1.

삼각형 ABC의 넓이는 $3\times5\times\frac{1}{2}\sin\mathrm{B}=5\sqrt{2}$에서,

$\sin\mathrm{B}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\mathrm{B}=\frac{1}{3}$이다. 코사인법칙에 의해 $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{6}$임을 알 수 있고,

사인법칙을 적용하면 외접원의 반지름 R에 대해, $2R=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\mathrm{B}}=3\sqrt{3}$

$R=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

2.

P의 위치를 $x_{\mathrm{P}}(t)$, Q의 위치를 $x_{\mathrm{Q}}(t)$라 하면

$x_{\mathrm{P}}(t)=t^3+t^2-4t$, $x_{\mathrm{Q}}(t)=2t^3-3t^2$이다.

$x_{\mathrm{P}}(t)=x_{\mathrm{Q}}(t)$에서, $t^3-4t^2+4t=0$이고, $t=2$일 때, 서로 만남을 알 수 있다.

따라서 $t=2$일 때, P,Q의 위치는 4이다.

3.

$\mathrm{P}(a,4^a)$, $\mathrm{Q}(a,2^a)$, $\mathrm{R}(a,-2^{1-a})$이므로,

$\overline{\mathrm{PQ}}=4^a-2^a$, $\overline{\mathrm{QR}}=2^a+2^{1-a}$이다.

주어진 비례식에서, $8\overline{\mathrm{QR}}=3\overline{\mathrm{PQ}}$이므로, 대입해주면

$8\times(2^a+\frac{2}{2^a})=3(2^{2a}-2^a)$이다.

$2^a=t$로 치환하면

$8t+\frac{16}{t}=3t^2-3t$가 나온다.

이는 삼차방정식인데, 될만한 숫자를 먼저 집어넣어보자.

선지에 있는 것부터 넣어보다 보면, $a=2$일 때, 즉 $t=4$일 때 만족함을 알 수 있다.

,

4.
$\log_a b \leqq 2$에서, $b \leqq a^2$이다.
그럼 $a=n$일 때, 가능한 b의 개수가 n^2이 된다.
따라서 구하는 (a,b)의 순서쌍의 개수는 $\sum_{n=2}^{k} n^2$이 된다.
따라서, $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}-1=54$에서, $k=5$임을 알 수 있다.
(혹시 1부터 5까지 모두 제곱하여 더한 값이 55임을 알고 있었다면, 계산 없이 바로 구할 수 있었을 것이다.)
따라서 a와 b가 모두 최대가 되는 경우는 $a=5, b=25$인 경우이고, $k=5$이다.
그러므로 $a+b+k$의 최댓값은 35가 된다.

5. $f(x)=ax^4+bx^3$으로 놓자.
$f(1)=2, f'(1)=0$을 각각 대입하면, $a=-6, b=8$임을 구할 수 있다.
$\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^1 f(x)dx$이므로, 홀수차항은 계산하지 않아도 된다.
($f(x-1)$에서 $f(x)$로 x축 방향으로 -1만큼 평행이동 했으므로 적분구간도 그만큼 평행이동 한 것이다. 미적분 선택자라면 그냥 치환적분으로 받아들이면 된다.)
따라서 구하는 것은 $\int_{-1}^1 -6x^4 dx=-\frac{12}{5}$이다.

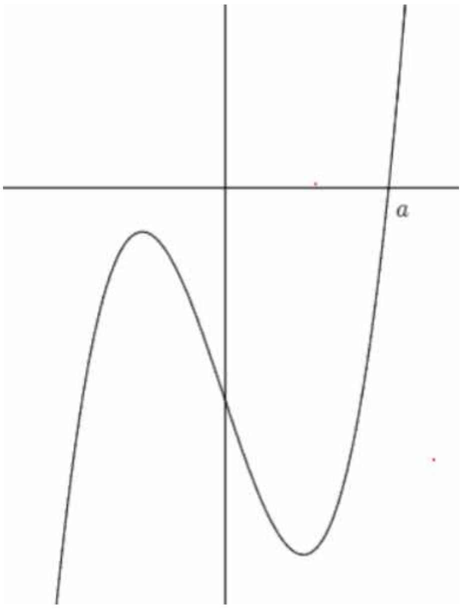
6. $\cos\frac{(a-b)\pi}{2}=0$에서, $a-b$가 홀수여야 함을 알 수 있다.
$a>b$인것만 고려하도록 하자. 왜냐하면, $a<b$인 경우는 $a>b$인 경우에서 구했던 것을 자리만 바꾸어주면 되기 때문이다.
$a-b=1$인 경우, $(3,2), (2,1), \cdots, (-2,-3)$까지 총 6개가 존재한다.
$a-b=3$인 경우, $(3,0), (2,-1), (1,-2), (0,-3)$으로 총 4개가 존재한다.
$a-b=5$인 경우, $(3,-2), (2,-3)$으로 총 2개가 존재한다.
$a-b=7$인 경우 이를 만족하는 순서쌍이 존재하지 않는다.

$a<b$인 경우의 순서쌍은 $a>b$인 경우의 순서쌍에 자리만 바꾸어주면 되므로 똑같이 총 12개가 존재한다.
따라서 $12+12=24$개가 존재한다.

7.

$f(x)=x^3-3x+\alpha$로 두고 시작하자.

$f(x)-9x-9 \leqq 0$이 $(-\infty, a]$에서 만족되므로, $f(x)-9x-9=0$의 그래프 개형은 다음과 같아야 한다.



즉, $f(x)-9x-9$의 극댓값이 0 이하여야 한다. 이때, $f(x)-9x-9=g(x)$라 하자.

이때, a가 가장 작아지긴 위해서는 $g(x)$의 극댓값이 0이여야 한다. (이는 그래프를 위아래로 움직여보면 알 수 있다.)

$g(x)=x^3-12x+\alpha-9$이므로 $x=-2$에서 극댓값을 갖는다. 따라서 $g(x)$의 극댓값이 0일 때, a의 값은 최소이고 그 값은 4이다. (삼차함수의 비율관계)

8. $a^2+b^2=r^2$이므로 산술 기하 평균의 관계에 의해 다음이 성립한다.

$$\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{r^2}{2} \geqq \sqrt{a^2b^2}=|ab|$$

$\log_r|ab| \leqq 2-\log_r 2$이므로 $f(r)=2-\log_r 2$이다.

$$f(64)=\frac{11}{6}$$

9.

(가) 조건의 $\log f(x)$가 일대일 함수가 아니라는 것은 $f(x)$가 일대일 함수가 아니라는 것과 같은 말이다. 만약 $f(x)$가 일대일함수라면 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인데, $\log x$는 일대일 함수이므로 $\log f(x_1) \neq \log f(x_2)$이 되버려 $\log f(x)$가 일대일함수가 아니라는 것과 모순이기 때문이다.

