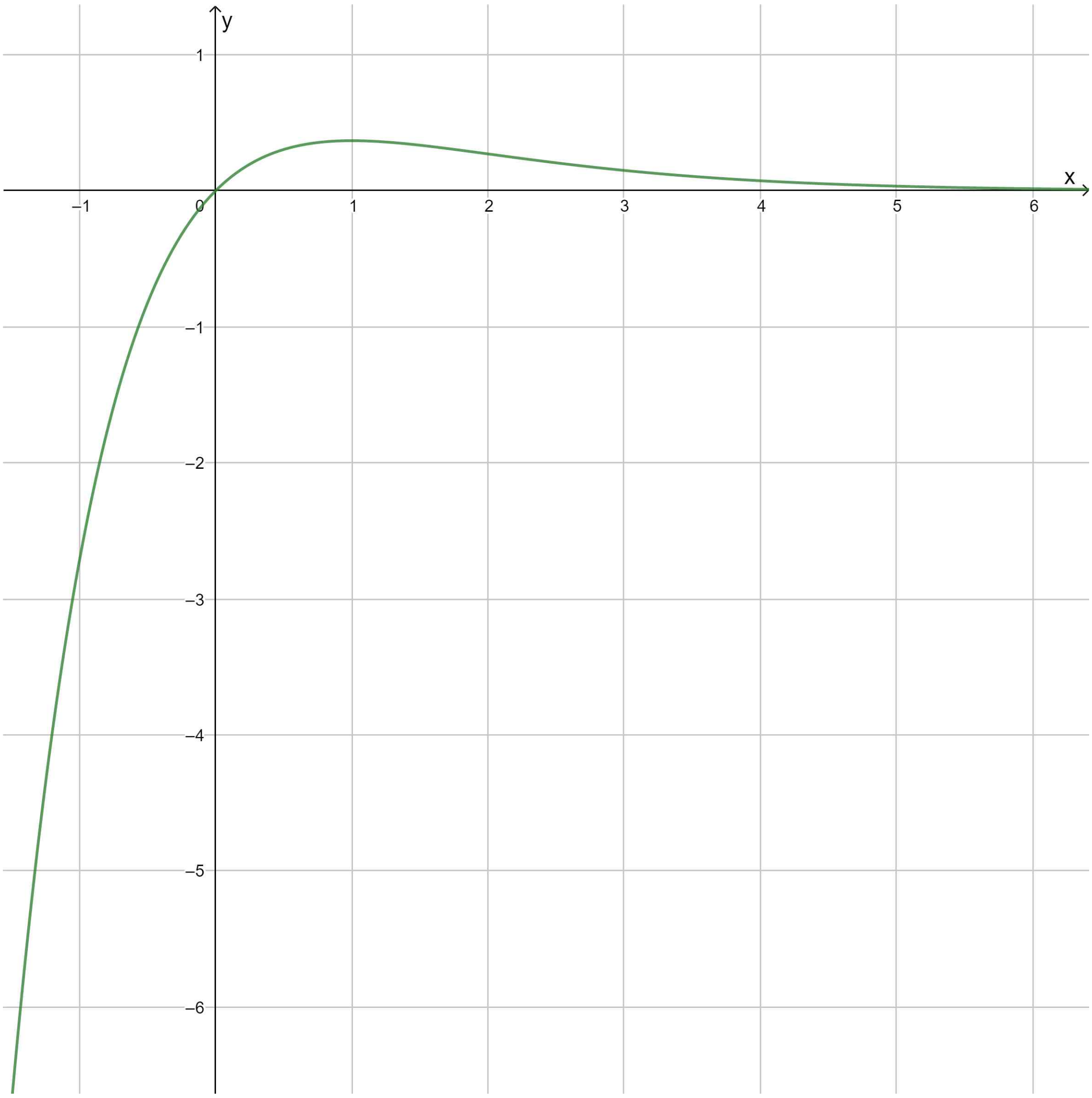
$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0,\ \lim_{x \to \infty} x^n e^x = \infty$

