제2교시

2016학년도 JHJ 3월 모의평가 문제지

수학 영역 (B형)

홀수형

성명		수험 번호						—				

○ 자신이 선택한 유형(A형/B형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

다른 누구도 아닌 스스로를 등불로 삼으라.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점,3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

JHJ

제 2 교시

수학 영역(B 형)

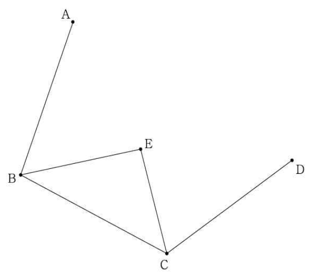
홀수형

5지선다형

1. $\log_2 49 \times \log_7 4$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

2. 다음 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은? [2점]



① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

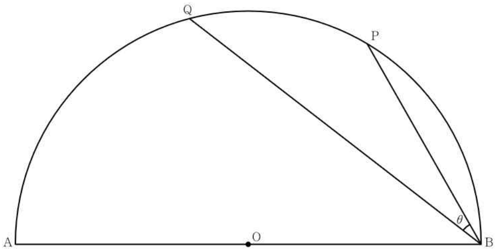
3. $\lim_{x \to +0} \dfrac{\sin x \cdot \ln(1+x)}{\left(1-\cos\dfrac{x}{2}\right)}$의 값은? [2점]

① 8 ② 7 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

4. $\log(x^2) \le 2$를 만족하는 정수 x의 개수는? [3점]

① 10 ② 11 ③ 20 ④ 21 ⑤ 25

5. 반원 O의 지름 $\overline{\mathrm{AB}}$ 는 길이가 2이고, 호 $\widehat{\mathrm{BP}}$ 와 호 $\widehat{\mathrm{PQ}}$ 의 길이는 같다. $\angle\mathrm{PBQ}=\theta$ 라 할 때, 변 $\overline{\mathrm{BQ}}$ 의 길이가 $\cos\theta$이다. 이 때, $\cot\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이다.) [3점]



① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$

6. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A+B=\begin{pmatrix}4&3\\0&2\end{pmatrix},\quad A-B=\begin{pmatrix}8&7\\2&0\end{pmatrix}$$

를 만족시킬 때, A^2-B^2의 모든 성분의 합은? [3점]

① 70 ② 72 ③ 75 ④ 77 ⑤ 80

7. $0\le x<2\pi$일 때, 삼각방정식

$$2\sin x+\cos x=\sin 2x+1$$

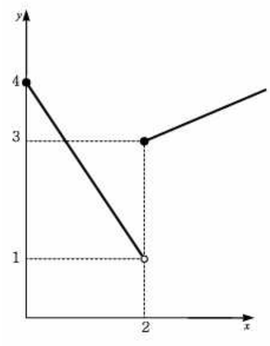
의 모든 해의 합은? [3점]

① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

8. 행렬 $A=\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$ 일 때, $A^2=25E$ 가 성립하도록 하는 실수 x, y에 대하여 점 P (x, y)의 자취를 도형 C 라고 하자. 이 때, Q $(12, 9)$에서 도형 C 위의 점까지의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, $M+m$ 의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 16 ④ 30 ⑤ 50

9. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같고, $g(x)=2\sin x$이다.



이 때, $\dfrac{\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} g(x+\frac{\pi}{4})}{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(g(x))}$ 의 값은? [3점]

① $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{12}$ ② $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{6}$ ③ $\dfrac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{6}$
④ $\dfrac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

10. $\lim_{n \to \infty} \dfrac{\left[\frac{n}{4}\right]}{a_n}=\dfrac{1}{2}$ 일 때, $\lim_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{an^2+bn-4}=\dfrac{1}{6}$ 을 만족시키는 정수 a, b 가 있다. 이 때, $a+b$ 의 값은? [3점]
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

11. 닫힌구간 $[-2,4]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음과 같다.

$$f(x)=20-x^2 \quad (-2 \le x \le 4)$$

이때, $x=t$에서의 접선과 x축, 직선 $x=-2$와 직선 $x=4$로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(t)$라고 하자. 이 때, $S(t)$는 $t=m$ 일 때, 최솟값 s를 가진다고 한다. $m+s$의 값은? [3점]

