$2f(x)=\dfrac{d}{dx}\{(x-1)f(x)\}$ 을 풀면

$2f(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$
$f(x)=(x-1)f'(x)$

한편 $(1,\ 0)$을 지나고 $f(x)$에 접하는 접선의 방정식은

$0=f'(t)(t-1)+f(t)$
$f(t)=(t-1)f'(t)$

→ $\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\alpha_m$ 은 $(1,\ 0)$을 지나고 $f(x)$에 접하는 접선들의 접점의 x좌표

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} f'(\alpha_k)$는 같은 기울기를 중복을 허용하여 더한 것이고 (접점의 개수를 기준으로)
S는 같은 기울기를 중복을 허용하지 않고 더한 것이다. (접선의 개수를 기준으로)
$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \log\{f'(\alpha_k)\}$는 같은 기울기를 중복을 허용하여 곱한 것이고 (접점의 개수를 기준으로)
M은 같은 기울기를 중복을 허용하지 않고 곱한 것이다. (접선의 개수를 기준으로)

$f'(\alpha_1),\ f'(\alpha_2),\ \dots\ ,\ f'(\alpha_m)$ 이 모두 서로 다른 값이라면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} f'(\alpha_k)=S,\ \sum_{k=1}^{m}\log\left(f'(\alpha_k)\right)=\log M$ 을 모두 만족해야한다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} f'(\alpha_k)\neq S$ 이므로 접점의 개수와 접선의 개수가 다르다.

→ $(1,\ 0)$에서 $f(x)$에 그은 접선 중에 서로 다른 두 점에 동시에 접하는 접선(L)이 있다.
L의 기울기를 p, 서로 다른 두 접점의 x좌표를 $a,\ b$라고 하면
→ $f(a)=p(a-1),\ f(b)=p(b-1),\ \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=p$
$f'(a)=f'(b)=p$
→ $f(x)=p(x-1)-\dfrac{1}{4}(x-a)^2(x-b)^2Q(x)$ ($a<b$이고 $Q(x)$는 최고차항 계수가 1인 다항함수)
→ $f(x)$의 차수는 최소 4차 → 그런데 $f(x)$는 4차 이하 → $Q(x)=1$
→ 4차함수에서 L의 개수는 최대 1개

$\rightarrow$ 만약 L의 기울기가 0이면 $\sum_{k=1}^{m} f'(\alpha_k) = S$ 이므로 L의 기울기는 0이 아니다.

$\rightarrow$ $p \neq 0$

$\sum_{k=1}^{m} \log(f'(\alpha_k)) = \log M$ 를 만족시키려면

$(1, 0)$에서 그은 접선들의 기울기는 모두 양수

만약 L의 기울기가 1이 아니라면 $\sum_{k=1}^{m} \log(f'(\alpha_k)) = \log M + \log p \neq \log M$

$\rightarrow$ $\log p = 0$, $p = 1$ 이므로 L의 기울기는 반드시 1이 되어야한다.

$\rightarrow$ $f(x) = (x-1) - \frac{1}{4}(x-a)^2(x-b)^2$

$\alpha_1 = 1$

$\rightarrow$ 접점의 x좌표 중 가장 작은 값이 1

$\rightarrow$ $a < 1$이면 $\alpha_1 = a < 1$ 이고

$1 < a$이면 $\alpha_1 < 1$이므로

$a = 1$

L은 $(1, 0)$을 지나므로 $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$

$\rightarrow$ $p = 1$

$\rightarrow$ $f(x) = (x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2(x-b)^2$

$f'(x) = 1 - (x-1)(x-b)\left(x - \frac{1+b}{2}\right)$ 이므로

$f(x) = (x-1)f'(x)$를 풀면

$$\frac{1}{4}(x-1)\left\{4 - (x-1)(x-b)^2 - 4 + 4(x-1)(x-b)\left(x - \frac{1+b}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{3}{4}(x-1)^2(x-b)\left(x - \frac{2+b}{3}\right) = 0$$

$m = 3$이고 $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \frac{2+b}{3}$, $\alpha_3 = b$

$f'(1) = f'(b) = 1$이므로

$f'(\alpha_2) = f'\left(\frac{2+b}{3}\right) > 0$ 만 구하면 된다.