7. $y=\frac{x}{e^x}$ ⇨ $y \le \frac{1}{e}$

$y' = -(x-1)e^{-x}$, $y'' = (x-2)e^{-x}$

극대점 $\left(1,\ e^{-1}\right)$, 변곡점 $\left(2,\ 2e^{-2}\right)$

$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0$ ⇦ 로피탈의 정리

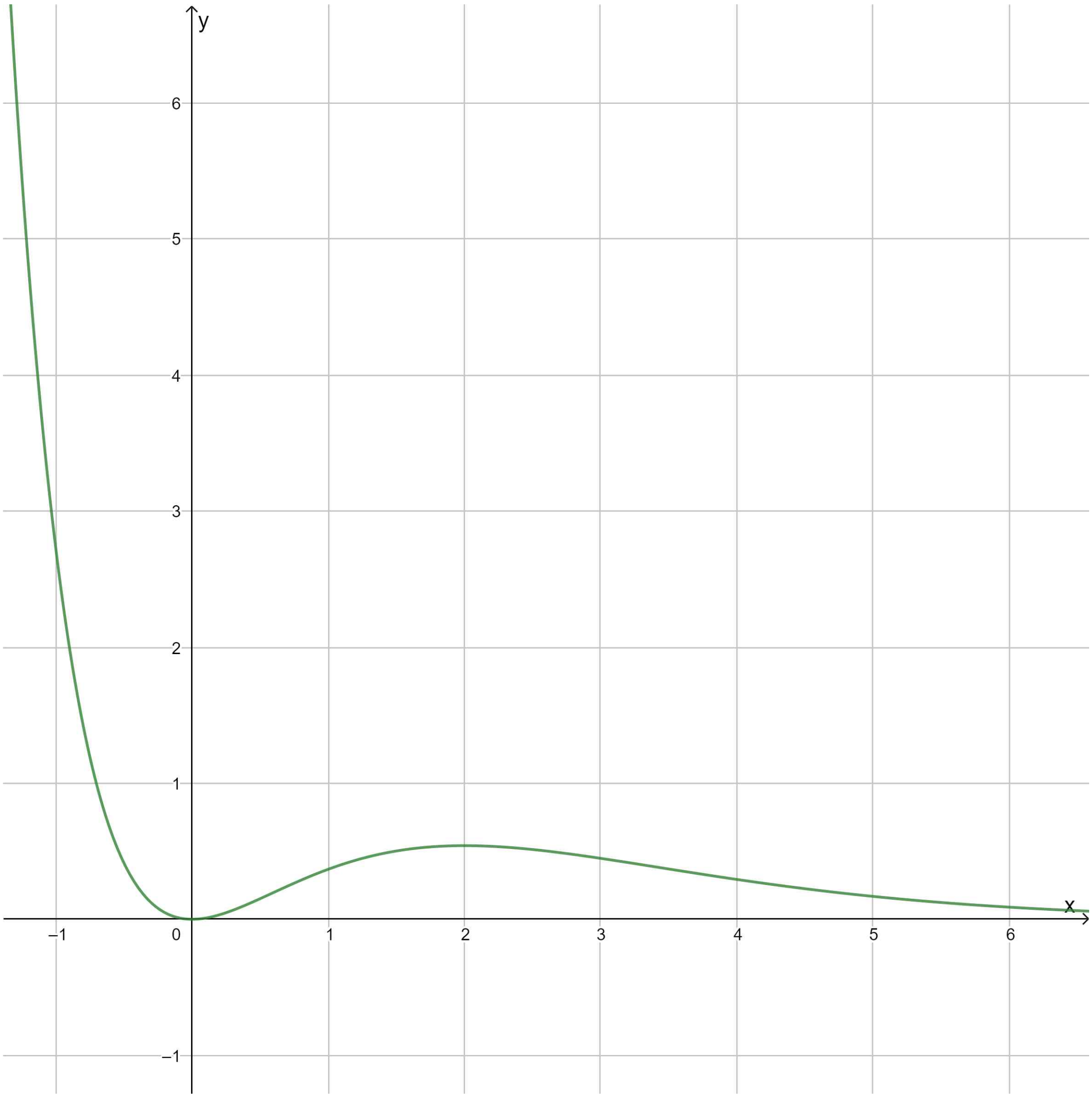


8. $y=\dfrac{x^2}{e^x}$ ⇨ $y \geq 0$

$y'=\dfrac{x(2-x)}{e^x}$ ⇨ $x=0$ 에서 극소(최소), $x=2$ 에서 극대

$y''=\dfrac{x^2-4x+2}{e^x}=\dfrac{(x-2)^2-2}{e^x}$ ⇨ $x=2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}$ 에서 변곡점

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0,\ \lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\infty$