여사건을 이용하여 모든 $f(x)$의 개수에서 일대일함수인 $f(x)$의 개수를 빼서 구해보도록 하겠다.

(나) 조건에서 $f(1)+f(2)+f(3)=12$이고, (다) 조건에서 $f(4)f(5) \leqq 10$이다.

먼저 모든 $f(x)$의 개수를 구해보자.

일단, $f(1), f(2), f(3)$의 값으로 배정 가능한 순서쌍은 $(3,4,5), (2,5,5), (4,4,4)$가 있다.

$(3,4,5)$를 배정하는 경우의 수는 6

$(2,5,5)$를 배정하는 경우의 수는 3

$(4,4,4)$를 배정하는 경우의 수는 1이므로, 모두 더해주면 $f(1), f(2), f(3)$가 가질수 있는 값의 경우는 모두 10가지다.

이제, $f(4)f(5) \leqq 10$를 살펴보자.

$(f(4), f(5))$로 불가능한 경우는 $(3,4), (4,3), (3,5), (5,3), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5)$의 총 8가지가 있으므로 전체 경우 $5 \times 5 = 25$가지에서 이 8가지를 빼주면 $f(4), f(5)$가 가질 수 있는 값의 경우는 모두 17가지이다.

곱해주면 모든 $f(x)$의 개수는 170개이다.

이제 $f(x)$가 일대일함수인 경우를 생각해보자.

$f(1), f(2), f(3)$의 값으로 배정 가능한 순서쌍은 $(3,4,5)$로 유일하므로

이를 배정하는 경우의 수는 6이다. 따라서 $f(1), f(2), f(3)$가 가질 수 있는 값의 경우는 모두 6가지이다.

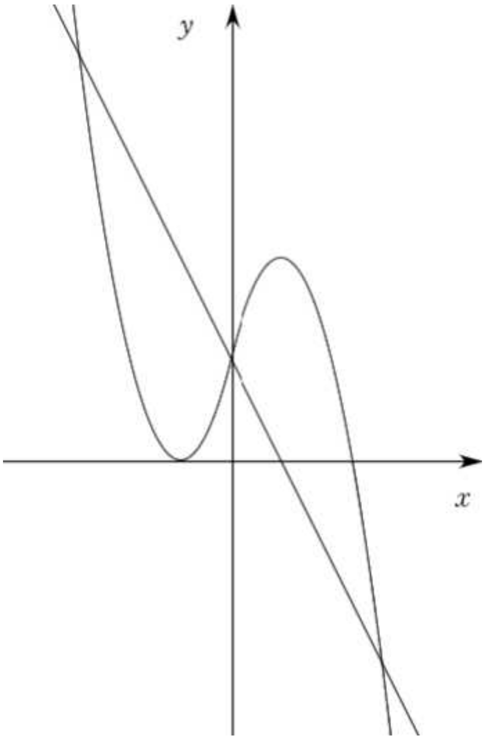
$f(4), f(5)$는 남은 $1, 2$를 배정해주면 되므로 $f(4), f(5)$가 가질 수 있는 경우는 모두 2가지이다.

곱해주면 일대일함수인 $f(x)$의 개수는 12이다.

빼주면 일대일함수가 아닌 $f(x)$의 개수는 158.

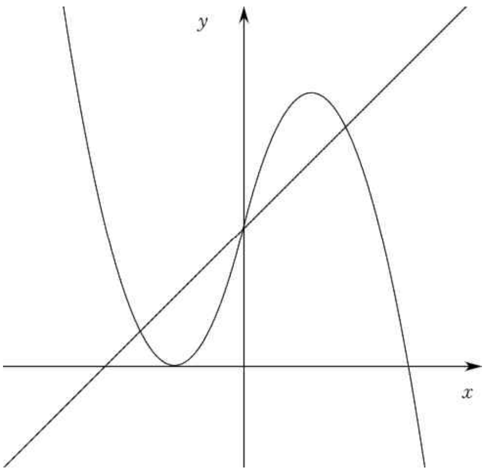
10.

1) $m=-2$인 경우



그림과 같이 $x=-6, x=6$에서 교점을 가짐을 알 수 있다. 넓이공식을 적용해주면, 한쪽 부분의 넓이는 $\frac{6^3}{6}\times 1=36$이므로 두 부분의 넓이는 72이다.

2) $m=1$인 경우



그림과 같이 $x=-3, x=3$에서 교점을 가짐을 알 수 있다. 역시 넓이공식을 적용해주면, 한쪽 부분의 넓이는 $\frac{3^3}{6}\times 1=\frac{9}{2}$이므로 두 부분의 넓이는 9이다.

$h(-2)+h(1)=81$

11.
경찰대 특유의 약간의 발상이 필요한 문제다.
a_n의 식을 다음과 같이 변형해보자.

$$a_n = \frac{\sqrt{9n^2-3n-2}+6n-1}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n-2}} = \frac{\sqrt{(3n+1)(3n-2)}+(3n+1)+(3n-2)}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n-2}}$$

여기서 $\sqrt{3n+1}=a$, $\sqrt{3n-2}=b$로 놓으면

$$a_n = \frac{a^2+b^2+ab}{a+b} = \frac{(a^2+b^2+ab)(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} = \frac{(3n+1)^{\frac{3}{2}}-(3n-2)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{16} a_n = \frac{1}{3}\left\{(4^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}})+(7^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}})+\cdots+(49^{\frac{3}{2}}-46^{\frac{3}{2}})\right\} = \frac{49^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}}{3} = 114$$

12.
원 C의 반지름의 길이의 최솟값은 점 $(18,-1)$과 $y=x^2-1$ 위의 한 점 P와의 거리의 최솟값의 절반이 될 것이다.
이 P의 좌표를 (t, t^2-1)이라 하면, 점 $(18,-1)$와 P를 이은 직선은 점 P에서의 곡선 $y=x^2-1$의 접선과 수직으로 만날 것이다.
점 $(18,-1)$와 P를 이은 직선의 기울기는 $\dfrac{t^2}{18-t}$이고, P에서의 접선의 기울기는 $2t$이다.
이 두 기울기의 곱이 -1이여야 한다. $\dfrac{2t^3}{18-t}=-1$에서, $t=2$이면 성립함을 알 수 있다.
따라서, $(18,-1)$와 P 사이의 거리는 $\mathrm{P}=(2,3)$일 때 $4\sqrt{17}$로 최소이므로 C의 반지름의 최솟값은 그 절반인 $2\sqrt{17}$이다.

13.

(a,b)에서 $y=x^2$에 그은 접선의 접점을 (t,t^2)이라 하자.

그럼 이 접점에서의 접선이 (a,b)를 지나야 한다.

이 점에서의 접선의 방정식은 $y=2t(x-t)+t^2=2tx-t^2$이므로 여기에 (a,b)를 대입하면,

$b=2at-t^2$인데, 이 t에 대한 이차방정식의 두 근을 α,β라 하자.