① 110 ② 115 ③ 120 ④ 125 ⑤ 130

12. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$, $a_2=2$ 이고

$$\frac{a_{n+1}}{n-1}-\frac{a_n}{n+1}=\frac{2^{n+1}}{n^3-n} \quad (n \ge 2)$$

를 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식의 양변에 n^3-n을 곱하면
>
> $n(n+1)a_{n+1}=(n-1)na_n+2^{n+1} \quad (n \ge 2)$
>
> 이다. $b_n=n(n-1)a_n$이라 하면 $b_2=4$이고
>
> $b_{n+1}=b_n+2^{n+1} (n \ge 2)$
>
> 이다. 따라서 일반항 b_n을 구하면,
>
> $b_n=\boxed{\text{(가)}}$
>
> 이다. 한편, $a_n=\dfrac{b_n}{n(n-1)}$이므로
>
> $$a_n=\begin{cases}\dfrac{\boxed{\text{(나)}}}{n(n+1)} & (n \ge 2)\\ 1 & (n=1)\end{cases}$$
>
> 이다.

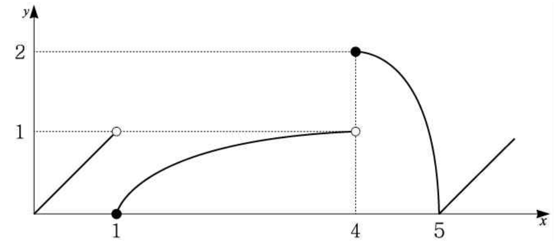
위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(2)+g(5)$의 값은? [3점]

① 40 ② 64 ③ 68
④ 94 ⑤ 114

[13~14] 양의 실수 x와 자연수 n에 대해 정의된 함수 $f_n(x)$를

$$f_n(x) = ||\ln x| - n|$$

이라 하고, 함수 $g(x)$의 그래프가 다음과 같다.



13번과 14번의 두 물음에 답하시오.

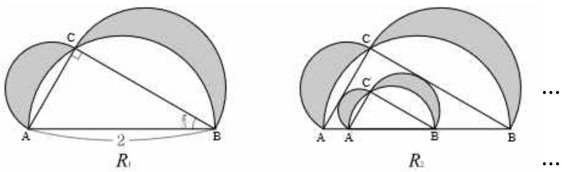
13. 자연수 n에 대해 $f_n(x) = k$의 실근이 4개가 되도록 하는 자연수 k값의 최댓값을 a_n이라 하자. $\sum_{n=2}^{7} a_n$ 의 값은? [3점]

① 15 ② 20 ③ 21 ④ 28 ⑤ 36

14. 합성함수 $g(f_n(x))$의 불연속점들의 개수를 함수 $k(n)$이라 정의하자. 이 때, $\sum_{n=1}^{4} k(n)$ 의 값은? [4점]

① 24 ② 17 ③ 13 ④ 11 ⑤ 5

15. 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$를 지름으로 하고 그 길이가 2인 반원 O가 있다. 그림과 같이 반원 O 위에 $\angle \mathrm{ABC} = \frac{\pi}{3}$를 만족시키는 한 점을 잡고 점 C 라고 정의한 후, 현 BC를 지름으로 하는 반원과 현 AC를 지름으로 하는 반원을 그리고, 현 BC를 지름으로 하는 반원과 현 AC 를 지름으로 하는 반원과 호 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$와 호 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$로 둘러싸인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$ 위에 각각 점 A′, 점 B′를 잡고 선분 $\overline{\mathrm{A'B'}}$를 지름으로 하는 원 O'를 그리고, 그림과 같이 원 O'위에 $\angle \mathrm{A'B'C'} = \frac{\pi}{3}$를 만족시키는 한 점을 잡고 점 C′라 정의한 후, 현 $\overline{\mathrm{B'C'}}$를 지름으로 하는 반원과 현 $\overline{\mathrm{A'C'}}$를 지름으로 하는 반원을 각각 현 $\overline{\mathrm{BC}}$와 현 $\overline{\mathrm{AC}}$에 접하도록 그린후 현 $\overline{\mathrm{B'C'}}$를 지름으로 하는 반원과 현 $\overline{\mathrm{A'C'}}$를 지름으로 하는 반원과 호 $\overset{\frown}{\mathrm{A'C'}}$와 호 $\overset{\frown}{\mathrm{B'C'}}$로 둘러싸인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든  모양의 도형의 넓이의 합을 S_n이라고 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은? [4점]



① $2-\sqrt{3}$ ② $2+\sqrt{3}$ ③ $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

