지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

https://orbi.kr/00043463424

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

https://atom.ac/books/9395

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex
공통

1. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?
〔2023학년도 사관학교 10〕

(가) $f(0)=2$이고 $f'(4)=-24$이다. (나) 부등식 $xf'(x)>0$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 범위는 $1<x<3$이다.

① 3　② $\frac{10}{3}$　③ $\frac{11}{3}$　④ 4　⑤ $\frac{13}{3}$

1. 정답 ② 〔2023학년도 사관학교 10〕

1) 조건해석

사차함수 $f(x)$가 있는데 (가)조건에서 $f(0)=2$이고 $f'(4)=-24$라고 합니다. 뭐 그렇다네요.

(나)조건에서 $xf'(x)>0$을 만족시키는 x의 범위가 $1<x<3$이라고 합니다. 일단 함수가 곱해져 있어요. x를 기준으로 양수냐 음수냐가 나뉘니까 이걸 기준으로 생각해보면 $f'(x)>0$가 되겠죠. $x<0$이라면? $f'(x)<0$가 될 거예요. 이걸 만족시키는 범위가 $1<x<3$이라는 거예요.

다시 말하면 $x<0$일 때는 항상 $f'(x)\geq 0$이고 $x>0$일 때는 $1<x<3$에서만 $f'(x)>0$이 된다는 거겠네요.

정리하면 $x<0$일 때는 $f'(x)\geq 0$이고 $0<x\leq 1$일 때는 $f'(x)\leq 0$,
$1<x<3$일 때 $f'(x)>0$이고 $x\geq 3$일 때는 $f'(x)\leq 0$이어야 합니다.

생각해보세요. $f'(x)$의 값이 양수이다가 갑자기 음수가 될 수 있나요? $f(x)$는 사차함수라 연속이라서 그럴 수 없어요. 다시 말하면 0을 지나는 점이 있다는 말이죠. 그게 각 부분의 경계겠네요. $x=0$, $x=1$, $x=3$에서 $f'(x)=0$이어야 합니다. 따라서 $f'(0)=f'(1)=f'(3)=0$입니다.

2) 함수 구하기 - 인수정리

$f'(0)=f'(1)=f'(3)=0$로 $f'(x)$를 구한 후 부정적분해서 $f(x)$로 올라오도록 할게요. $f'(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면 $f'(x)$는 x, $(x-1)$, $(x-3)$의 인수를 각각 적어도 하나씩 가지니까
$f'(x)=ax(x-1)(x-3)$입니다. $f'(4)=-24$이니까 넣어보면 $12a=-24$이고 $a=-2$입니다.

$f'(x)=-2x^3+8x^2-6x$이네요. 부정적분하면 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{8}{3}x^3-3x^2+b$인데 $f(0)=2$이니까

$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{8}{3}x^3-3x^2+2$입니다. $f(2)=-8+\dfrac{64}{3}-12+2=\dfrac{10}{3}$이네요. 답은 ②번입니다.

2. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \le 2) \\ ax+b & (x > 2) \end{cases}$$

에 대하여 $f(\alpha)+\lim_{x \to \alpha+} f(x)=4$를 만족시키는 실수 α의 개수가 4이고, 이 네 수의 합이 8이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)〔2023학년도 사관학교 12〕

① $-\frac{7}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

2. 정답 ① 〔2023학년도 사관학교 12〕

1) 좌극한 우극한, 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인

$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \le 2) \\ ax+b & (x > 2) \end{cases}$ 인데 $f(\alpha)+\lim\limits_{x\to\alpha+}f(x)=4$를 만족시키는 α의 개수가 4이고 합이 8이랍니다.

일단 좀 볼까요? 만약 $x=2$를 제외한 나머지 부분이라면? 다항함수니까 연속이므로 $f(\alpha)$와 $\lim\limits_{x\to\alpha+}f(x)$가 같겠죠? 따라서 $f(\alpha)=2$를 만족시키는 α를 찾으면 됩니다.

일단 $f(x)=x^2+1$에서는 만족시키는 α가 두 개가 있죠? $x^2+1=2$하면 $x=-1,\ 1$이 가능합니다.

$f(x)=ax+b$에서는.... 만약 여기서 없다고 가정하면 아예 개수가 4개가 나올 수가 없어요. 우리가 마지막으로 확인해야 할 부분은 $x=2$인데 여기서 나온다고 해도 3개잖아요. 따라서 $ax+b=2$해서 $x=\dfrac{2-b}{a}$에서 하나가 있습니다.

그러면 마지막 하나는 $x=2$여야겠네요. 먼저 $f(2)=5$이니까 $\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=-1$입니다. 따라서 $2a+b=-1$이네요.

4개의 수의 합이 8이어야 하죠? 모두 더하면 $-1+1+2+\dfrac{2-b}{a}=8$이고 $\dfrac{2-b}{a}=6$입니다. $2-b=6a$이네요. $2a+b=-1$랑 연립하면 $a=\dfrac{3}{4},\ b=-\dfrac{5}{2}$입니다. $a+b=-\dfrac{7}{4}$이네요. 답은 ①번입니다.

3. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ 2f(1)-f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 〔2023학년도 사관학교 14〕

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{h \to 0+} \frac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}=a$ (a는 상수)이고 $g(1)=1$이면 $g(a)=1$이다.

ㄷ. $\lim_{h \to 0+} \frac{g(b+h)+g(b-h)-6}{h}=4$ (b는 상수)이면 $g(4)=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 정답 ② 〔2023학년도 사관학교 14〕

1) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인, 함수 극한은 논리다

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 이차함수인데 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ 2f(1)-f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$랍니다.

ㄱ에서 $g(x)$가 연속이냐고 물어보네요. 일단 $x=1$을 제외하고는 다항함수니까 연속이죠? $x=1$에서 좌극한 값과 우극한 값, 함숫값은 모두 $f(1)$으로 동일하니까 연속 맞습니다.

2) 함수 구하기 - 차함수

ㄴ에서 $\lim_{h \to 0+} \frac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}=a$이고 $g(1)=1$이면 $g(a)=1$이냐고 물어봅니다. 분모가 0으로 가는데 극한값이 존재하니까 분자도 0으로 가야겠죠? 따라서 $\lim_{h \to 0+} g(-1+h)+g(-1-h)-6=0$이고 $2g(-1)=6$입니다. $g(-1)=f(-1)=3$이네요. 그리고 $g(1)=f(1)=1$이구요.