그럼 두 접선의 기울기는 각각 $2\alpha,2\beta$가 된다. 그런데, 이 두 접선이 수직이므로,

$4\alpha\beta=-1$이고, $\alpha\beta=-\frac{1}{4}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의해 $b=-\frac{1}{4}$이다.

$a^2+b^2=a^2+\frac{1}{16}\leqq\frac{37}{16}$에서, $-\sqrt{2}\leqq a\leqq\sqrt{2}$이다.

$-\frac{1}{4}-\sqrt{2}\leqq a+b\leqq-\frac{1}{4}+\sqrt{2}$이므로, $pq=-\frac{35}{16}$.

14.

$\lim_{x\to\infty}xf(1+\frac{3^k}{x})g(1+\frac{3^k}{x})$에서, $\frac{1}{x}=t$로 치환하면,

$$\lim_{x\to\infty}xf(1+\frac{3^k}{x})g(1+\frac{3^k}{x})=\lim_{t\to0+}\frac{f(1+3^kt)g(1+3^kt)}{t}$$

이때, $f(x)g(x)=h(x)$라 하면

$$\lim_{t\to0+}\frac{f(1+3^kt)g(1+3^kt)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{h(1+3^kt)}{t}=3^kh'(1)$$

그런데, 주어진 조건에서 $h'(1)=4$이므로

$$\lim_{x\to\infty}xf(1+\frac{3^k}{x})g(1+\frac{3^k}{x})=4\times3^k$$

$$\sum_{k=1}^{4}4\times3^k=480$$

15.

점과 원의 거리에 대한 조건에 따라 $f(t)$를 해석해보자.

(점과 원의 거리) =

(점과 원 위의 점 사이의 거리의 최솟값) =

(원의 중심과 점 사이의 거리)-(원의 반지름의 길이)

이다.

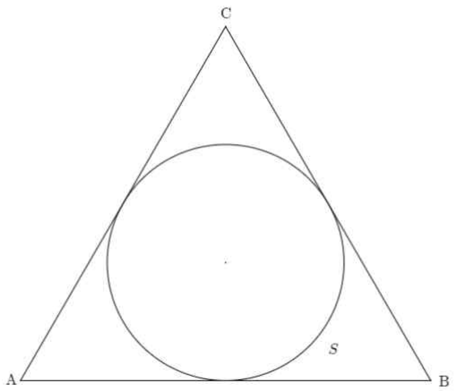
따라서, (원의 중심과 점 사이의 거리)-(원의 반지름의 길이)=t 이려면

(원의 중심과 점 사이의 거리)=$1+t$면 된다.

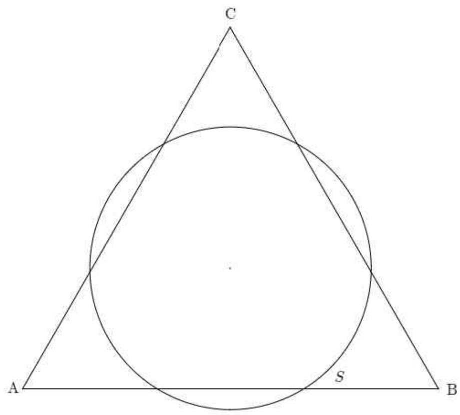
이를 만족하는 점 P의 개수를 구해야 하므로, 이는 곧 중심이 원 S와 같고 반지름의 길이가 $1+t$인 원과 삼각형 ABC의 교점의 개수와 같다.

그림으로 나타내면 다음과 같다.

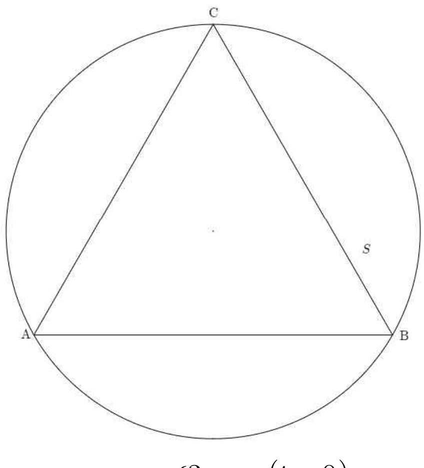
1) $t=0$



2) $0<t<1$



3) $t=1$

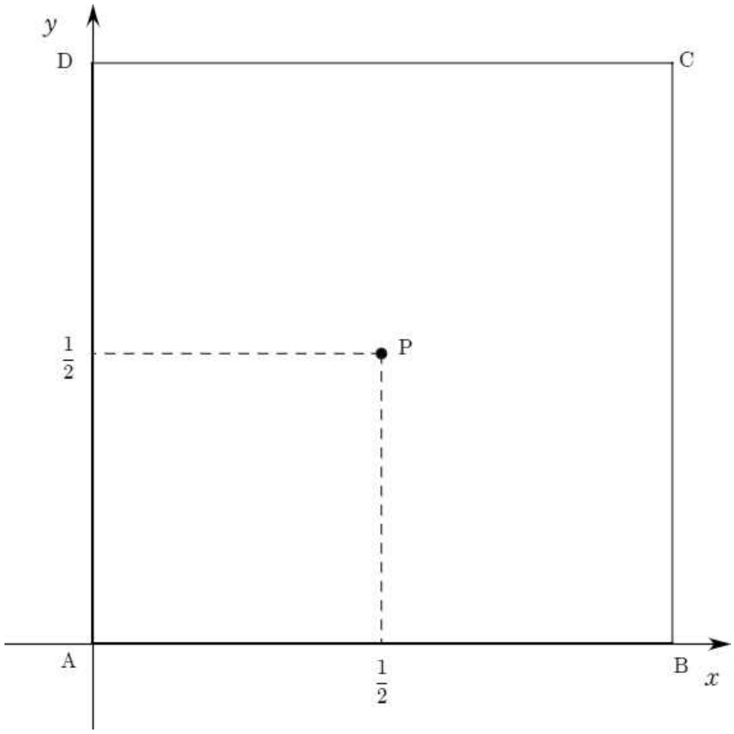


이상에서 $f(t)=\begin{cases} 3 & (t=0) \\ 6 & (0<t<1) \\ 3 & (t=1) \end{cases}$임을 알 수 있다.

따라서 $t=0,1$에서 불연속이므로 $a=2$, $b=\lim_{t\to 1-}f(t)=6$이다. 더해주면 $a+b=8$

16. 척 봐서는 잘 모르겠으니 $n=1$부터 천천히 시도해보자.