④ $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

16. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$2A + ABA = E, \ -A^2 + 2E = B^{-1}$$

를 만족시킨다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $AB = BA$
ㄴ. $A + B = 4E$
ㄷ. $A^3 + B^3 = -3AB + E$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 함수 $f(x)=(x-1)^2(x+1)^2$이고, 다른 두 함수가 각각 $g(x)=1-\sqrt{1-x}$, $h(x)=\sqrt{x+1}$ 일 때, 방정식 $\dfrac{f(x)}{g(x)}+\dfrac{h(x)}{f(x)}=1+\dfrac{h(x)}{g(x)}$ 의 실근의 개수는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

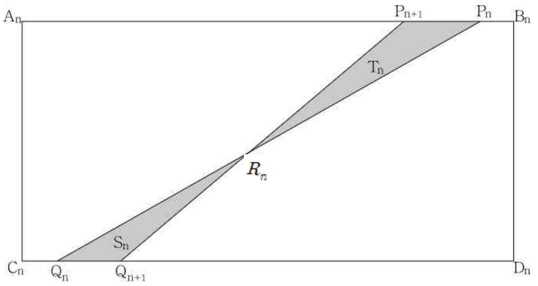
18. 정의역이 $x>4$인 함수 $f(x)$가 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(x-5)^2+b(x-5)+c}{(x-6)\ln(x-4)} & (x\neq 6)\\ \dfrac{4}{\ln 2} & (x=6)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 구간 $(4,\infty)$에서 연속이 되도록 하는 실수 a,b,c에 대하여 $a^2+b^2+c^2$의 값은? [4점]

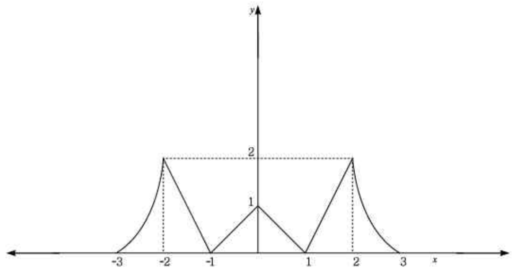
① 25 ② 32 ③ 45 ④ 52 ⑤ 72

19. 가로가 각각 $y=0, y=2$ 위에 있는 직사각형 $\mathrm{A_nB_nC_nD_n}$이 있다. $\overline{\mathrm{A_nB_n}}$ 위의 점 $\mathrm{P_n}$과 점 $\mathrm{B_n}$ 까지의 거리가 2^n이고, $\overline{\mathrm{C_nD_n}}$ 위의 점 $\mathrm{Q_n}$과 점 $\mathrm{C_n}$ 까지의 거리가 $9n$일 때, $\overline{\mathrm{P_nQ_n}}$과 $\overline{\mathrm{P_{n+1}Q_{n+1}}}$ 의 교점을 $\mathrm{R_n}$이라고 하자. 삼각형 $\mathrm{P_{n+1}P_nR_n}$의 넓이를 T_n 이라 하고, 삼각형 $\mathrm{Q_{n+1}Q_nR_n}$의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{9}|T_n-S_n|$ 의 값은? [4점]



① 625 ② 817 ③ 967 ④ 1024 ⑤ 1689

20. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 있다. 구간 $[-3,3]$에서 연속인 함수 $g(x)$의 그림은 다음과 같다.



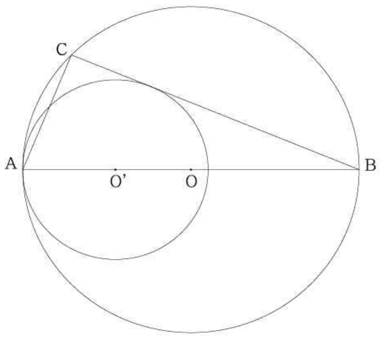
함수 $h(x)$는 $f(g(x))$ 일 때, 다음 조건을 만족시킨다.

가) $h(0)=0$ 나) 구간 $(-3,3)$에서 함수 $h(x)$가 <u>미분불가능한</u> 점은 1개이다.

