35

2019학년도 9월 평가원(가형) 21번

0이 아닌 세 정수 l, m, n이

$$|l|+|m|+|n| \le 10$$

을 만족시킨다. $0 \le x \le \frac{3}{2}\pi$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=1$이고

$$f'(x)=\begin{cases} l\cos x & \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right) \\ m\cos x & \left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right) \\ n\cos x & \left(\pi<x<\frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx$의 값이 최대가 되도록 하는 l, m, n에 대하여 $l+2m+3n$의 값은? [4점]

① 12　② 13　③ 14
④ 15　⑤ 16

sol.)

$$f(x)=\begin{cases} l\sin x + C_1 & \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right) \\ m\sin x + C_2 & \left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right) \\ n\sin x + C_3 & \left(\pi<x<\frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

$f(0)=C_1=0$

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-n+C_3=1$　$\therefore C_3=1+n$

$C_2=C_3$　$(\because f(\pi-)=f(\pi+))$

$l=m+n+1$　$\left(\because f\left(\frac{\pi}{2}-\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+\right)\right)$

35

2019학년도 9월 평가원(가형) 21번

$$\therefore f(x) = \begin{cases} l\sin x & \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \\ m\sin x + n + 1 & \left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right) \\ n\sin x + n + 1 & \left(\pi < x < \frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l\sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (m\sin x + n + 1)dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} (n\sin x + n + 1)dx$$

$$= l + m - n + n\pi + \pi$$

$$= l + (l - n - 1) - n + n\pi + \pi \quad (\because m = l - n - 1)$$

$$= 2l + (-2 + \pi)n + (-1 + \pi)$$

$1 < \pi - 2 < 2$

$l, n > 0$ ($\because$ 최대가 되기 위하여)

$\therefore l + |m| + n \le 10$

i) $m > 0$

$l + m + n \le 10$

$l + l - 1 \le 10$

$\therefore l \le \frac{11}{2}$

$\therefore l = 5,\ m = 1,\ n = 3$

$\therefore \max = 3 + 4\pi$

ii) $m<0$

$l-m+n\le 10$

$n+1+n \le 10$

$\therefore n \le \frac{9}{2}$

$\therefore l=4,\ m=-1,\ n=4$

$\therefore \max = 5\pi-1$

$\longrightarrow l=5,\ m=1,\ n=3$ 일 때 max

$\therefore l+2m+3n=16$

sol₂) 그림 그리기

$$f(x)=\begin{cases} l\sin x + C_1 & \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right) \\ m\sin x + C_2 & \left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right) \\ n\sin x + C_3 & \left(\pi<x<\frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

$f(0)=C_1=0$

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-n+C_3=1 \qquad \therefore C_3=1+n$

$C_2=l-m \quad \left(\because f\left(\frac{\pi}{2}-\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+\right)\right)$

$l=m+n+1 \quad \left(\because f(\pi-)=f(\pi+)\right)$

35

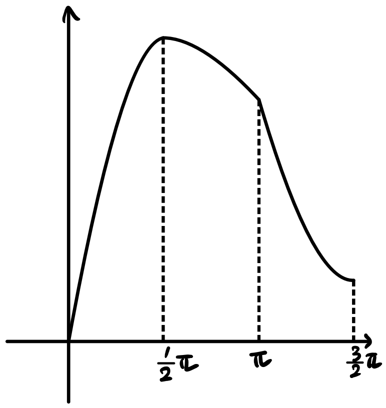
2019학년도 9월 평가원(가형) 21번

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\,dx = l+m-n+(l-m+n+1)\frac{\pi}{2} \quad : \max \text{ 여야 함.}$$

$$= 2m+1+(n+1)\pi \quad (\because l-m=n+1)$$

$\longrightarrow$ 추론 : n이 크면 좋겠다.
$\longrightarrow$ n은 커질때마다 π (약 3.14) 만큼 커짐.

i) $l>0$, $m>0$ 라 가정 (자동으로 $n>0$)



$l+m+n \le 10$

$l+l-1 \le 10$

$\therefore l \le \frac{11}{2}$

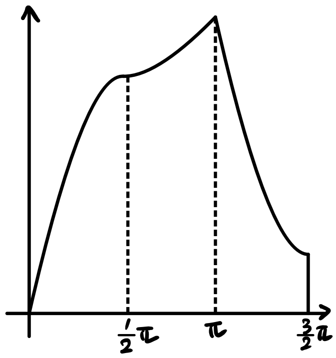
$\therefore l=5,\ m=1,\ n=3$

$\therefore \max = 3+4\pi$

35

2019학년도 9월 평가원(가형) 21번

ii) $l>0$, $m<0$라 가정, $n>0$



$l-m+n\le 10$

$n+1+n\le 10$

$\therefore n\le \frac{9}{2}$

$\therefore l=4,\ m=-1,\ n=4$

$\therefore max=5\pi-1$

iii) $l<0$: 직관적으로 적분값이 작은 것을 알 수 있음.

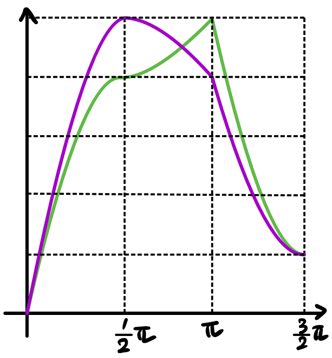
$\longrightarrow l=5,\ m=1,\ n=3$ 일 때 max

$\therefore l+2m+3n=16$

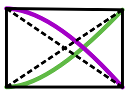
35

2019학년도 9월 평가원(가형) 21번

Sol3) sin함수의 특징 이용하기



i) $\frac{1}{2}\pi \sim \pi$



: 보라가 더 큼.

ii) $0 \sim \frac{1}{2}\pi$

보라: $5\sin x$
초록: $4\sin x$
$\longrightarrow$ 보라 - 초록 : $\sin x$
구간 $\int$: 1

iii) $\pi \sim \frac{3}{2}\pi$

보라: $3\sin x + 4$
초록: $4\sin x + 5$
$\longrightarrow$ 초록 − 보라 $= \sin x + 1$
구간 $\int$: $-1 + \frac{1}{2}\pi \cong 0.5707\cdots$

$\therefore$ 보라가 더 큼.