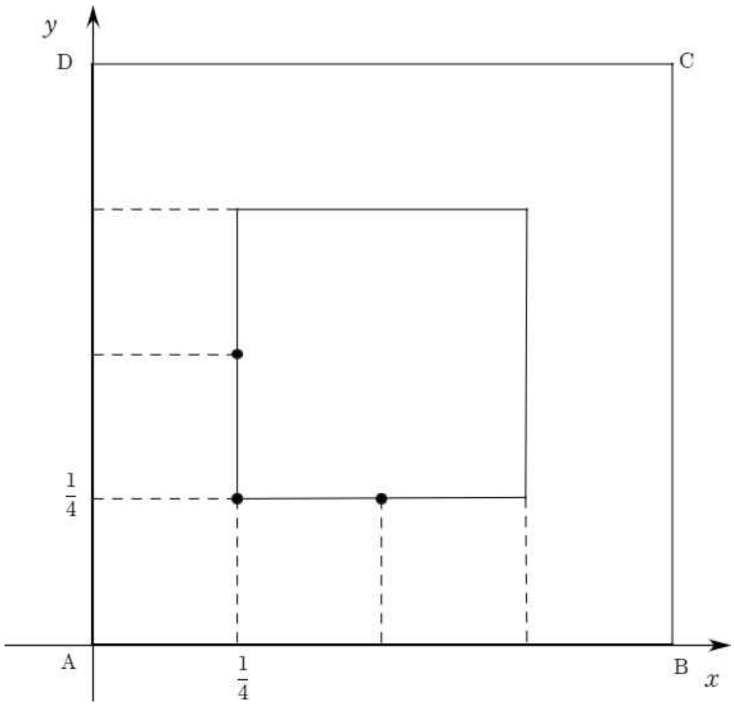
1) $n=1$



(나) 조건을 만족시킬 수 있는 점 P는 $\mathrm{P}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$뿐이다. 이 점은 (다) 조건도 만족시킨다.

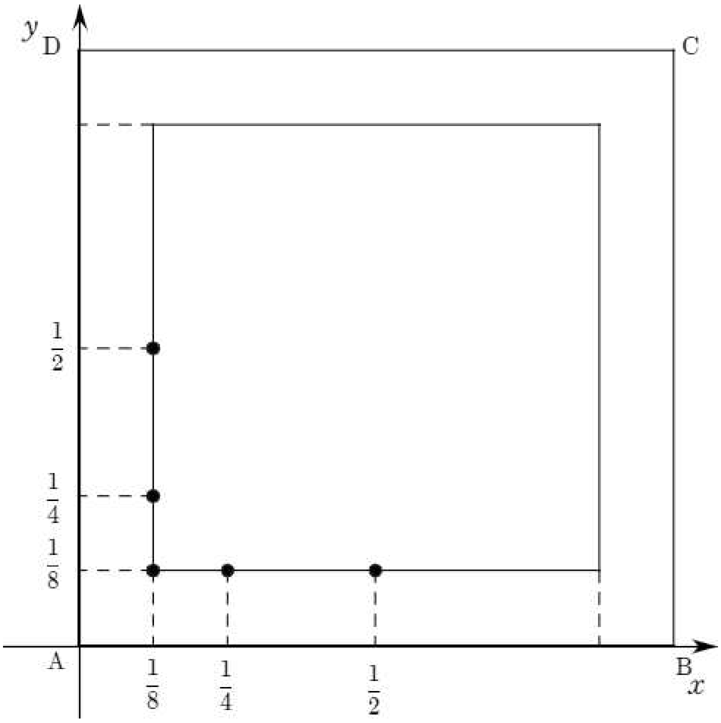
따라서, $a_1=1$

2) $n=2$



(나) 조건을 만족하는 점 (a, b)는 그림의 작은 정사각형의 변 위에 있을 것이다.
이중 (다) 조건을 만족하는 점은 표시한 세 점이다.
$a_2 = 3$

3) $n = 3$



조건을 만족하는 점은 위 그림과 같이 5개이다.
$a_3 = 5$

이상에서 $a_n = 2n - 1$의 규칙을 가짐을 느낄 수 있다.
여기서는 조금 더 엄밀하게 검증해보자면
$n = \alpha$라면, (나) 조건을 만족하는 점 P는 정사각형 ABCD의 각 변에서 $\dfrac{1}{2^{\alpha}}$만큼 떨어진 정사각형의 변 위에 존재한다. 또, (다) 조건에 의해 점 P의 좌표는 $\dfrac{1}{2^{k}}$꼴로 표현될 수 있어야 한다. 따라서 점 P로 가능한 점은

$(\dfrac{1}{2^{\alpha}}, \dfrac{1}{2^{\alpha}}), (\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}, \dfrac{1}{2^{\alpha}}), \cdots, (\dfrac{1}{2^{2}}, \dfrac{1}{2^{\alpha}}), (\dfrac{1}{2^{1}}, \dfrac{1}{2^{\alpha}})$ (y좌표가 $\dfrac{1}{2^{\alpha}}$인 경우)

$(\dfrac{1}{2^{\alpha}}, \dfrac{1}{2^{\alpha}}), (\dfrac{1}{2^{\alpha}}, \dfrac{1}{2^{\alpha-1}}), \cdots, (\dfrac{1}{2^{\alpha}}, \dfrac{1}{2^{2}}), (\dfrac{1}{2^{\alpha}}, \dfrac{1}{2^{1}})$ (x좌표가 $\dfrac{1}{2^{\alpha}}$인 경우)

로 총 $2\alpha - 1$이 됨을 알 수 있다.
따라서 $a_n = 2n - 1$이고, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n = 100$

17.

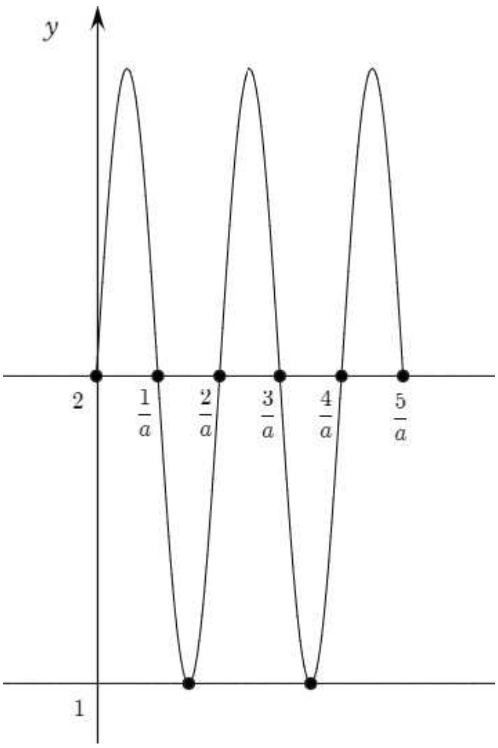
$\log_2 f(x)$가 정수이려면, $f(x)=2^n$(n은 정수)의 꼴로 표현되어야 한다.

b의 값을 고정하며 주어진 조건에 맞는 a값을 찾아보자.

$b=1$일 때, $f(x)$가 가질 수 있는 정수 함숫값은 1, 2, 3이고, 이 중 2^n의 꼴로 표현될 수 있는 것은 1과 2이다.

