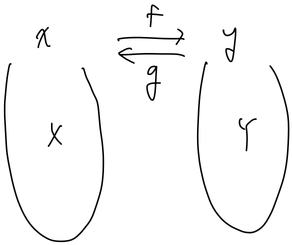
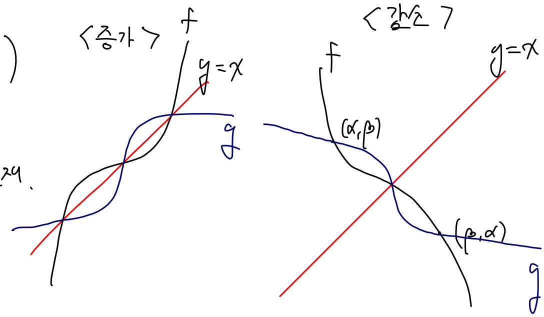
f의 역함수 g에 대해

$g(x)=f^{-1}(x)$ / $y=f(x) \longleftrightarrow x=g(y) \Longrightarrow f(g(x))=g(f(x))=x$



* f(x)와 g(x)의 교점은 어디에? (단, f(x)는 연속)



i) f(x)가 증가함수일 때

$f(x)=g(x)$의 교점은 $y=x$ 그래프 위에서만 존재.

→ 교점이 짝수 개, 홀수 개 다 가능

ii) f(x)가 감소함수일 때

$f(x)=g(x)$의 교점은 → $y=x$ 그래프 위에서 1개는 항상 존재

└→ f(x)가 (α,β), (β,α)를 동시에 지날 경우 $x=\alpha$, $x=\beta$ 도 근.

→ 교점이 항상 홀수 개

\- 이는 $f(x)=g(x)$에서 양변 $x=f(t)$ 대입, 즉 $\boxed{f(f(t))=t}$의 근을 찾는 것과 유사하다.

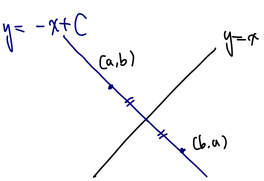
* $f(f(x))=x$ 라는 방정식은 f(x)가 역함수를 가지지 않을 때에도 자주 나오는 조건. (190930 4)

하지만 비슷하게 해석될 수 있다.

① f(x)가 증가하는 구간에선 $f(\alpha)=\alpha$ 를 만족하는 α만이 근.

② f(x)가 감소하는 구간에선 $f(\alpha)=\alpha$ 를 만족하는 α와, (a,b) (b,a)를 동시에 지나는 경우 쌍으로 된 근 $x=a$, $x=b$ 를 가진다는 해석 가능하다.

$y=x$에 대해 대칭이자,
☆ 기울기가 -1인 직선 위의 두 점.



[190930 나]

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$(f \circ f)(x) = x$$

의 모든 실근이 0, 1, a, 2, b이다.

$$f'(1) < 0,\ f'(2) < 0,\ f'(0) - f'(1) = 6$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. (단, $1 < a < 2 < b$) [4점]

→ $f(x)=x$ 근이거나 감소하는 구간 쌍근.

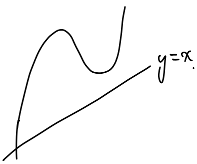
(y=x에 대해 대칭인)

근데 쌍근은 2개나 4개임. $(a,b)(b,a)$ / $(c,d)(d,c)$ 꼴

한편 쌍근이 2쌍이고 $f(x)=x$ 근이 1개일 수는 없음.

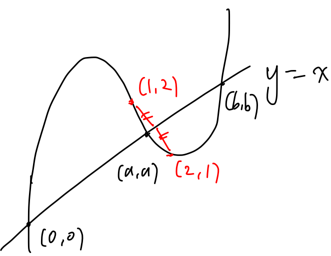
교점 1개면

상식적으로 $y=x$에 대칭인 두점이 안 나온다는 걸 누구나 알 수 있음.



→ 고로 $f(x)=x$ 근 3개. 쌍근 1쌍.

감소하는 부분에서



식. $f(x)-x = kx(x-a)(x-b)$.

$f(x) = kx(x-a)(x-b) + x$

모르는 거 3개. 식 3개 → $f(1)=2$, $f(2)=1$, $f'(0)-f'(1)=6$

다 풀었음. 계산만!