이 때, 모든 실수 a에 대해 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(2x-n)}$의 극한값이 존재하도록 하는 정수 n의 값은? (단, $g(-x)=g(x)$이다.) [4점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

21. 반지름이 7인 원 O 와 그 원에 내접하는 원 O'가 있다. 선분 $\overline{AB}$가 원 O 의 지름일 때, 현 $\overline{BC}$ 와 원 O' 가 접하는 접을 G라고 하자. $\angle CAB = \theta$ 일 때, 삼각형 OBG의 넓이를 $f(\theta)$라 하고, 선분 $\overline{OG}$ 의 길이를 $g(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \to 0} \frac{f(\theta)}{2\theta \times g(\theta)}$ 의 값을 a라 하자. a의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.) [4점]



① $\frac{9}{7}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

단 답 형

22. $x^2 + 8x + \sqrt{4 - 8x - x^2} = -8$ 의 모든 실근의 곱을 구하시오.[3점]

23. 함수 $f(2x-1) = -\frac{x}{x^2+1}$ 에 대하여 $f(3) = a$, $f'(3) = b$라고 할 때, $\frac{3a^2}{b}$의 값을 구하시오. [3점]

24. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n 3^n - \frac{2^n + 3^{n+1}}{7}) = 4$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}(7a_n + 6)$을 구하시오. [3점]

25. 인체 내의 근육세포에 존재하는 미토콘드리아는 피루브산 (pyruvic acid)을 이용하여, 인체에 필요한 에너지를 발생시킨다. 이 때, 발생하는 에너지를 E_s, 미토콘드리아의 몰 수를 M, 피루브산의 양을 K라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\log_K E_s = M \times K^T$$

(단, K의 단위는 mg이고, T는 양의 상수이다.)

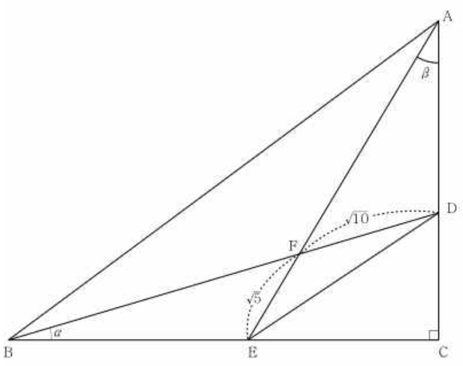
피루브산 10mg을 통해 미토콘드리아 M_1몰이 만드는 에너지의 양을 E_1이라 하고, 피루브산 5mg을 통해 미토콘드리아 M_2몰이 만드는 에너지의 양을 E_2라 할 때, $E_1 = (E_2)^4$ 를 만족한다고 한다. $\log_2 u = T + (\log_2 M_1 - \log_2 M_2)$ 일 때, $40u$의 값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.) [3점]

26. 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

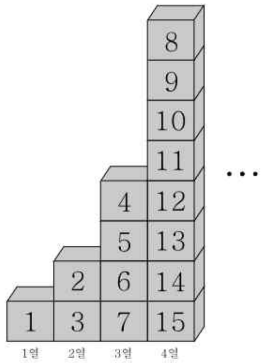
> (가) 자연수 a, b에 대하여 $f(x) = 2(x-1)^2(x-4)^a$, $g(x) = (2x-5)^b(x-9)$ 이다. (단, $a, b > 2$)
>
> (나) 집합 $\left\{x \mid \frac{g(x)}{f(x)} \le 0,\ x\text{는 정수}\right\}$ 의 원소는 5개이다.

이 때, 부등식 $\frac{(x+2)(x-3)^{b-1}}{(x-1)^{a+1}} \le 0$ 을 만족하는 정수 x의 개수를 p라고 할 때, $5p$의 값을 구하시오. [4점]

27. 직각삼각형 ABC가 있다. 변 $\overline{AC}$ 위의 점 D와 변 $\overline{BC}$ 위의 점 E가 $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{BE}$를 만족한다. 이 때, 선분 $\overline{AE}$와 선분 $\overline{BD}$의 교점을 F라 하자. $\overline{DF} = \sqrt{10}$이고 $\overline{EF} = \sqrt{5}$이다. $\angle FBE = \alpha$, $\angle CAE = \beta$ 일 때, $\tan\alpha \times \tan\beta$의 값을 k라 하자. 이 때, $84k$의 값을 구하시오. [4점]