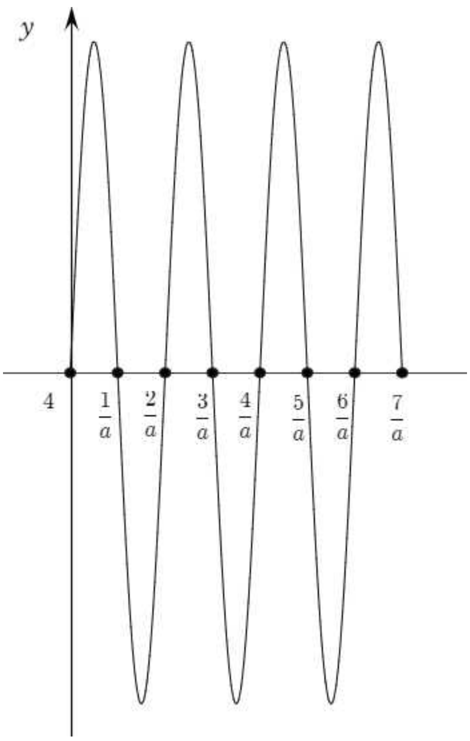
즉, $f(x)=1$과 $f(x)=2$, 즉 $\sin(a\pi x)=0$과 $\sin(a\pi x)=-1$ 의 근의 개수가 총 8개가 되도록 a의 값을 결정해보자.

그렇게 되도록 그래프를 그려주면 다음의 그림과 같다.



이 경우 $a=5$이다.

$b=2$일 때, $f(x)$가 가질 수 있는 정수 함숫값은 3, 4, 5이고 이 중 2^n꼴로 표현될 수 있는 것은 4 뿐이다.
$f(x)=4$, 즉 $\sin(a\pi x)=0$의 근의 개수가 8이 되도록 a의 값을 결정해보자.



이 경우 a의 값은 7이다.
이제 일반적인 b값에 대해 생각해보자.
$b=k$일 때, $f(x)$가 가질 수 있는 정수 함숫값은 $2k-1, 2k, 2k+1$이다.
그런데, $k \neq 1$이면 이 값 중 2^n꼴이 될 수 있는 것은 $2k$뿐이다.
$f(x)=2k$의 근은 곧 $\sin(a\pi x)=0$의 근이고, 이 근이 8개가 되는 경우는 $a=7$임을 확인하였다. k의 값이 증가한다고 해도 새로운 a값이 등장하지 않는다는 것이다.
따라서 a의 값은 $5, 7$뿐이고 더하면 12이다.

18.

$g(x)=2x\int_{-1}^{x}f(t)dt-\int_{-1}^{x}\{f(t)\}^2dt$이다.

미분해주면, $g'(x)=2\int_{-1}^{x}f(t)+2xf(x)-\{f(x)\}^2$이다.

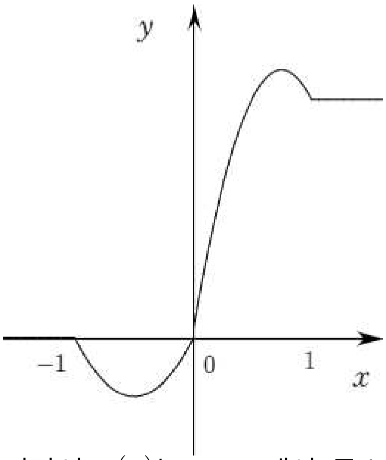
$$2\int_{-1}^{x}f(t)dt=\begin{cases}(1+x)^2 & (-1\leqq x<0)\\ -(1-x)^2+2 & (0\leqq x\leqq 1)\\ 0 & (x<1)\\ 2 & (x>1)\end{cases}$$

$$2xf(x)=\begin{cases}2x(1+x) & (-1\leqq x<0)\\ 2x(1-x) & (0\leqq x\leqq 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$$

$$\{f(t)\}^2=\begin{cases}(1+x)^2 & (-1\leqq x<0)\\ (1-x)^2 & (0\leqq x\leqq 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$$

이므로 $g'(x)=\begin{cases}2x(1+x) & (-1\leqq x<0)\\ -2(1-x)^2+2x(1-x)+2 & (0\leqq x\leqq 1)\\ 0 & (x<1)\\ 2 & (x>1)\end{cases}$

이를 그래프로 그리면 다음과 같다.



따라서 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이자 최소를 가진다.

$g(0)=-\int_{-1}^{0}\{f(t)\}^2dt=-\int_{-1}^{0}(1+x)^2=-\frac{1}{3}$

19.

(가)에서 $f(1)=0$

(나)에서 $f(3)=0$

여기서 $f(-x)=g(x)$이므로, $g(-3)=0, g(-1)=0$임을 알 수 있다.

(다)에서 $\lim_{x \to -3+} \frac{1}{g'(x)} = \infty$에서, $\lim_{x \to -3+} g'(x) = 0+$

(0+는 0보다 큰 쪽에서 0으로 수렴한다는 뜻이다.)

$g'(-3)=0$이므로, $f'(3)=0$

그런데, (나)에서 $k \neq 0$이라고 하였다.

만약 $g(3) \neq 0$이면, 분자는 이차, 분모는 일차라서 0이 되버린다. 따라서 $g(3)=0$이고,

$f(-3)=0$

이를 종합해서 차수가 최소가 되도록 식을 써보면, $f(x)=(x-1)(x-3)^2(x+3)$

(여기서 $\lim_{x \to -3+} g'(x) = 0+$ 임을 확인해야한다. 이는 그래프를 통해 어렵지 않게 알 수 있으므로 여기서는 굳이 쓰지 않겠다.)

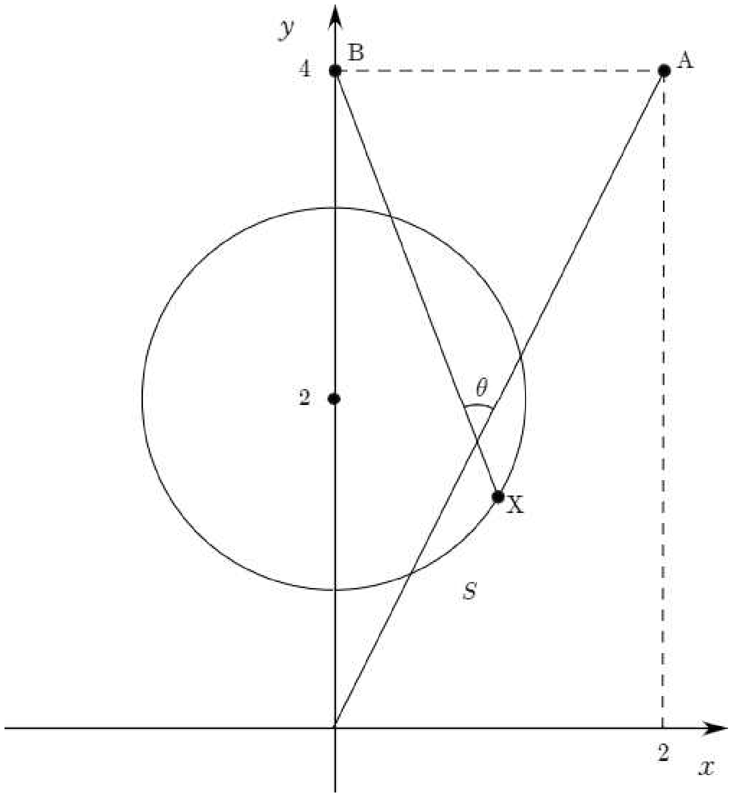
따라서 $m=4$이다.