지금 $f(-1)=3$이고 $f(1)=1$이죠? 이 두 점을 지나는 직선은 $-x+2$입니다. 그러면 $f(x)$와 $-x+2$는 $x=-1$, $x=1$에서 만나는 거네요? 따라서 차함수에 의하여 $f(x)-(-x+2)$는 $(x+1)$, $(x-1)$ 인수를 각각 적어도 하나 가져야 합니다. $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)+x-2=(x+1)(x-1)$이고 $f(x)=x^2-x+1$이네요.

한편, $\lim_{h \to 0+} \frac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}=a$에서 6 대신에 $g(-1)+g(-1)$을 넣으면 $\lim_{h \to 0+} \frac{g(-1+h)-g(-1)+g(-1-h)-g(-1)}{h}=a$으로 고칠 수 있죠? 이때 각각 극한값이 존재하니까 $\lim_{h \to 0+} \frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}+\lim_{h \to 0+} \frac{g(-1-h)-g(-1)}{h}=a$입니다. 오른쪽은 $-h=k$로 바꿔버리면 $\lim_{h \to 0+} \frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}-\lim_{k \to 0-} \frac{g(-1+k)-g(-1)}{k}$인데 이건 $g'(-1)-g'(-1)=a=0$이죠? $a=0$입니다.

그럼 이제 $g(a)=g(0)=f(0)=1$인지만 확인하면 되겠네요. 방금 $f(x)=x^2-x+1$을 구해놨으니까 넣어보면 $f(0)=1$ 맞습니다. ㄴ도 맞네요.

ㄷ에서 $\lim_{h \to 0+} \frac{g(b+h)+g(b-h)-6}{h}=4$이면 $g(4)=1$이냐고 물어보네요. 먼저 분모가 0으로 가는데 극한값이

존재하니까 분자도 0으로 가야 합니다. $\lim_{h \to 0+} g(b+h)+g(b-h)-6=0$이고 $2g(b)=6$이고 $g(b)=3$입니다.

ㄴ과 마찬가지의 방식으로 해보면 $\lim_{h \to 0+} \frac{g(b+h)-g(b)+g(b-h)-g(b)}{h}=4$이고

$\lim_{h \to 0+} \frac{g(b+h)-g(b)}{h}-\lim_{k \to 0-} \frac{g(b+k)-g(b)}{k}$이 됩니다. $g'(b+)-g'(b-)=4$이네요.

$g'(b+)-g'(b-)=4$를 한 번 생각해보세요. 일반적으로 다항함수는 미분가능이라 좌미분계수와 우미분계수가 다를 수가 없어요. 함수가 끊기지 않는다면요. 그런데 지금은 끊긴 부분이 있죠? $x=1$ 말이에요. 따라서 $b=1$입니다.

$g(1)=f(1)=3$이구요, $g'(1+)-g'(1-)=4$를 활용해봅시다. 먼저 $g'(1+)$의 경우 우미분계수니까 $g(x)=2f(1)-f(x)$에서 $-f'(1)$입니다. $g'(1-)$의 경우는 $g(x)=f(x)$에서 $f'(1)$입니다. 따라서 $-2f'(1)=4$이고 $f'(1)=-2$이네요.

$f(1)=3$, $f'(1)=-2$를 사용해서 $f(x)$를 구해봅시다. 이건 사실상 기울기가 -2인 일차함수가 $(1,\ 3)$에서 $f(x)$와 접한 것과 같죠? 일차함수는 $-2x+5$이니까 차함수에 의하여 $f(x)-(-2x+5)=(x-1)^2$이고 $f(x)=(x-1)^2-2x+5$입니다.

그러면 $g(4)=2f(1)-f(4)=6-9+3=0$입니다. $g(4)=1$이 아니죠? ㄷ은 맞지 않습니다. 따라서 맞는 건 ㄱ, ㄴ이고 답은 ②번이네요.

4. 함수

$$f(x)=\left|2a\cos\frac{b}{2}x-(a-2)(b-2)\right|$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 10 이하의 자연수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는? 〔2023학년도 사관학교 15〕

(가) 함수 $f(x)$는 주기가 π인 주기함수이다. (나) $0 \le x \le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2a-1$의 교점의 개수는 4이다.

① 11　② 13　③ 15　④ 17　⑤ 19

4. 정답 ⑤ 〔2023학년도 사관학교 15〕

1) 자연수 보이면 숫자 넣을 준비, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$f(x)=\left|2a\cos\frac{b}{2}x-(a-2)(b-2)\right|$가 있습니다. 보기만 해도 무시무시하네요.

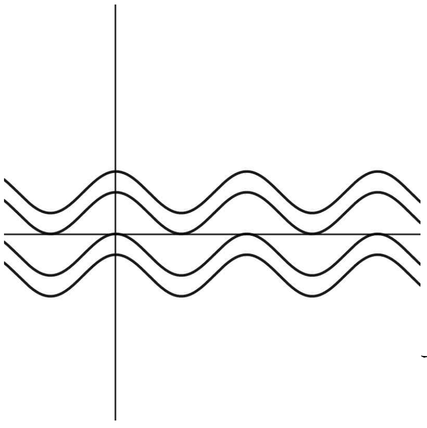
이때 (가)와 (나)조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 a, b의 순서쌍의 개수를 구하라네요. 한 번 봅시다.

(가)조건에서 $f(x)$는 주기가 π인 주기함수랍니다. 여기서 조심해야 할 건 바로 $b=4$라고 확정 지으면 안 된다는 거예요. 절댓값이 씌워져 있어서 어떻게 될지 모르거든요.

(나)조건에서 $0\le x\le 2\pi$에서 $y=f(x)$와 $y=2a-1$이 4점에서 만난다고 합니다. (가)와 (나)조건 모두 실제로 그래프를 그려봐야 알겠네요.

일단 $2a\cos\frac{b}{2}x-(a-2)(b-2)$에 대하여 좀 알아봅시다. 주기는 $\frac{4}{b}\pi$이고, 최댓값은 $4a+2b-ab-4$, 최솟값은 $2b-ab-4$인 함수네요. 이 함수를 절댓값을 씌우면 $f(x)$가 될 거예요.

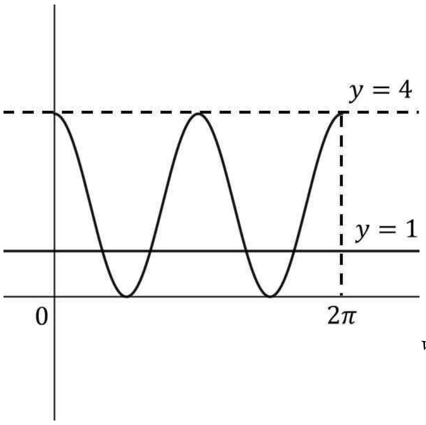
근데 여러분 생각해보세요. 만약 $2a\cos\frac{b}{2}x-(a-2)(b-2)$가 x축과 아예 안 만나거나 접한다면? 그러니까



요런 모양이라면? 절댓값을 씌워도 주기는 변하지 않죠? 이러면 주기는 $\frac{4}{b}\pi$인데 이게 π이니까 $b=4$입니다.