$f'\left(\frac{2+b}{3}\right) = 1 - \left(\frac{b-1}{3}\right)\left(\frac{2-2b}{3}\right)\left(\frac{1-b}{6}\right) = 1 + \frac{(1-b)^3}{27} > 0$

$27 > (b-1)^3$

$3 > b-1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $1 < b < 4$

$f(2m) = f(6) = 5 - \frac{25}{4}(6-b)^2 = h(b)$ 라고 하면

$h(b)$의 대칭축은 $b = 6$이고 $1 < b < 4$에 포함되지 않으므로

정답은 $|h(4) - h(1)|$과 같다.

$(k_1 \leq h(1),\ k_2 \geq h(4))$

$|h(4) - h(1)| = \frac{25}{4}(5^2 - 2^2) = \frac{525}{4}$ $\qquad\qquad$ 529

2022 예비시행 9번

9. 원점을 지나고 곡선 $y=-x^3-x^2+x$ 에 접하는 모든 직선의 기울기의 합은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

$f(x)=-x^3-x^2+x$ 일 때 실수 전체 집합의 두 부분집합 A, B를

$A=\{t|f(t)=tf'(t)\}$
$B=\{f'(t)|t\in A\}$
로 정의하자.

또한 $f(t)=tf'(t)$의 실근을 작은 순서대로 나열한 수열을 a_n
$b_n=f'(a_n)$ 이라고 하자.

정답은 B의 원소의 합일까? 유한수열 b_n의 합일까?

B의 원소의 합으로 해석하는 것이 옳다.

$f(t)=tf'(t)$ 를 풀면
$-t^3-t^2+t=-3t^3-2t^2+t$
$t^2(2t+1)=0$
$A=\left\{0,\ -\frac{1}{2}\right\}$
$B=\left\{\frac{5}{4},\ 1\right\}$
$\{a_n\}$: $-\frac{1}{2}$, 0
$\{b_n\}$: $\frac{5}{4}$, 1

B의 원소의 합과 유한수열 b_n의 합 모두 $\frac{9}{4}$

$f(x) = (x-1)^2(x-3)^2 + 4x$ 일 때 같은 방법으로 풀어보자.

실수 전체 집합의 두 부분집합 A, B를

$A = \{t | f(t) = tf'(t)\}$
$B = \{f'(t) | t \in A\}$
로 정의하자.

또한 $f(t) = tf'(t)$의 실근을 작은 순서대로 나열한 수열을 a_n
$b_n = f'(a_n)$ 이라고 하자.

$f(t) = tf'(t)$ 를 풀면

$(t-1)^2(t-3)^2 + 4t = 4t(t-1)(t-2)(t-3) + 4t$
$(t-1)(t-3)(3t^2 - 4t - 3) = 0$

$A = \left\{\dfrac{2-\sqrt{13}}{3},\ 1,\ \dfrac{2+\sqrt{13}}{3}\ ,\ 3\right\}$
$B = \{-51.035,\ 4,\ 4.517\}$
$\{a_n\} : \dfrac{2-\sqrt{13}}{3},\ 1,\ \dfrac{2+\sqrt{13}}{3},\ 3$
$\{b_n\} : -51.035,\ 4,\ 4.517,\ 4$

B의 원소의 합 $= -42.518$
b_n의 합 $= -38.518$

접점이 2개 이상이고 기울기가 0이 아닌 접선이 존재하면 두 풀이의 결과가 달라진다.

하지만 예비시행 9번 문제에서는 주어진 함수가 3차함수이기 때문에 한 접선의 접점이 2개 이상이 될 수 없다. 그러므로 두 풀이의 결과가 같을 수 밖에 없다.