$g(x)=(x+1)(x+3)^2(x-3)$이고 이를 (나)의 극한식에 대입하면

$\lim_{x \to 3} \frac{(x-1)(x-3)^2(x+3)}{(x-3) \times (x+1)(x+3)^2(x-3)} = \frac{1}{12} = k$ 이므로

$m+k = \frac{49}{12}$

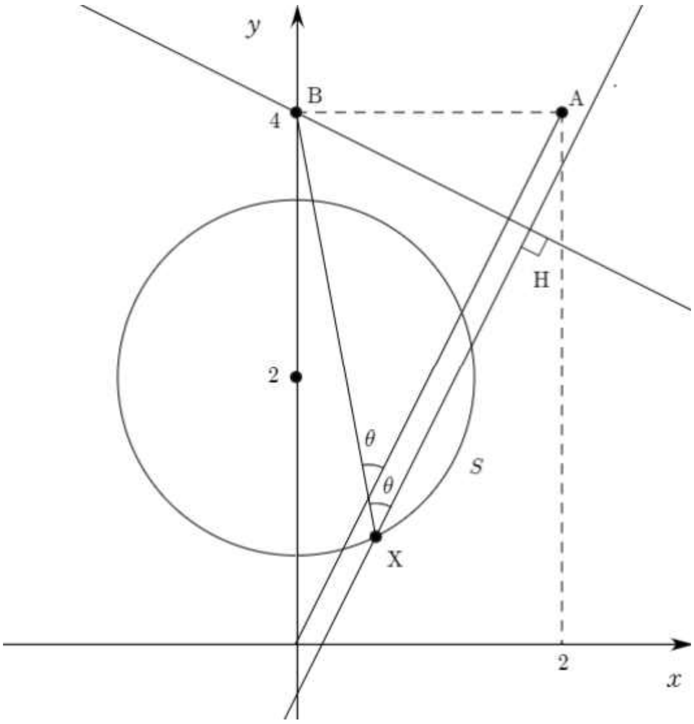
20. 점 A의 x좌표를 t라 하자. 그럼 $3t^2-2t=8$에서 $t=2$임을 알 수 있다.
이후 점 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{X}$와 원 S 를 좌표평면에 표시해주면 다음과 같은 그림이 된다.



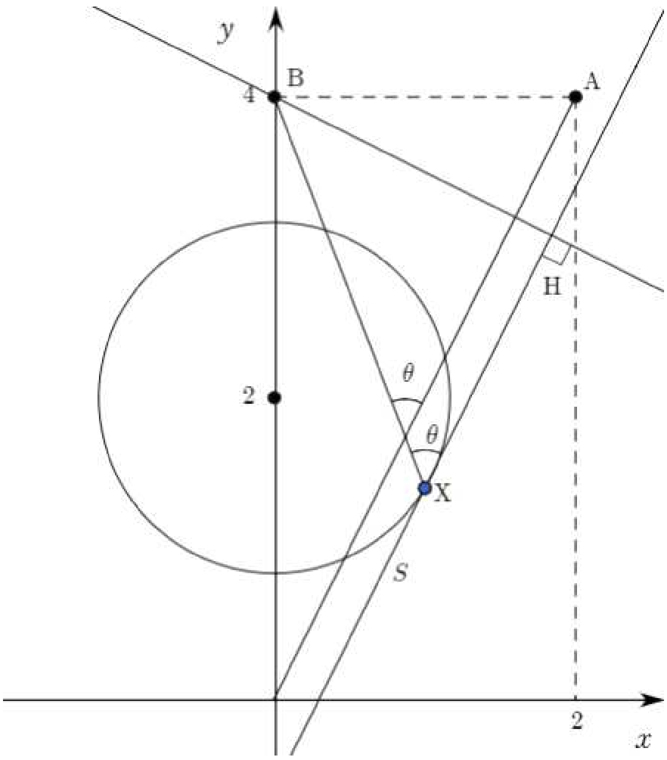
선지를 보고 반지름의 범위를 생각해보면 S와 OA는 만나야 함을 생각해볼 수 있다. 물론 이 생각이 이후의 풀이에 크게 영향을 주진 않지만 일단 상태가 결정이 되면 마음이 편해진다.

이제 $\overline{\mathrm{BX}}\sin\theta$가 무엇을 의미할지 생각해보자. 혹시 미적분 선택자라면 삼각함수 도형 극한 문제에서 이러한 식을 많이 보았을 것이다. 바로 한 각이 θ이고 빗변이 $\overline{\mathrm{BX}}$인 직각삼각형의 높이가 바로 이런 형태이다. 물론 미적분 선택자가 아니더라도, 삼각함수의 정의를 이용하여 이러한 생각을 해냈어야 이 문제를 풀이하는데 어려움이 없었을 것이다.

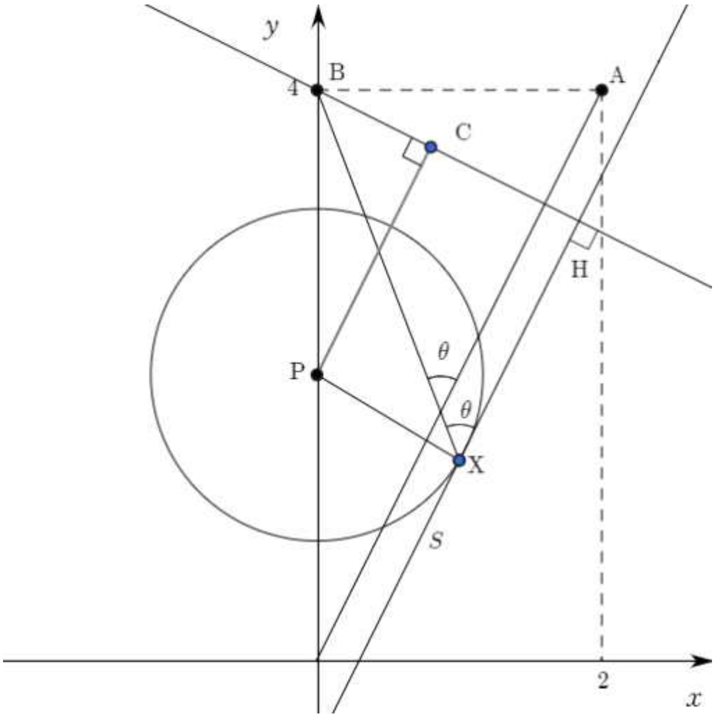
그럼 이러한 직각삼각형을 그려주기 위해 X를 지나고 $\overline{\mathrm{OA}}$와 평행한 직선 l을 그어주고 점 B에서 직선 l에 수선의 발 H를 내리면 다음의 그림과 같이 된다.