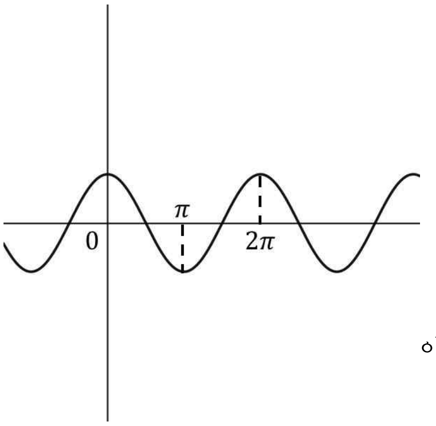
그리고 또한 최솟값이 0보다 크거나 같거나 최댓값이 0보다 작거나 같아야죠? 따라서 $2b-ab-4\ge 0$이거나 $4a+2b-ab-4\le 0$입니다. $b=4$니까 넣어서 정리하면 $1\ge a$ 혹은 $4\le 0$입니다. $4\le 0$는 말이 안 되니까 무조건 $a=1$일 때만 가능하네요. 결국 $2+2\cos 2x$입니다.

그럼 이제 $0 \le x \le 2\pi$에서 $y=1$과 4개의 점에서 만나는지 확인해볼까요?

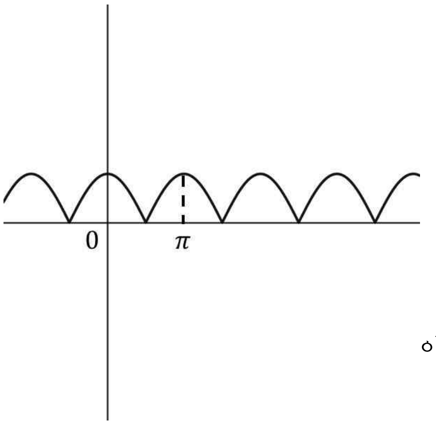


만나네요! (4, 1) 하나 찾았어요.

그러면 이제 $f(x)$가 x축과 만나는 경우를 생각해볼게요. 먼저 함수가 최댓값과 최솟값의 절댓값이 같아서

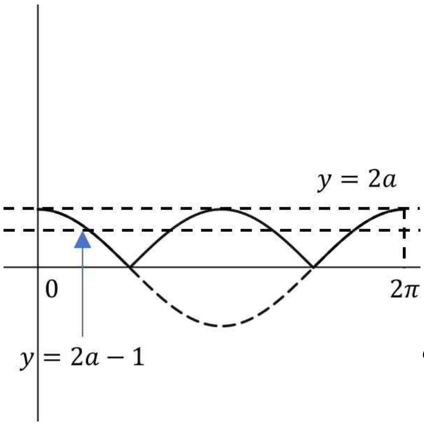


이렇게 되는 모양을 생각해봅시다. 이 경우 절댓값을 씌우면

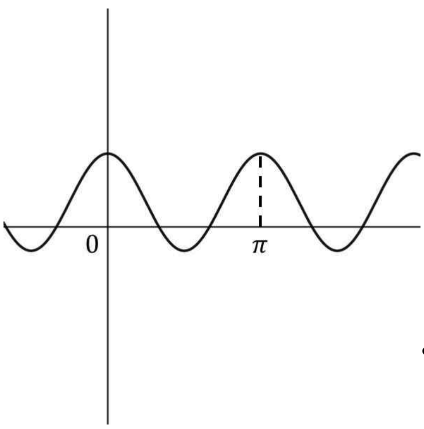


이렇게 최솟값의 절댓값과 최댓값이 같아지면서 주기가 절반으로 줄어들 수 있죠. 결국 주기인 $\frac{4}{b}\pi$의 절반이 π이 되도록 해야 하니까 $b=2$입니다. $b=2$이니까 $2a\cos x$이죠? 이 경우 a가 자연수이기만 하면 다 됩니다. 1부터 10까지죠.

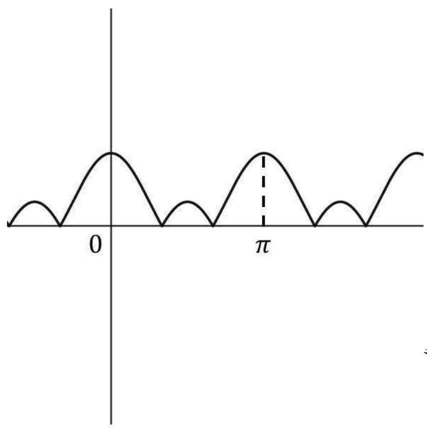
그럼 이제 $0 \leq x \leq 2\pi$에서 $y=2a-1$과 4개의 점에서 만나는지 확인해봅시다.



a는 자연수니까 무조건 만나네요. $b=4$일 때 $a=1$부터 10까지 10개 찾았어요.



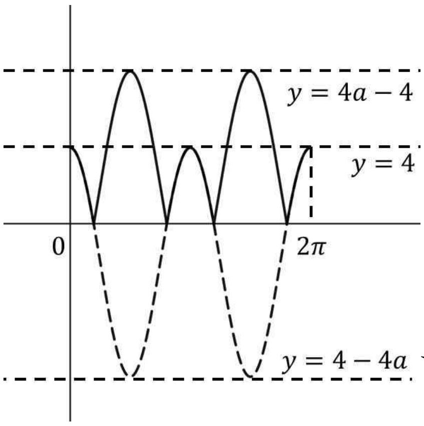
이런 모양은요?



주기가 변하지 않게 되네요. 이러면 $b=4$여야 합니다. 그리고 최댓값과 최솟값 사이에 $y=0$이 있어야 하니까 $2b-ab-4<0<4a+2b-ab-4$입니다. $b=4$를 넣어 정리하면 $4-4a<0<4$이고 $a>1$이어야 합니다.

(가)조건은 $b=4$일 때 $a=2$부터 9까지 9개가 가능하네요.