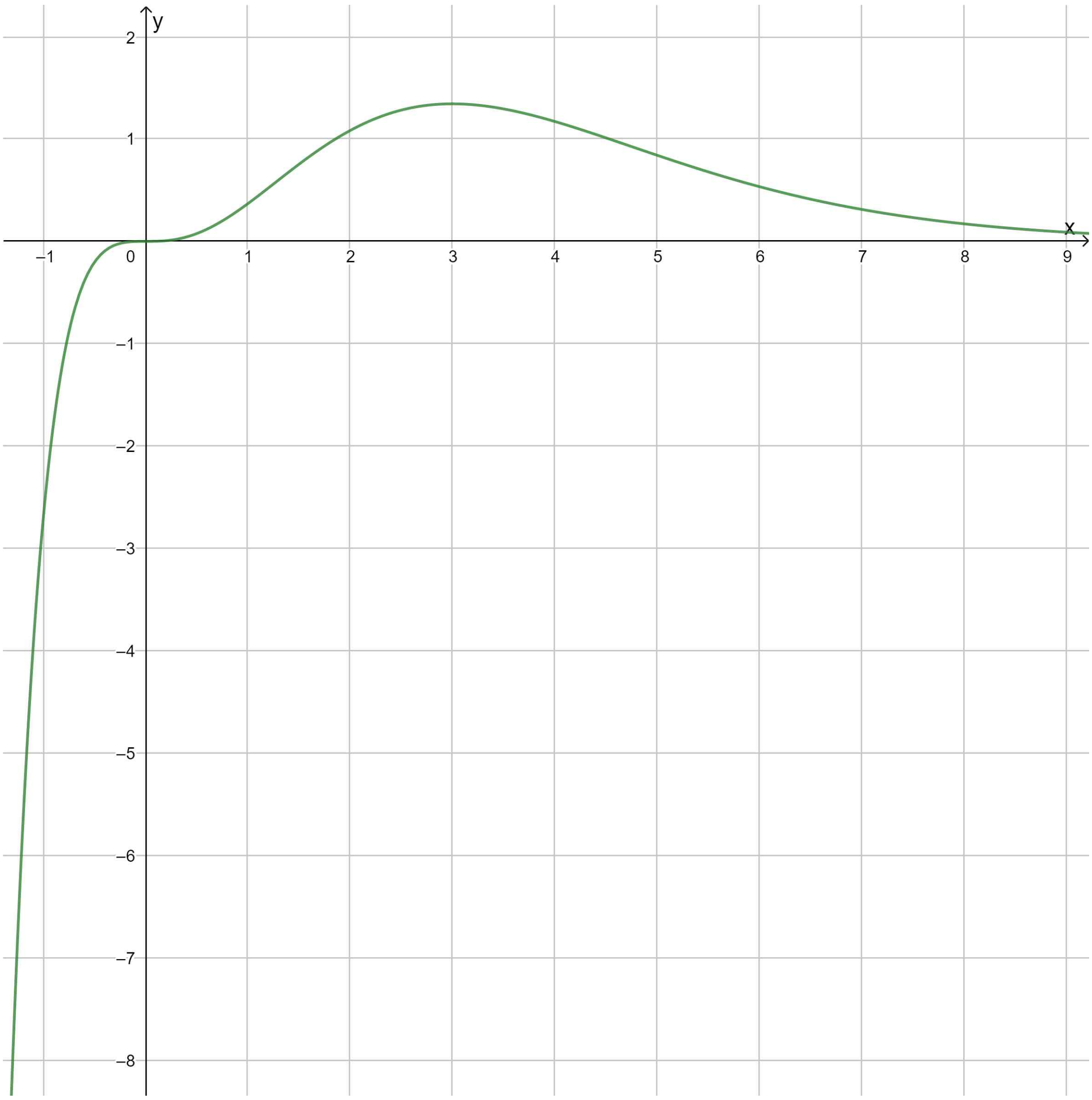


9. $y=\dfrac{x^3}{e^x}$ ⇨ $y \le \dfrac{27}{e^3}$

$y'=\dfrac{x^2(3-x)}{e^x}$ ⇨ $x=3$ 에서 극대(최대)

$y''=\dfrac{x(x^2-6x+6)}{e^x}=\dfrac{x\{(x-3)^2-3\}}{e^x}$ ⇨ $x=0,\ 3-\sqrt{3},\ 3+\sqrt{3}$ 에서 변곡점

