22

2017학년도 6월 평가원(가형) 30번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 상수 $a\,(0<a<2\pi)$와 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=f(-x)$ y축 대칭
(나) $\displaystyle\int_x^{x+a} f(t)dt=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \longrightarrow f(x+a)-f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

닫힌 구간 $\left[0, \frac{a}{2}\right]$에서 두 실수 b, c에 대하여 $f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$일 때, $abc=-\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 83

$[x, x+a]$의 중점 $=0$

$\longrightarrow x=-\frac{a}{2}$

$f\left(\frac{a}{2}\right)-f\left(-\frac{a}{2}\right)=0=\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

$-\pi<-\frac{a}{2}<0$

$-\frac{2}{3}\pi<-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}$

$\therefore a=\frac{5}{3}\pi \quad \left(\because \cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0\right)$

$\displaystyle\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(t)dt=2\int_0^{\frac{a}{2}} f(t)dt=\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

$\displaystyle 2\int_0^{\frac{5}{6}\pi} b\cos(3t)+c\cos(5t)\,dt=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$

$\displaystyle 2\left[\frac{b\sin(3t)}{3}-\frac{c\sin(5t)}{5}\right]_0^{\frac{5}{6}\pi}=\frac{2}{3}b+\frac{1}{5}c=-1$

$f'(x+a)-f'(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$f'\left(\frac{a}{2}\right)-f'\left(-\frac{a}{2}\right)=\underline{2f'\left(\frac{a}{2}\right)}=-\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

$(\because f'(x)$는 원점대칭$)$

22

2017학년도 6월 평가원(가형) 30번

$\therefore f'(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = -3b\sin(3x) - 5c\cdot\sin(5x)$

$\therefore f'(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2} = -3b - \frac{5}{2}c$

$\therefore b = -\frac{9}{4}\ ,\ c = \frac{5}{2}$

$\therefore abc = -\frac{75}{8}\pi$

$\therefore 83$