이제 $0 \leq x \leq 2\pi$에서 $y=2a-1$과 4개의 점에서 만나는지 확인해봅시다. $2a\cos 2x-2a+4$이니까 최댓값은 4, 최솟값은 $4-4a$이고



요렇게 됩니다. $y=2a-1$이 4개의 점에서 만나려면

$4<2a-1<4a-4$여야 합니다. $a>\frac{5}{2}$이고 $a>\frac{3}{2}$이니까 $a>\frac{5}{2}$인 $a=3$부터 $a=10$까지 8개가 가능하겠네요.

그럼 총 $1+10+8=19$개입니다. 답은 ⑤번이네요.

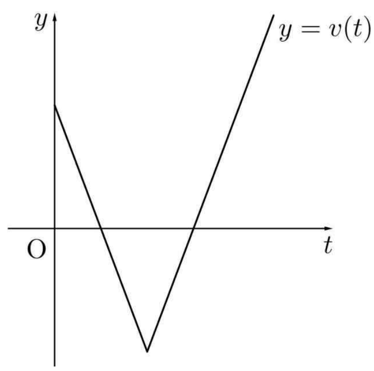
5. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$ 에서의 속도는

$$v(t) = |at - b| - 4 \quad (a > 0,\ b > 4)$$

이다. 시각 $t = 0$에서 $t = k$까지 점 P가 움직인 거리를 $s(k)$, 시각 $t = 0$에서 $t = k$까지 점 P의 위치의 변화량을 $x(k)$라 할 때, 두 함수 $s(k)$, $x(k)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq k < 3$이면 $s(k) - x(k) < 8$이다.
(나) $k \geq 3$이면 $s(k) - x(k) = 8$이다.

시각 $t = 1$에서 $t = 6$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) 〔2023학년도 6월 20〕



5. 정답 14 〔2023학년도 사관학교 20〕

1) 위치, 속도, 가속도는 수직선 위를 움직인다

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도가

$v(t) = |at - b| - 4$ $(a > 0,\ b > 4)$랍니다. 그림도 친절하게 줬죠? $t = \dfrac{b}{a}$에서 방향이 반대가 되는 속도 함수입니다.

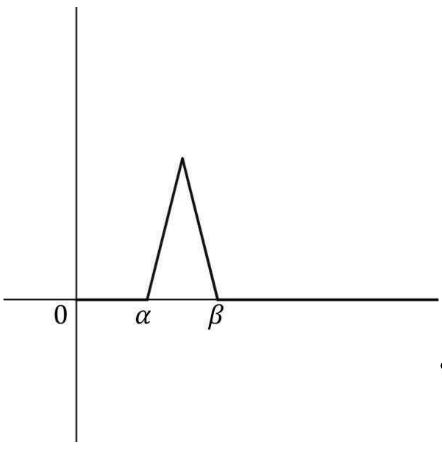
이때 시각 $t = 0$에서 $t = k$까지 움직인 거리를 $s(k)$, 위치의 변화량을 $x(k)$라고 한다네요. 일단 위치의 변화량은 $x(k) = \int_0^k v(t)dt$이죠? 움직인 거리는 절댓값을 씌우고 정적분하면 되니까 $s(k) = \int_0^k |v(t)|dt$입니다.

2) 조건해석

이때 (가)조건에서 $0 \leq k < 3$이면 $s(k) - x(k) < 8$이고, $k \geq 3$이면 $s(k) - x(k) = 8$이라고 합니다.

일단 $s(k) - x(k) = \int_0^k (|v(t)| - v(t))dt$입니다. $|v(t)| - v(t)$는 $v(t) \geq 0$일 땐 0이고, $v(t) < 0$일 땐 $-2v(t)$가 되는 함수죠? 그러니까 $|v(t)| - v(t) = \begin{cases} 0 & (v(t) \geq 0) \\ -2v(t) & (v(t) < 0) \end{cases}$이네요.

그림을 활용해서 이 함수를 그려봅시다. 0보다 큰 부분은 0으로, 0보다 작은 부분은 -2를 곱해보세요.



이렇게 되겠네요. 이 함수를 0부터 k까지 적분한 함수가 $s(k) - x(k)$입니다.

이제 k를 0부터 천천히 늘려보세요. 0부터 α까진 값이 0이다가 α부터 β까지는 값이 점점 커지겠죠? 그리고 그 후에는 그 값이 계속 유지가 됩니다. 추가로 정적분하는 값이 0이니까요.

3) 정적분 관찰

아까 $0 \le k < 3$이면 $s(k) - x(k) < 8$이고, $k \ge 3$이면 $s(k) - x(k) = 8$라고 했었죠? 그러면 그 정적분값이 8이 되어야겠네요. 저 삼각형의 넓이 말이에요. 계속 유지가 되는 값이니까요. 그리고 $\beta = 3$이어야 합니다. β 이후로 값이 유지가 되잖아요.

그리고 삼각형의 높이는 8입니다. $v(t) = |at - b| - 4 \ (a > 0,\ b > 4)$가 가장 낮아지는 부분의 함숫값은 -4인데 우리는 -2를 곱했죠? 정적분 값인 삼각형의 넓이가 8인데 $\beta = 3$이니까 $\frac{1}{2} \times 8 \times (3 - \alpha) = 8$이므로 $\alpha = 1$입니다.

여기서 V자 모양의 왼쪽 부분을 식으로 표현하면 $v(t) = -at + b - 4$이죠? $a > 0$이니까 기울기가 음수가 되도록 만들어준 거예요. 이게 $t = 1$에서 값이 0이 되니까 $b - a - 4 = 0$입니다.
오른쪽 부분은 $v(t) = at - b - 4$인데 $t = 3$에서 값이 0이 되니까 $3a - b - 4 = 0$이네요. 연립하면 $a = 4,\ b = 8$입니다.

이제 시각 $t = 1$에서 $t = 6$까지 점 P의 위치의 변화량을 구해야 합니다. 이건 그냥 정적분 하면 되겠네요.
1부터 3까지 정적분 값은 이미 알고 있어요. -4이죠. 아까 구했던 8은 -2를 곱한 값이니까 되돌려놔야죠.

그러면 3부터 6까지 정적분 값은 삼각형 넓이를 구하면 되겠어요. V자 모양의 오른쪽 부분이 $v(t) = 4t - 12$이니까 $\frac{1}{2} \times 3 \times 12 = 18$입니다. 둘을 더하면 14이네요.