〈계산〉

$f(1) = k(1-a)(1-b) + 1 = 2$

$f(2) = 2k(2-a)(2-b) + 2 = 1$

$f'(0) = kab + 1$

$f'(1) = k(1-a)(1-b) + k(1-a) + k(1-b) + 1$

$= k(2-a)(2-b) + 1 - k$

한편 $k(2-a)(2-b) = -\frac{1}{2}$ 이니

$f'(1) = \frac{1}{2} - k$

$f'(0) - f'(1) = kab + k + \frac{1}{2} = 6$

$\boxed{\therefore kab + k = \frac{11}{2}}$

→ $f(1) = kab + k - k(a+b) = 1$

$k(a+b) = \frac{9}{2}$

→ $f(2)$에서 $\boxed{8k + 2kab = 17}$

연립하면 $k=1$. $a+b = \frac{9}{2} = ab$

$f(5) = 5(5-a)(5-b) + 5$

$= \boxed{40}$

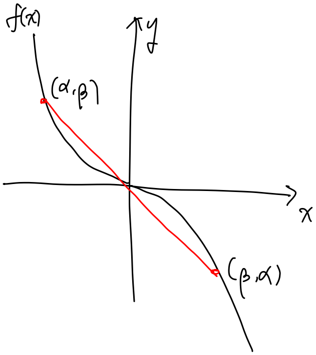
[181021 가] * 미적 내용입니다

21. 함수 $f(x)=-\dfrac{kx^3}{x^2+1}$ $(k>1)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=f^{-1}(x)$가 만나는 점의 x좌표 중 가장 작은 값을 α, 가장 큰 값을 β라 하자. 함수 $y=f(x-2\beta)+2\alpha$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $f'(\beta)=2g'(\alpha)$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\dfrac{5+2\sqrt{2}}{7}$ ② $\dfrac{6+2\sqrt{2}}{7}$ ③ $\dfrac{4+2\sqrt{2}}{5}$

④ $\dfrac{5+2\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\dfrac{6+2\sqrt{2}}{5}$

$f(x)$는 기함수. 그래프는 대략 아래 모양.



$f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 $y=x$ 위, 그리고 $y=x$에 대칭인 쌍근. 한편 $f(x)$가 기함수이니 그 쌍근은 $y=-x$ 위에 있음.

$\therefore$ $f(x)$는 (α,β), (β,α), $(0,0)$을 지나는데 α,β가 $-x$ 위에 있으니 $\boxed{\beta=-\alpha}$.

한편 $f(x-2\beta)+2\alpha=h(x)$라 두면

$h(\beta)=f(-\beta)+2\alpha=f(\alpha)+2\alpha$

$=\beta+2\alpha=\alpha$ 이니 $h(\beta)=\alpha$.

$g(\alpha)=\beta$. $h'(\beta)=\dfrac{1}{g'(\alpha)}$.

$\therefore$ $g'(\alpha)=\dfrac{1}{f'(-\beta)}=\boxed{\dfrac{1}{f'(\alpha)}}$.

고로 $f'(\beta)=\dfrac{2}{f'(\alpha)}$ 인데 기함수니까

$f'(\beta)=f'(\alpha)$ 고, 고로 $\boxed{f'(\beta)=-\sqrt{2}=f'(\alpha)}$.

한편 α,β는 $-\dfrac{kx^3}{x^2+1}=-x$ 의 근.

$x^2+1=kx^2$. $x^2(k-1)=1$. $x^2=\dfrac{1}{k-1}$

$x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{k-1}}$. $\therefore$ $\alpha=-\sqrt{\dfrac{1}{k-1}}$ $\beta=\sqrt{\dfrac{1}{k-1}}$

$f'(x)=-\dfrac{3kx^2(x^2+1)-2kx^4}{(x^2+1)^2}$

$f'(\beta)=-\dfrac{\frac{3k^2}{(k-1)^2}-\frac{2k}{(k-1)^2}}{\left(\frac{k}{k-1}\right)^2}=\dfrac{3k^2-2k}{k^2}$

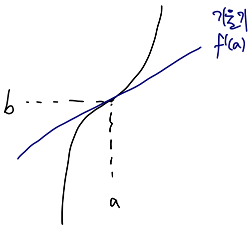
$=-\sqrt{2}$. $\therefore$ $\dfrac{3k^2-2k}{k^2}=\sqrt{2}$

$\therefore$ $(3-\sqrt{2})k=2$

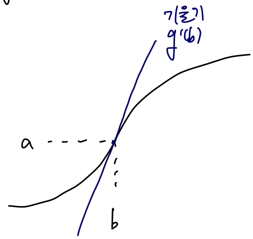
$\boxed{k=\dfrac{2(3+\sqrt{2})}{7}}$

〈 미적분 〉

원함수 $f(x)$의 변곡점은 역함수 $g(x)$에서도 나타난다. 그 때 변곡 접선의 기울기는 역수가 된다.