그럼 $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{BX}}\sin\theta$이다. 이때 $\overline{\mathrm{BH}}$가 최대가 되려면, 직선 l이 원 S에 접해야 함이 보인다. 그렇게 되도록 다시 그림을 그려주면 다음과 같다.



여기까지 왔다면 거의 다 푼것과 다름없다. 이제 $\overline{BH}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$임을 이용하여 원의 반지름을 구하기만 하면 된다. 이때, 원 S와 직선 l이 접하므로, 원 S이 중심과 X를 이은 직선과 l은 수직이다. 이를 이용하여 보조선을 그어주면 다음과 같다.



원 S의 중심을 P라 놓자. P에서 BH에 내린 수선의 발을 C로 두면 직사각형 $PXHC$가 만들어진다. 이때, $\overline{PX}=\overline{CH}$이므로 $\overline{CH}$가 곧 원의 반지름이 됨을 알 수 있다.

OA와 l, PC 모두 기울기가 2이므로, $2\overline{BC}=\overline{PC}$이고, $\overline{PB}=2$이다.

따라서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{BC}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이다.

따라서, 원의 반지름의 길이는 $\overline{CH}=\overline{BH}-\overline{BC}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

21.
$n=1$을 대입하면 $a_1=2$
n과 $n-1$을 각각 대입해서 변변 빼주면
$\frac{a_n}{2n-1}=2^{n-1}(n\geq 2)$
$a_5=144$, $a_1+a_5=146$

22.
$\log a=A$, $\log b=B$, $\log c=C$ 라 놓고 식을 다시 써주면
$A+B-\log 2=AB$ ⋯ ①
$B+C-\log 2=BC$ ⋯ ②
$C+A=CA$ ⋯ ③
①에서 ②를 빼면
$A-C=B(A-C)$에서, $B=1$ 또는 $A=C$
$B=1$이면, $b=10$이므로 조건에 모순. 따라서 $A=C$
이를 ③에 대입하면 $A=C=2$, 다시 ①에 대입하면
$2-\log 2=B$, $B=\log 50$이다.
따라서 $a=100, b=50, c=100$. $a+b+c=250$

23.
$f(x)=x^2+ax+b$라 놓자.
$x=1$에서 연속이여야 하므로, $3=1+a+b$, $b=2-a$이다.
$x\geq 1$에서 $f(x)$는 증가해야 하므로, $a\leq -2$여야 한다.
따라서, $f(3)=9+3a+b=11+2a\leq 7$

24.

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$를 이용하여 식을 변형해주면

$(a - a\cos^2 x - 4)\cos x + 4 = -a\cos^3 x + (a-4)\cos x + 4 \geqq 0$

$\cos x = X$로 치환하면

$-aX^3 + (a-4)X + 4 \geqq 0 \ \ (-1 \leqq X \leqq 1)$

이다.

$f(x) = -ax^3 + ax + 4$로 놓으면, $-1 \leqq x \leqq 1$에서 $f(x) \geqq 0$이 되도록 하는 a값의 범위를 찾으면 된다.

이는 $f(x)$의 그래프 개형에 의존하므로 $f(x)$의 그래프 개형에 따라 케이스를 나눠보자.

1) $f(x)$가 극값을 가지지 않는 경우

$f'(x) = -3ax^2 + a - 4$에서, 판별식 $D = 3a(a-4) \leqq 0$이여야 한다.

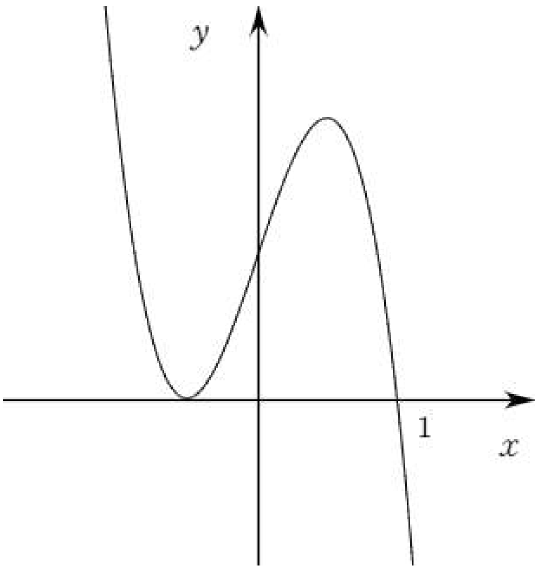
즉, $0 \leqq a \leqq 4$면 된다.

이 경우 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 실수 전체의 집합에서 감소한다. 따라서 $x = 1$에서의 함숫값이 0 이상인지만 확인하면 된다. 그런데 $f(1)$의 값은 a의 값에 관계없이 항상 0 이므로 $0 \leqq a \leqq 4$인 경우 주어진 부등식을 만족시킨다.

2) $f(x)$가 극값을 가지고 최고차항의 계수가 음수인 경우

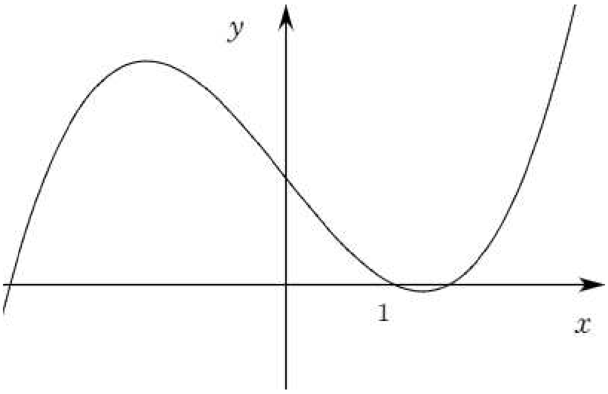
1)의 판별식에서 $a > 4$여야 함을 알 수 있다.

a값에 관계없이 $f(1) = 0$, $f(0) = 4$, $f(-1) = 8$임을 생각하고 그래프를 그려보면 $-1 \leqq x \leqq 1$에서의 $f(x)$의 최솟값은 곧 $f(x)$의 극솟값이며 이 극솟값은 a값이 증가함에 따라 작아짐을 알 수 있다. 따라서 극솟값이 0일 때, a값이 최대가 된다.