6. 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_6 + a_7 = -\frac{1}{2}$
(나) $a_l + a_m = 1$이 되도록 하는 두 자연수 l, m $(l < m)$의 모든 순서쌍 $(l,\ m)$의 개수는 6이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제14항까지의 합을 S라 할 때, $2S$의 값을 구하시오. 〔2023학년도 사관학교 21〕

6. 정답 35 〔2023학년도 사관학교 21〕

1) 등차수열은 $a_n = a+(n-1)d$로 놓기, 조건해석

$\{a_n\}$이 등차수열이랍니다. 일단 첫 항을 a라 하고 공차를 d라 하면 $a_n = a+(n-1)d$라 할게요.

(가)조건에서 $a_6 + a_7 = -\dfrac{1}{2}$랍니다. $a_n = a+(n-1)d$에 넣어서 정리하면 $2a+11d = -\dfrac{1}{2}$가 나옵니다.

2) 자연수 보이면 숫자 넣기

(나)조건에서 $a_l + a_m = 1$이 되도록 하는 두 자연수 $l,\ m\ (l<m)$의 모든 순서쌍이 6개라고 하네요. 일단 $a_l + a_m = 1$도 $a_n = a+(n-1)d$에 넣어보면 $2a+(l+m-2)d=1$이 됩니다.

이때 $2a+11d = -\dfrac{1}{2}$이었죠? $2a = -\dfrac{1}{2} - 11d$로 정리해서 $2a+(l+m-2)d=1$에 넣으면 $(l+m-13)d = \dfrac{3}{2}$가 되네요.

그런데.... 여기서 뭘 어떡하죠? $l,\ m$이 자연수이고 순서쌍이 6개라는 거 말고는 공차인 d에 대한 정보도 없어서 뭘 할 수가 없겠는데요?

그럼 이렇게 생각해봅시다. 어차피 $l+m$만 결정되면 d는 자동으로 결정되는 거잖아요? 다시 말하면 $l+m=k$라고 정해지면 d는 자동적으로 결정된다는 말이에요. 이걸 다시 표현하면 $l+m=k$를 만족시키는 순서쌍이 6개가 되어야 한다는 거죠.

만약 $l+m=3$이라면? 순서쌍 $(l,\ m)$은 $(1,\ 2)$만 가능합니다. 그럼 개수는 1이 되죠. $l+m=4$라면? 순서쌍은 $(1,\ 3)$만 가능해 개수가 1입니다. $l+m=5$가 되면 $(1,\ 4)$, $(2,\ 3)$으로 개수가 2개가 되죠. $l+m=6$이라면? $(1,\ 5)$, $(2,\ 4)$로 2개가 됩니다. $l+m=7$이면 $(1,\ 6)$, $(2,\ 5)$, $(3,\ 4)$로 3개가 되네요.

이거 규칙이 있네요. $k=3,\ 4$일 때 1개, $k=5,\ 6$일 때 2개, $k=7,\ 8$일 때 3개, $k=9,\ 10$일 때 4개, $k=11,\ 12$일 때 5개, $k=13,\ 14$일 때 6개가 됩니다.

그러면 가능한 k가 2개인데요? 그런데 $k=13$일 때를 생각해보세요. $(l+m-13)d = \dfrac{3}{2}$에서 $l+m=13$이라면 값이 0이 나오는데 이러면 등호가 성립하지 않게 됩니다. 따라서 $k=14$이네요. $d=\dfrac{3}{2}$입니다.

$2a+11d=-\frac{1}{2}$이니까 $a=-\frac{17}{2}$입니다. $a_n=-\frac{17}{2}+\frac{3}{2}(n-1)$이네요.

이때 첫 항부터 14항까지 합을 S라고 할 때 $2S$를 구하라네요. 가봅시다.

$\frac{(a_1+a_{14})}{2}\times 14\times 2=14\left(-\frac{17}{2}-\frac{17}{2}+\frac{39}{2}\right)=35$입니다. 답은 35네요.

7. 최고차항의 계수가 정수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=1$, $f'(1)=0$이다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f(x)-1|$$

이라 할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 함수 $f(x)$의 개수를 구하시오. 〔2023학년도 사관학교 22〕

(가) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 모든 교점의 x좌표의 합은 3이다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $n<\int_{0}^{n} g(x)dx<n+16$이다.

7. 정답 11 〔2023학년도 사관학교 22〕

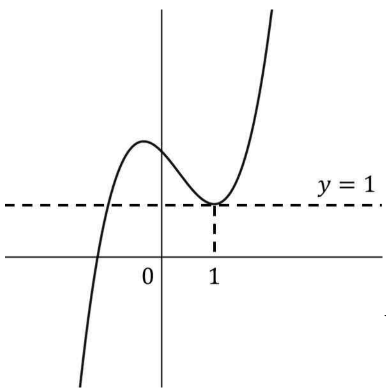
1) 절댓값 함수, 문제해석

최고차항의 계수가 정수인 삼차함수 $f(x)$가 있는데 $f(1)=1$, $f'(1)=0$이랍니다. $x=1$에서 극대값 1을 가질지, 아니면 극솟값 1을 가질지, 아니면 아예 그 점이 변곡점일지는 아직 잘 모르겠어요. 가능한 경우는 3가지입니다.

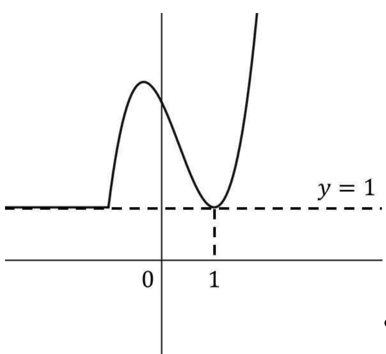
거기에 최고차항의 계수가 정수라고 했으니까(당연히 0은 아니겠죠? 그러면 이미 삼차함수가 아니니까요.) 양수인지 음수인지도 몰라요. 계속 가봅시다.

이때 $g(x)=f(x)+|f(x)-1|$이랍니다. 절댓값이 있으니까 벗겨볼게요. $f(x)\geq 1$이라면 $g(x)=2f(x)-1$이고 $f(x)<1$이면 $g(x)=1$입니다. 정리하면 $g(x)=\begin{cases} 2f(x)-1 & (f(x)\geq 1) \\ 1 & (f(x)<1) \end{cases}$이네요.

이걸 그래프로 해석해볼게요. 일단 함수를 이해하기 위해서 아무런 $f(x)$를 그려봅시다. 지금은 어차피 $g(x)$가 어떤 함수인지 알아보기 위함이니까 아무렇게나 그려보는 거예요. $x=1$에서 극솟값을 가지도록 그려볼까요?