⟶



- 이는 기하적으로 그래프를 보았을 때 어렵지 않게 생각해볼 수 있다.
- $f(a)=b$, $f(g(x))=x$ 에서 $f'(a)\cdot g'(b)=1$ 이기에 나온 결과이기도 하다.

⟶ f의 기울기가 극소인 변곡점은 g의 기울기가 극대가 되는 변곡점이다.

⟶ f가 역함수를 갖고, 실수 전체의 범위에서 미분 가능해도 역함수 g가 미분 불가능한 특수 케이스가 생긴다. 언제? $f(x)$가 기울기가 0인 변곡점을 가질 때.

[21학년도 수능완성 가형 실전모의 4회 21번]

21 ▸ 20050-0485

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 양의 실수 a에 대하여 함수 $F(x)$를

$$F(x)=\int_0^x (|f(t)|+a)dt$$

로 정의하고 함수 $F(x)$의 역함수를 $G(x)$라 할 때, 다음이 성립한다.

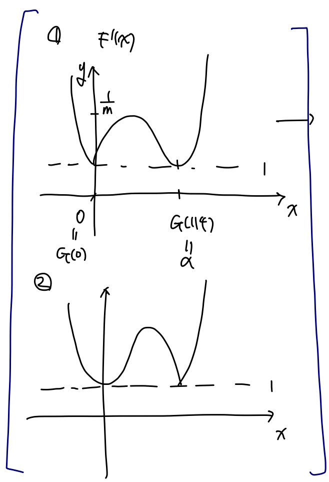
(가) 함수 $G'(x)$는 $x=0$과 $x=114$에서만 극댓값 1을 가진다.
(나) 함수 $G'(x)$는 극솟값 m을 가진다.

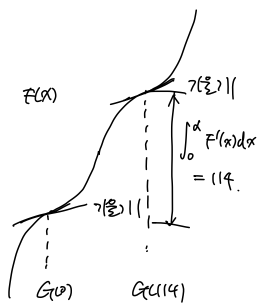
$\frac{a}{m}$의 값은? [4점]

① 31 ② 32 ③ 33
④ 34 ⑤ 35

대략적인 개형 추론 가능.

$F'(x)=|f(x)|+a$





(가). $G'(x)$가 $x=0$, $x=114$에서 극대 1

⟶ 변곡점은 뒤집어지니 $F'(x)$가 $x=G(0)$, $x=G(114)$에서 극소 $\frac{1}{1}=1$.

(나). $F'(x)$는 어디서지는 몰라도 극대 $\frac{1}{m}$을 가짐.

그로 $a=1$ 이고, $\int_0^{\alpha} F'(x)dx=\frac{1}{12}a^4+a=114$

$\therefore a=6$ 이니 $\frac{1}{m}=33$.

[앞 문제 보고 떠올린 자작문제]

이차함수 $f(x)$에 대해 $g(x) = (x-2)e^{f(x)}$.

$G(x) = \int_0^x |g(t)|\,dt$, $h(x)$는 $G(x)$의 역함수다.

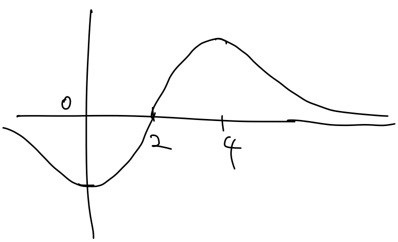
이때, 다음 조건을 만족한다.

- $f(0) = 0$
- $2|g(x)| \le \int_0^4 g'(x)\,dx$
- $h(x)$는 $x = k$에서 미분 불가능하다 (k는 상수)

이때, $\int_0^{2k} x^2 h''(x)\,dx = pe + q\sqrt{e} + r$.

$\frac{r-q}{p}$ 는?

두번째 조건 → 그래프 개형



$g(x)$가 $(2,0)$ 점대칭이 되도록 $f(x)$를 설정

$k = G(2)$.

부분적분 / 대칭성을 잘 살려서 적분

→ 답은 5 입니다.