28. 자연수 n에 대하여 다음과 같이 모든 자연수가 적힌 블럭을 위에서부터 크기순으로 n열에 2^{n-1}개씩 차례로 나열하였다. 이때 n열에 적힌 수 중 밑에서 m번째 수를 $k(n,m)$이라 하자. 예를 들어, $k(2,1)=3$, $k(4,2)=14$ 이다. 수열 $\{a_n\}$이 $k(n,n)=a_n$을 만족하고, 수열 $\{b_n\}$이 $b_{n+1}=a_{(b_n)}$ 을 만족할 때, $b_1 = t$에 대하여 $\sum_{n=1}^{3} b_n = 35$가 되도록 하는 t의 값을 구하시오. (단, t는 자연수) [4점]



29. 2 이상의 자연수 n과 1보다 큰 실수 a에 대하여 정의역이 $\{x \mid a^{n-1} \le x < a^n\}$인 함수 $f(x)$가

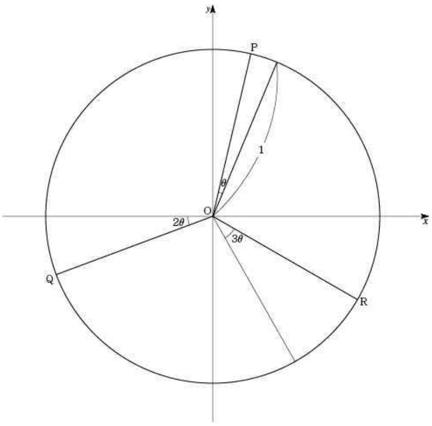
$$f(x) = \log_a x - [\log_a x]$$

일 때, 일차함수 $g_n(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \ge g_n(x)$
(나) $f(x) - g_n(x) = 0$을 만족하는 실수 x는 유일하다.

함수 $g_n(x)$의 기울기가 최대일 때, $g_n(x)$의 y 절편을 y_a이라 하자. $\sum_{a=2}^{7} |y_a| = p$일 때, $60p$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

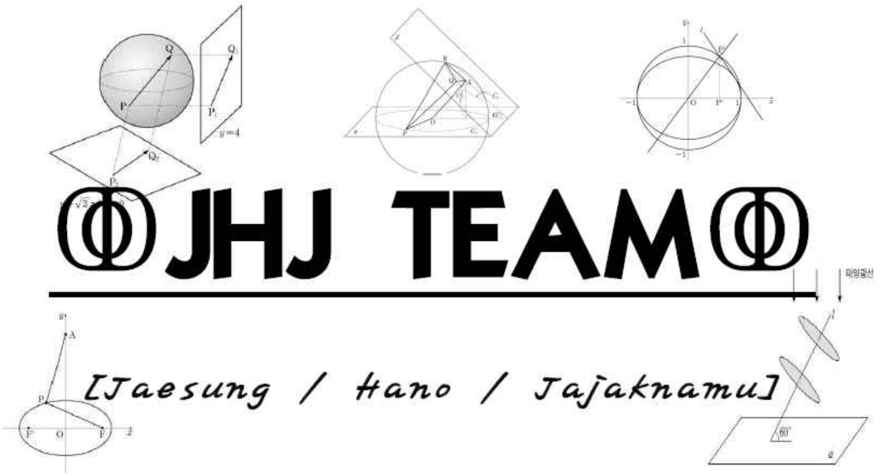
30. 원점을 중심으로 하는 반지름의 길이가 1인 원 O 위에 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 각각 $\theta + \frac{\pi}{3}$, $2\theta + \pi$, $3\theta + \frac{5}{3}\pi$ 인 세 점 P, Q, R 이 있다. 이 때, 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표를 G(x, y)라 하면, $\theta = \frac{\pi}{3}$일 때의 $\frac{dy}{dx} = p$, $\theta = \frac{2}{3}\pi$일 때의 $\frac{dy}{dx} = q$이다. 이때, 실수 p, q에 대해 $3p^2 + 10q^2$의 값은? [4점]



※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2016학년도 JHJ 3월 모의평가 문제지



시험 시행날짜 : 2015년 3월 9일

출제위원 : JHJ TEAM - Jaesung (윤재성)
Hano (이한용)
Jajaknamu (이장원)

편집위원 : Jajaknamu (이장원) / 일러스트 : 웃·대 - Intel

검토위원 : PNMATH : 고려대학교 수학교육과 - 노동환, 한양대학교 공과대학 - 나아가는기범이
KOCKOC : Apoc, Smari, 으히
외부 : 서울대학교 수학교육과 - 유대영
아주대학교 소프트웨어보안과 - 배성진

시험에 응시해주신 분들, 모두 수고하셨습니다 - *JHJ TEAM* 일동

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.