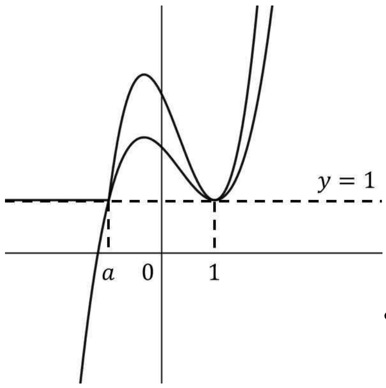
대충 이렇게 그려보면 1보다 크거나 같은 부분은 2를 곱하고 1만큼 아래로 내려야 해요. 1보다 작은 부분은 그냥 1이어야 하구요. 그려보면



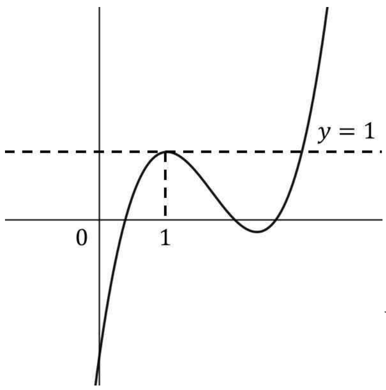
이렇게 되네요. 이걸 다시 표현해보면 1보다 큰 부분은 2배 더 날카롭게 그리고, 1보다 작은 부분은 그냥 1로 해버리는 함수네요.

2) 조건 해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

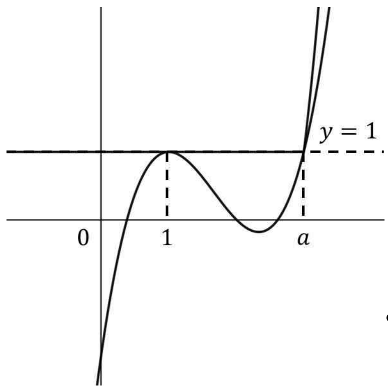
이때 (가)조건에서 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 모든 교점의 x좌표의 합이 3이라고 합니다. 저 위의 그래프 두 개를 겹쳐보세요.



이렇게 되는데 교점은 $x=a$와 $x=1$이 있죠? 지금 보면 a는 1보다 작잖아요? 그러면 합이 3이 될 수는 없겠네요. 이는 최고차항의 계수가 음수가 되어도 마찬가지입니다. 그러면 $x=1$에서 극댓값을 가지도록 그려봅시다.



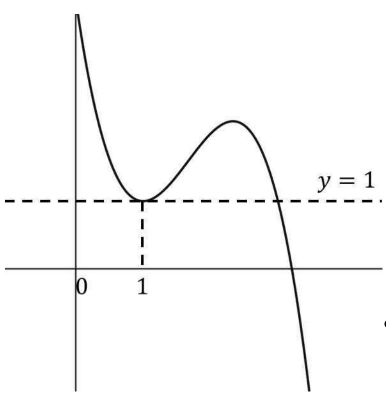
만약 이런 함수라면



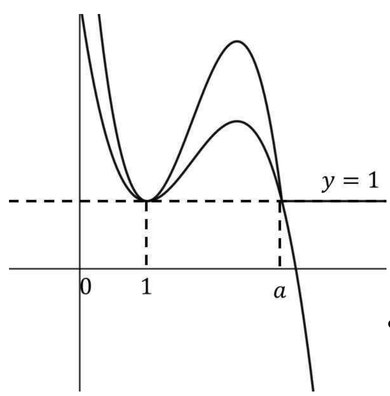
이렇게 되겠죠.

$a=2$입니다.

만약 최고차항의 계수가 음수라고 해도

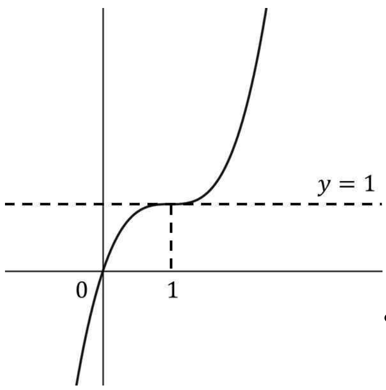


이 함수가

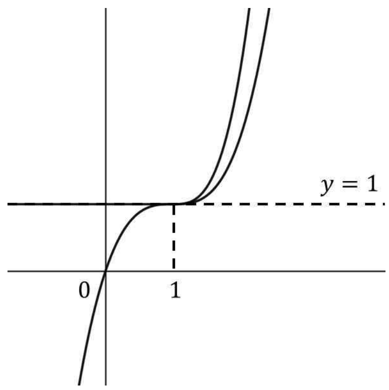


이렇게 되니까 딱 $a=2$가 됩니다.

그러면 $x=1$에서 변곡점을 가질 때는요?



이런 함수가 되면



$x=1$에서만 만나게 되네요. 그럼 모든 교점의 x좌표의 합이 3이 될 수 없겠죠?

3) 함수 구하기 - 인수정리

$y=f(x)$와 $y=1$은 $x=1$에서 접하고 $x=2$에서는 그냥 만나야 하니까 $f(x)-1$은 $(x-1)$인수를 적어도 두 개, $(x-2)$인수를 적어도 하나 가져야 합니다. $f(x)$의 최고차항의 계수를 k라 하면

$f(x)-1=k(x-1)^2(x-2)$이고 $f(x)=k(x-1)^2(x-2)+1$이네요. k는 정수입니다.

4) 케이스 분류, 자연수 보이면 숫자 넣기, 정적분 나누기

(나)조건에서 모든 자연수 n에 대하여 $n<\int_0^n g(x)dx<n+16$이라고 합니다. 이 경우는 최고차항의 계수가 음수일 때랑 양수일 때가 달라요. 그래프를 보면 $g(x)=1$이 되는 범위가 서로 다르거든요. 나눠서 생각합시다.

4-1) 최고차항의 계수가 양수인 경우

일단 $x=2$까지는 $g(x)=1$이에요. 그러니까 $n\le 2$일 때랑 $n>2$일 때랑 나눠서 생각해야겠죠?

$n=1$이라면 $1<\int_0^1 g(x)dx<17$인데 $\int_0^1 g(x)dx=1$이죠? 범위에 해당하지 않습니다. 모든 자연수 n에 대하여 성립해야 하는데 $n=1$부터 성립하지 않네요? 이건 더 볼 필요도 없이 조건을 만족시키지 않는 경우입니다. 다음으로 넘어가죠.

4-2) 최고차항의 계수가 음수인 경우

이 역시 $n\le 2$일 때랑 $n>2$일 때랑 나눠서 생각해야겠어요.