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=-\infty$

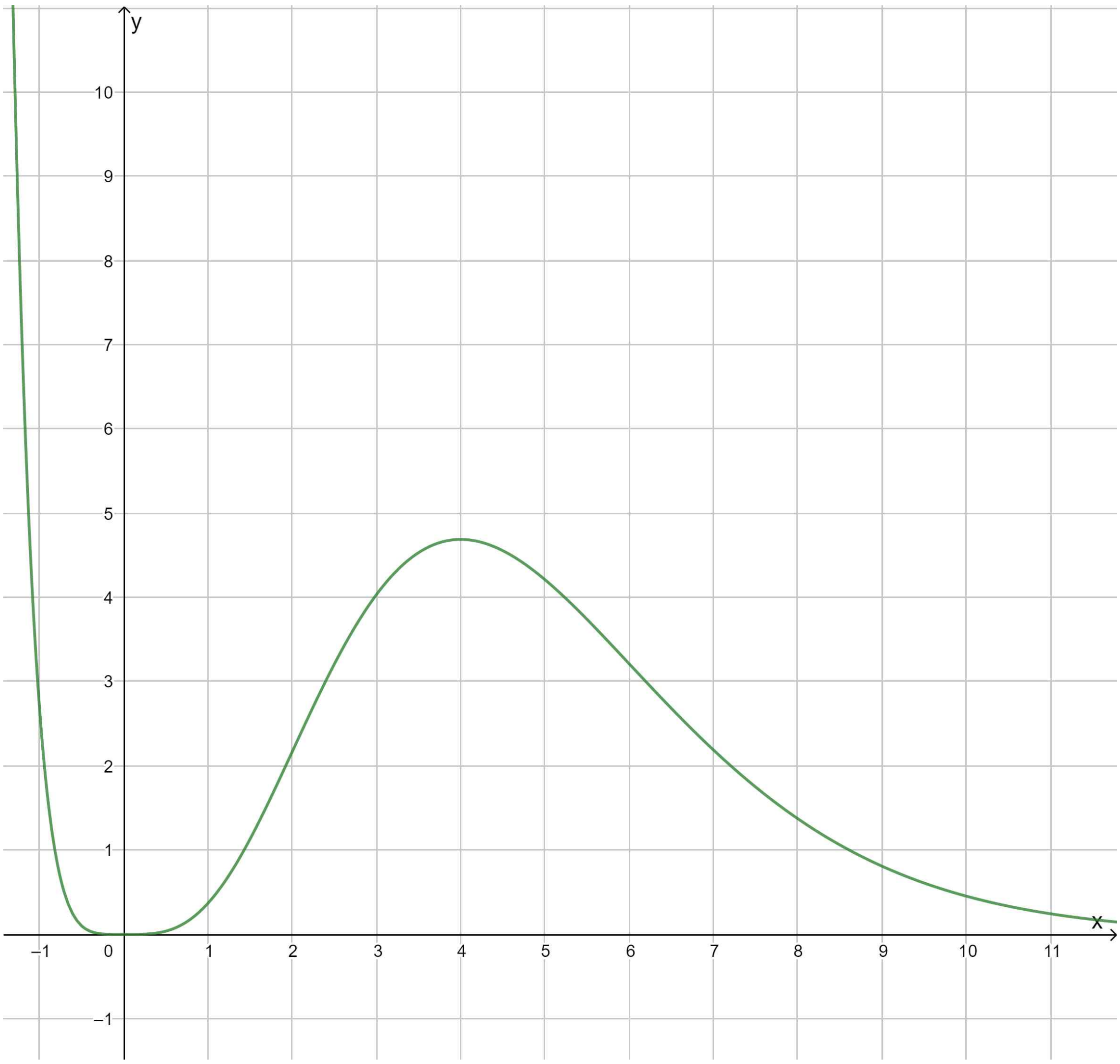


10. $y=\dfrac{x^4}{e^x}$ ⇨ $y \geq 0$

$y' = \dfrac{x^3(4-x)}{e^x}$ ⇨ $x=0$ 에서 극소(최소), $x=4$ 에서 극대

$y'' = \dfrac{x^2(x^2-8x+12)}{e^x} = \dfrac{x^2(x-2)(x-6)}{e^x}$ ⇨ $x=2,\ 6$ 에서 변곡점

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{e^x}=0,\ \lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^4}{e^x}=\infty$



11. $y=\dfrac{x^n}{e^x}$ (단, n은 3 이상의 **홀수**) ⇨ $y \le \dfrac{n^n}{e^n}$

$y'=\dfrac{x^{n-1}(n-x)}{e^x}$ ⇨ $x=n$에서 극대(최대)

$y''=\dfrac{x^{n-2}(x^2-2nx+n^2-n)}{e^x}=\dfrac{x^{n-2}\{(x-n)^2-n\}}{e^x}$

⇨ $x=0,\ n-\sqrt{n},\ n+\sqrt{n}$에서 변곡점

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=-\infty$

※ $f(x)=x^n e^x$라 하면 $f(-x)=-\dfrac{x^n}{e^x}$이므로

$y=x^n e^x$과 $y=\dfrac{x^n}{e^x}$은 원점에 대하여 대칭이다.

12. $y=\dfrac{x^n}{e^x}$ (단, n은 **짝수**인 자연수) ⇨ $y \ge 0$

$y'=\dfrac{x^{n-1}(n-x)}{e^x}$ ⇨ $x=0$에서 극소(최소), $x=n$에서 극대

$y''=\dfrac{x^{n-2}(x^2-2nx+n^2-n)}{e^x}=\dfrac{x^{n-2}\{(x-n)^2-n\}}{e^x}$

⇨ $x=n-\sqrt{n},\ n+\sqrt{n}$에서 변곡점

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=\infty$

※ $f(x)=x^n e^x$라 하면 $f(-x)=\dfrac{x^n}{e^x}$이므로

$y=x^n e^x$과 $y=\dfrac{x^n}{e^x}$은 y축에 대하여 대칭이다.