25

2017학년도 수능(가형) 30번

$x > a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

> (가) $x > a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x) = g(x)$이다.
> (나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x = \alpha$와 $x = \beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M > 0$)
> (다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta - \alpha = 6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점] 216

sol.1) 정석으로...

$$f(x) = \frac{g(x)}{x-a} = \frac{-x^4+\cdots}{x-a} \quad (x>a)$$

$$f'(x) = \frac{(x-a)g'(x)-g(x)}{(x-a)^2}$$

나) 조건 이용

$\longrightarrow f(\alpha) = f(\beta) = \frac{g(\alpha)}{\alpha-a} = \frac{g(\beta)}{\beta-a} = M$

$\longrightarrow f'(\alpha) = 0$

$\longrightarrow (\alpha-a)g'(\alpha) = g(\alpha) \longrightarrow g'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{\alpha-a} = M$

$\longrightarrow f'(\beta) = 0$

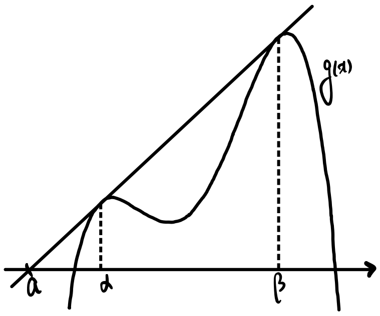
$\longrightarrow (\beta-a)g'(\beta) = g(\beta) \longrightarrow g'(\beta) = \frac{g(\beta)}{\beta-a} = M$

위 두 식 해석 :

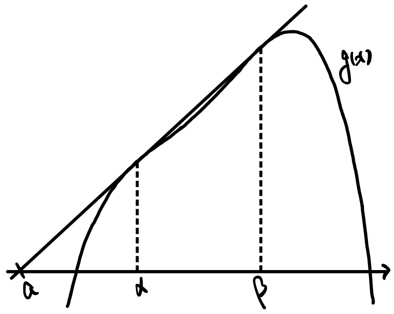
$(a,0)$ $(\alpha, g(\alpha))$의 평균변화율 = $x=\alpha$에서 기울기 M

$(a,0)$ $(\beta, g(\beta))$의 평균변화율 = $x=\beta$에서 기울기 M

$\longrightarrow$ $(a,0)$ $(\alpha, g(\alpha))$ $(\beta, g(\beta))$ 는 일직선 위 점.



$\longrightarrow$ f극점 개수 = g극점 개수



$\longrightarrow$ f극점 개수 > g 극점 개수
: 다 조건 만족!

$\longrightarrow g(x) - M(x-a) = -(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

$g(x) = -(x-\alpha)^2(x-\beta) + M(x-a)$

$g'(x) = -4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + M$

g'의 실근 개수 : 1 or 2

$\therefore\ h(x) = 4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ 와 $y=M$의 교점 개수 : 1 or 2

$\therefore\ \min(M) = h(x)$ 극댓값

$h'(x) = 3(2x-\alpha-\beta+6)(2x-\alpha-\beta-6) = 0$

$\longrightarrow x = \frac{\alpha+\beta-6}{2}\ ,\ \frac{\alpha+\beta+6}{2}$

$\therefore M = h\left(\frac{\alpha+\beta-6}{2}\right) = 216$

25

2017학년도 수능(가형) 30번

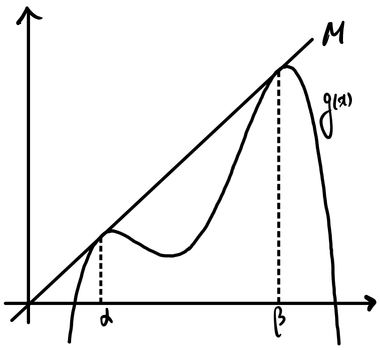
sol2) WLOG 2번

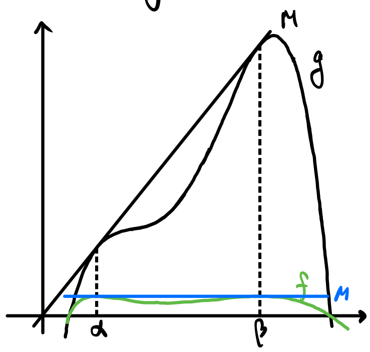
M을 구하는 데에 있어 'a'가 답에 영향을 줄까?

$\longrightarrow$ X

$\therefore$ WLOG, $a=0$ 라 하자.

$f(x) = \dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{g(x)-0}{x-0} \longrightarrow (0,0)$ 에서 $(x, g(x))$ 까지의 기울기





$\longrightarrow$ f극점 개수 = g극점 개수

$\longrightarrow$ f극점 개수 > g 극점 개수 : 다 조건 만족!

$\longrightarrow g(x) - Mx = -(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

$g(x) = -(x-\alpha)^2(x-\beta) + Mx$

$\longrightarrow$ α와 β의 확정적인 값을 정한다고 해서 여전히 답 도출에는 관여 X

$\therefore$ WLOG. $\alpha = -3\sqrt{3}$, $\beta = 3\sqrt{3}$

$g(x) = -(x+3\sqrt{3})^2(x-3\sqrt{3})^2 + Mx$

$g'(x) = -4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3}) + M$

$h(x) = 4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})$
$= 4x^3 - 108x$

$h'(x) = 12x^2 - 108$

$\therefore M \geq h'(-3)$
$= 216$

25

2017학년도 수능(가형) 30번

* WLOG : Without Loss Of Generality

: 일반성을 잃지 않고

sol3) 접근을 다르게! but, 결과는 같음.

⋮

$(x-a)g'(x)=g(x)$

⟶ a에 대한 방정식으로 해석

⟶ $(x, g(x))$ 에서 그은 접·방

결론 : α, β 에서 그은 접·방이 $(a, 0)$을 지난다.

⋮