$n=1$이라면 $1<\int_0^1 g(x)dx<17$이어야 합니다. $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 (2f(x)-1)dx$이고 이건 결국

$$1+2k\int_0^1((x-1)^2(x-2))dx=1+2k\int_0^1(x^3-4x^2+5x-2)dx=1+2k\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-2x\right]_0^1=1-\frac{7k}{6}$$

입니다. $1<1-\frac{7k}{6}<17$이고 정리하면 $-\frac{102}{7}<k<0$입니다. 가능한 k는 -1부터 -14까지 14개입니다.

$n=2$이라면 $2<\int_0^2 g(x)dx<18$이어야 합니다. $\int_0^2 g(x)dx=\int_0^2(2f(x)-1)dx$이고, 방금과 마찬가지로 계산해보면

$$2+2k\int_0^2((x-1)^2(x-2))dx=2+2k\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-2x\right]_0^2=2-\frac{4k}{3}$$이죠? $2<2-\frac{4k}{3}<18$이네요.

정리하면 $0<-\frac{4k}{3}<16$이고 $-12<k<0$입니다. -1부터 -11까지 11개가 가능하죠?

$n>2$이라면 $n<\int_0^n g(x)dx<n+16$이어야 하는데 $\int_0^n g(x)dx$는 $\int_0^2 g(x)dx$에다가 2부터 n까지는 높이가 1이고 길이가 $n-2$인 직사각형의 넓이를 더한 것과 같죠? 따라서 $\int_0^2 g(x)dx+n-2$인데 아까 $\int_0^2 g(x)dx=2-\frac{4k}{3}$이라고 구했어요. 따라서 $n<n-\frac{4k}{3}<n+16$여야 하겠네요. 정리하면 $-12<k<0$입니다. 이거 아까랑 똑같네요?

모든 자연수 n에 대하여 조건을 만족시키라고 했으니까 위의 세 가지 경우를 모두 만족시켜야 합니다. 그러면 겹치는 부분을 찾아야겠죠? 셋 모두 -1부터 -11까지 11개가 겹치네요. 따라서 답은 11입니다.

8. 서로 다른 두 자연수 a, b에 대하여 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}\left(a,\ \sigma^2\right)$, $\mathrm{N}\left(2b-a,\ \sigma^2\right)$을 따른다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$와 확률변수 Y의 확률밀도함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오.
〔2023학년도 사관학교 확통 29〕

(가) $\mathrm{P}(X \leq 11) = \mathrm{P}(Y \geq 11)$ (나) $f(17) < g(10) < f(15)$

8. 정답 25 〔2023학년도 사관학교 확통 29〕

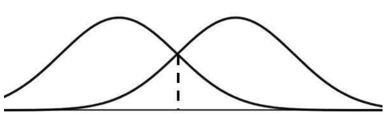
1) 확률변수 보는 법, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

일단 a, b라는 서로 다른 두 자연수가 있답니다. 이때 $X \sim \mathrm{N}(a,\ \sigma^2)$이고 $Y \sim \mathrm{N}(2b-a,\ \sigma^2)$인데 X의 함수가 $f(x)$, Y의 함수가 $g(x)$라네요.

먼저 X와 Y의 표준편차가 같죠? 그러면 개형이 똑같다는 말이에요. 다시 말하면 $f(x)$와 $g(x)$는 평행이동 관계에 있다는 거죠. 옆으로 슬쩍 옮기면 둘이 같은 함수가 되는 상황이에요. 다만 평균이 다르기 때문에 서로 대칭축은 다릅니다. 어떤 게 더 큰지는 아직 모르겠어요.

2) 조건해석

(가)조건에서 $\mathrm{P}(X \le 11) = \mathrm{P}(Y \ge 11)$이랍니다. 이거는 그래프를 그려보면

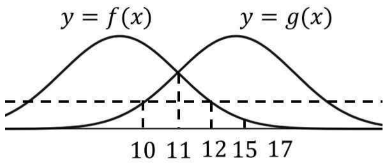


이렇게 된다는 거죠? 왼쪽이 $f(x)$든 오른쪽이 $f(x)$든 상관없습니다. 하지만

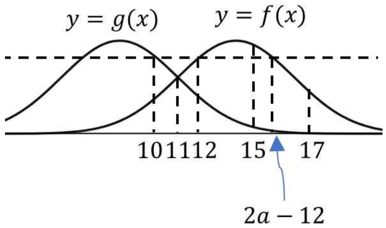
알 수 있는 건 두 함수가 $x=11$에 대하여 대칭이 된다는 거죠. 다시 말하면 두 함수의 대칭축인 $x=a$와 $x=2b-a$의 평균은 11이라는 말이에요. 따라서 $\dfrac{a+2b-a}{2}=11$이고 $b=11$이네요. $X \sim \mathrm{N}(a,\ \sigma^2)$이고 $Y \sim \mathrm{N}(22-a,\ \sigma^2)$입니다.

(나)조건에서 $f(17) < g(10) < f(15)$이라고 합니다. 이건 함숫값을 비교하라고 되어 있네요. 일단 $f(17) < f(15)$이죠? 왼쪽이 $f(x)$면 성립 가능합니다. 오른쪽이 $f(x)$여도 성립이 가능합니다.

그리고 $f(17) < g(10) < f(15)$인데 만약 $g(x)$가 오른쪽이라면?



불가능합니다. $g(10)$과 같은 값을 가질 수 있는 건 $x=11$의 대칭 부분에 있는 $f(12)$인데 이 이후로는 계속 값이 감소하니까 $g(10) > f(15)$가 될 수 밖에 없습니다.

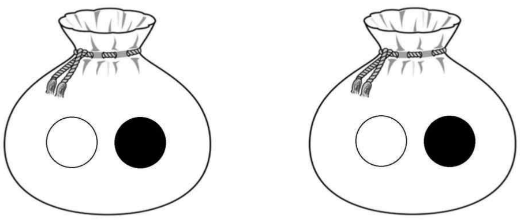


대충 이렇게 되어야겠죠? $f(x)$에서 대칭축인 $x=a$에 대하여 $x=12$와 대칭부분에 있는 $x=2a-12$ 사이에 $x=15$가 있어야 하구요, $x=2a-12$보다 오른쪽에 $x=17$이 있어야 합니다. 따라서 $15<2a-12<17$이네요. 이때 a는 자연수이죠? 따라서 $2a-12=16$이고 $a=14$입니다. $a+b=11+14=25$이네요.

9. 그림과 같이 두 주머니 A와 B에 흰 공 1개, 검은 공 1개가 각각 들어 있다. 주머니 A에 들어 있는 공의 개수 또는 주머니 B에 들어 있는 공의 개수가 0이 될 때까지 다음의 시행을 반복한다.