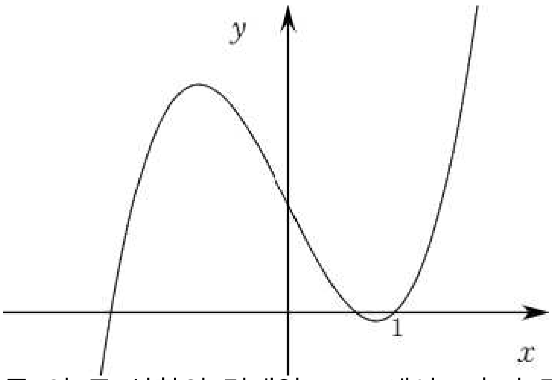


이를 그림으로 나타내면 위 그림과 같다. 삼차함수의 비율관계에 의해 극솟값의 x좌표는 $x = -\dfrac{1}{2}$이다. $f'(-\dfrac{1}{2}) = 0$에서, $a = 16$이다. 따라서 이 경우 $4 < a \leqq 16$

3) 극값을 가지고 최고차항의 계수가 양수인 경우
1)의 판별식에서 $a<0$이여야 함을 알 수 있다.
a값에 관계없이 $f(1)=0$, $f(0)=4$, $f(-1)=8$임을 생각하고 그래프를 그려보자.
a의 값이 적당히 크면 다음과 같은 그래프가 그려진다.



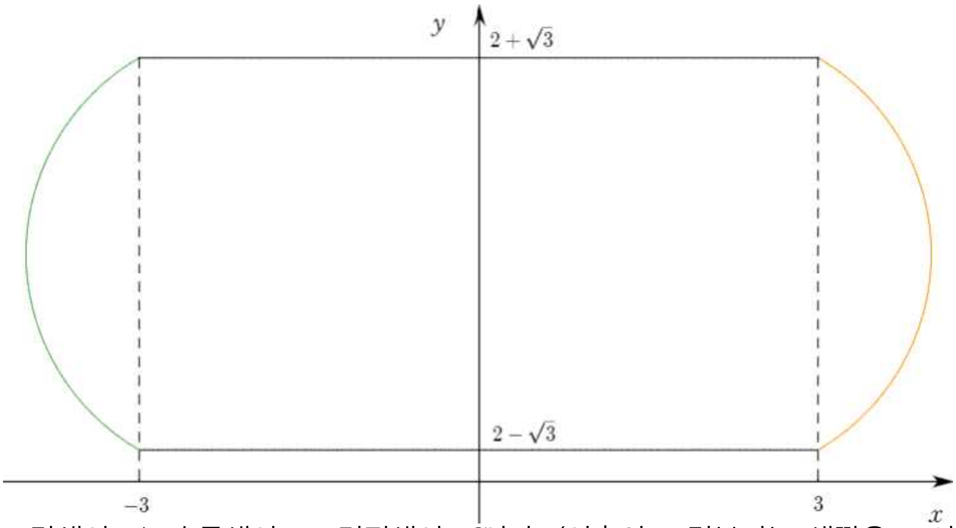
만약 a의 값이 작아지면 다음과 같이 그려진다.



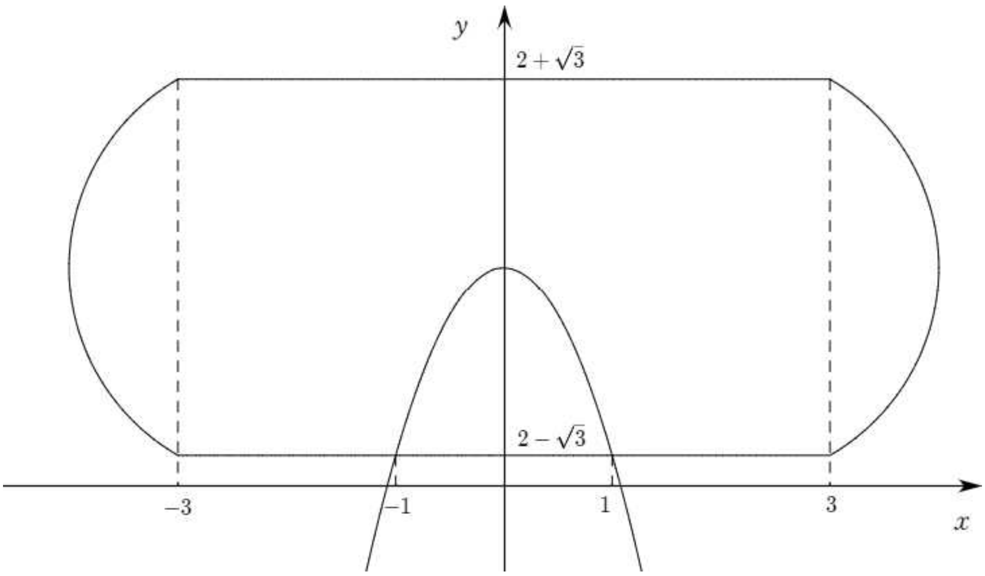
즉 이 두 상황의 경계인 $x=1$에서 x축과 접하는 상황에서 a가 최소가 될 것이다.
$f'(1)=0$에서, $a=-2$이다. 따라서 이 경우 $-2 \leqq a<0$이다.

이상에서 $-2 \leqq a \leqq 16$이므로 최솟값과 최댓값의 합은 14

25.
이 문제는 A, B, C가 무엇을 의미하는 집합인지 파악한다면 생각보다 어렵지 않게 풀 수 있다.
A부터 해석해보자. $(x, y) = (2+2\cos\theta, 2+2\sin\theta)$로 놓으면, $(x-2)^2+(y-2)^2=4$임을 알 수 있다. 따라서, 이 도형은 일단 원의 일부분임을 알 수 있다.
이때, $-\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$이므로, 아까의 원에서 $3 \leqq x \leqq 4$이고, $2-\sqrt{3} \leqq y \leqq 2+\sqrt{3}$에 해당하는 영역만 표시해주면 된다.
B도 완전히 같은 방식으로 해석할 수 있다.
C는 딱히 해석이 필요하지 않다. 그냥 선분 두 개 그리면 된다.
따라서 이 도형들을 모두 좌표평면에 표시해주면 다음과 같이 나타난다.



노란색이 A, 초록색이 B, 검정색이 C이다. (이후의 그림부터는 색깔을 표시하지 않겠다.)
여기에 $y=-\sqrt{3}x^2+2$까지 표시해주면 다음과 같다.



여기서 $c=2-\sqrt{3}$임을 알 수 있다.

집합 X로 둘러싸인 부분의 넓이를 계산해주면 $\frac{8\pi}{3}+10\sqrt{3}$이다.

$y=-\sqrt{3}x^2+2$와 $y=2-\sqrt{3}$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 넓이공식을 적용해주면

$\frac{2^3}{6}\times\sqrt{3}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$이다.

따라서, $\alpha=\frac{8\pi}{3}+10\sqrt{3}$, $\beta=\frac{4\sqrt{3}}{3}$이고, $\alpha-\beta=\frac{8\pi}{3}+\frac{26\sqrt{3}}{3}$이다.

$p+q=34$