두 주머니 A, B에서 각각 임의로 하나씩 꺼낸 두 개의 공이 서로 같은 색이면 꺼낸 공을 모두 주머니 A에 넣고, 서로 다른 색이면 꺼낸 공을 모두 주머니 B에 넣는다.

4번째 시행의 결과 주머니 A에 들어 있는 공의 개수가 0일 때, 2번째 시행의 결과 주머니 A에 들어 있는 흰 공의 개수가 1 이상일 확률은 p이다. $36p$의 값을 구하시오.
〔2023학년도 사관학교 확통 30〕



A　　　　　　B

9. 정답 27 〔2023학년도 사관학교 확통 30〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

일단 그림에 흰 공 하나 검은 공 하나씩 들어 있는 주머니가 두 개가 있네요. 이때 각 주머니에서 공을 하나씩 꺼낼 때 같은 색이면 모두 A, 다른 색이면 모두 B에 넣는답니다.

이렇게 4번을 해서 마지막 4번째 시행에 A에 공이 0개일 때 2번째 시행에서 A에 들어 있는 흰 공 개수가 1 이상일 확률은 p이고 $36p$를 구하라네요.

일단 구하는 확률은 $p=\dfrac{2\text{번째 시행 }A\text{에 들어 있는 흰 공 }1\text{개 이상}}{4\text{번째 시행 }A\text{에 들어 있는 공 }0\text{개}}$ 이죠?

일단 분모부터 구해봅시다. 일단 공은 각 시행마다 최대 1개만 옮길 수 있어요. A를 기준으로 생각해보면 2개에서 0개로 만들어야 한다는 거죠. 이때 같은 색이면 A에 공이 하나가 추가되고, 다른 색이면 공이 하나가 빠집니다. 그러니까 같은 색이면 $+1$, 다른 색이면 -1이라는 거죠. 4번해서 -2가 나와야 하니까 같은 색 1번에 다른 색 3번이 나와야겠죠? 그래야 $+1-3=-2$가 되어서 공이 2개에서 0개가 될 테니까요.

그럼 결국 가능한 경우는 같다다다, 다같다다, 다다같다, 다다다같 이렇게 4가지 경우입니다.

일단 같다다다부터 볼게요. 1번째에 같은 걸 고르는 확률은 $\dfrac{1}{2}$입니다. 예를 들어 흰 공을 골랐다고 해볼게요. 그러면 A, B 순서대로 흰흰검, 검 이렇게 됩니다. 2번째에는 다른 공을 골라야 해요. 경우의 수는 $\dfrac{2}{3}$입니다. 무조건 흰 검 이렇게 골라야 하죠? A, B 순서대로 흰검, 흰검이 됩니다. 3번째에 다른 공을 골라야 하는데 확률은 $\dfrac{1}{2}$입니다. A, B 순서대로 흰 검을 골랐다고 해볼게요. 그러면 A, B 순서대로 검, 흰흰검 이렇게 됩니다. 4번째에는 2번째랑 똑같이 고르면 되겠죠? 확률은 $\dfrac{2}{3}$입니다. 총 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{9}$입니다.

다같다다의 경우 1번째 시행에서 다른 걸 고르는 확률은 $\dfrac{1}{2}$입니다. 예를 들어 A, B 순서대로 흰 검을 골랐다고 해볼게요. 그러면 A, B 순서대로 검, 흰흰검 이렇게 됩니다. 2번째에 같은 걸 뽑는 건 검검만 가능하니까 확률은 $\dfrac{1}{3}$입니다. A, B 순서대로 검검, 흰흰 이렇게 됩니다. 이러면 3번째에는 뭘 뽑든 다른 걸 뽑게 되죠? 확률은 1이구요. 검 흰만 가능하니까 A, B 순서대로 검, 흰흰검 이렇게 됩니다. 4번째에 다른 걸

뽑으려면 B에서 흰 공을 뽑으면 되니까 확률은 $\frac{2}{3}$입니다. 총 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$입니다.

다다같같의 경우 불가능합니다. 다른 공을 고르면 A에서 공이 하나가 빠져나가는데 다다가 되면 2번째 시행이 끝났을 때 이미 A에 공이 남아 있지 않아요. 그러면 바로 시행이 종료됩니다.

다다다같의 경우도 마찬가지죠. 따라서 분모의 확률은 $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$이네요.

이제 분자를 구해봅시다. 같다다다와 다같다다 중에서 2번째 시행 결과 A에 흰 공이 하나 이상 있게 해야 합니다. 같다다다와 다같다다 모두 2번째 시행의 결과 공이 2개가 남아 있게 됩니다. 그 둘이 전부 검검인 경우만 제외하고 나머지를 구하면 되겠죠?

같다다다의 경우 2번째 시행의 결과 무조건 흰검만 남아 있게 됩니다. 1번째 시행에서 흰흰을 뽑았다면 A, B 순서대로 흰흰검, 검 이렇게 될 텐데 이때 무조건 A에서는 흰 공을 골라서 B에 넘겨줘야 하므로 흰검이 됩니다.

1번째 시행에서 검검을 뽑았다면 A, B 순서대로 흰검검, 흰 이렇게 될 텐데 이때 무조건 A에서는 검은 공을 골라서 B에 넘겨줘야 하므로 흰검이 됩니다. 따라서 같다다다는 모두 가능합니다. 확률은 $\frac{1}{9}$입니다.

다같다다의 경우 흰 검을 골랐다면 A, B 순서대로 검, 흰흰검 이렇게 되는데 이때 2번째 시행에서 둘 다 검은 공을 뽑을 수 밖에 없으므로 A, B 순서대로 검검, 흰흰이 됩니다. 이런 경우는 제외해줘야 해요.

검 흰을 골랐다면 A, B 순서대로 흰, 흰검검 이렇게 되는데 이러면 2번째 시행에서 흰흰을 골라야 하니까 시행의 결과 흰흰, 검검이 됩니다. 이건 가능하죠? 뒷 부분은 아까 했구요.

1번째 시행에서 검 흰을 고르는 확률은 $\frac{1}{4}$입니다. 이때 2번째 시행에서 흰흰을 고르는 확률은 $\frac{1}{3}$이구요. 뒷 부분은 같으니까 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times 1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{18}$입니다. 총 $\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{3}{18}$입니다. 구하는 확률은 $\frac{\frac{3}{18}}{\frac{2}{9}}=\frac{3}{4}$이네요.

$p=\frac{3}{4}$이니까 $36p=27$입니다.