2016학년도 대학수학능력시험 대비

2015학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 A형 정답

1	⑤	2	①	3	②	4	⑤	5	②
6	③	7	④	8	⑤	9	③	10	⑤
11	④	12	①	13	④	14	③	15	②
16	④	17	①	18	③	19	②	20	③
21	①	22	17	23	99	24	252	25	502
26	25	27	20	28	15	29	30	30	184

해 설

1. [출제의도] 지수를 계산하여 값을 구한다.

$3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=3\times(3^{-1})^{-2}=3\times 3^2=27$

2. [출제의도] 행렬의 연산법칙을 이용하여 두 행렬의 합과 실수배를 계산한다.

$A+2B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}4 & -3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & -6\\ 0 & -4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}7 & -4\\ 3 & -5\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 1이다.

[다른 풀이]

(행렬 $A+2B$의 모든 성분의 합)

= (행렬 A의 모든 성분의 합)

+ 2×(행렬 B의 모든 성분의 합)

$=3+2\times(-1)=1$

3. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{8n-1}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{8-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{8-0}{\sqrt{1+0}}=8$

4. [출제의도] 그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성질을 이해하여 성분의 값을 구한다.

(행렬의 성분 중 1의 개수)

$=2\times$(그래프의 변의 개수)

$=2\times 13=26$

5. [출제의도] 무한등비수열의 성질을 이해하고 극한값을 구한다.

$a>b>0$이므로 $0<\frac{b}{a}<1$에서 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2a^n}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=\frac{2}{1+0}=2$

6. [출제의도] 등차수열의 성질을 이해하고 주어진 항의 값을 구한다.

$a_n=a+(n-1)d$ ($a_1=a$, d: 공차)에서

$a_4=a+3d=9$, $a_7=a+6d=21$이므로

위의 두 식을 연립하면 $d=4$

$a_8=a_4+4d$이고 $a_3=a_4-d$이므로

$a_3+a_8=2a_4+3d$

$=2\times 9+3\times 4=30$

[다른 풀이 1]

$d=4$이므로 $a_4=a+12=9$, $a=-3$

$a_n=-3+(n-1)\times 4=4n-7$

$a_3=5$, $a_8=25$

$a_3+a_8=30$

[다른 풀이 2]

a_4는 제4항이고, a_7은 제7항이다.

또, a_3은 제3항이고, a_8은 제8항이다.

$4+7=3+8$이므로 $a_4+a_7=a_3+a_8$

따라서 $a_3+a_8=9+21=30$

7. [출제의도] 지수법칙과 거듭제곱근을 이해하여 식의 값을 구한다.

$2^a=3$이므로 이 식을 $3^b=\sqrt{2}$에 대입하면

$(2^a)^b=\sqrt{2}$

이 식을 정리하면 $2^{ab}=2^{\frac{1}{2}}$이므로 $ab=\frac{1}{2}$

[다른 풀이 1]

로그의 정의에 의해

$a=\log_2 3$, $b=\log_3\sqrt{2}$

따라서 $ab=\log_2 3\cdot\log_3\sqrt{2}=\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$

[다른 풀이 2]

주어진 식의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$a\log_3 2=1$, $b=\frac{1}{2}\log_3 2$

$a=\frac{1}{\log_3 2}$

따라서 $ab=\frac{1}{\log_3 2}\cdot\frac{1}{2}\log_3 2=\frac{1}{2}$

8. [출제의도] 무한급수와 일반항의 관계를 이해하고 이를 활용하여 극한값을 구한다.

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}=5$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3}{a_n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-\frac{5n}{n+1}+\frac{5n}{n+1}+3}{a_n-\frac{5n}{n+1}+\frac{5n}{n+1}-1}$

$=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}+\lim_{n\to\infty}3}{\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}-\lim_{n\to\infty}1}$

$=\frac{0+5+3}{0+5-1}=2$

[다른 풀이]

$b_n=a_n-\frac{5n}{n+1}$이라 하자.

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$a_n=b_n+\frac{5n}{n+1}$이고, $\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}=5$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\frac{5n}{n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}=0+5=5$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3}{a_n-1}=\frac{\lim_{n\to\infty}(a_n+3)}{\lim_{n\to\infty}(a_n-1)}=\frac{5+3}{5-1}=2$

9. [출제의도] 행렬의 성질을 이해하여 역행렬의 성분의 합을 구한다.

$A^2-A=3E$, $A^2-A-2E=E$

$(A-2E)(A+E)=E$이므로

역행렬의 정의에 의해 $(A-2E)^{-1}=A+E$

$A=\begin{pmatrix}-12 & -a\\ a & 13\end{pmatrix}$이므로

$A+E=\begin{pmatrix}-12 & -a\\ a & 13\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & -a\\ a & 14\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 3이다.

[다른 풀이]

$A^2-A=3E$, $A(A-E)=3E$이므로

$A^{-1}=\frac{1}{3}(A-E)$

$A^{-1}=\frac{1}{a^2-12\cdot 13}\begin{pmatrix}13 & a\\ -a & -12\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-13 & -a\\ a & 12\end{pmatrix}$

$a^2-156=-3$, $a^2=153$

$A-2E=\begin{pmatrix}-14 & -a\\ a & 11\end{pmatrix}$

$(A-2E)^{-1}=\frac{1}{a^2-14\cdot 11}\begin{pmatrix}11 & a\\ -a & -14\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{153-154}\begin{pmatrix}11 & a\\ -a & -14\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-11 & -a\\ a & 14\end{pmatrix}$

따라서 $A-2E$의 역행렬의 모든 성분의 합은 3이다.

10. [출제의도] 지수함수의 그래프의 성질을 이해하고 내분점을 이용하여 좌표를 구한다.

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 D, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 E라 하자.

점 $\mathrm{A}\left(-1,\frac{1}{3}\right)$이므로 점 $\mathrm{D}(-1,0)$이다.

y축 위의 점 C에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{CB}}=1:2$이므로 $\overline{\mathrm{DO}}:\overline{\mathrm{OE}}=1:2$가 되어 점 $\mathrm{E}(2,0)$이다.

따라서 점 B의 y좌표는 9이다.

[다른 풀이]

점 $\mathrm{A}\left(-1,\frac{1}{3}\right)$이고 점 B의 x좌표를 b라 놓으면 점 $\mathrm{B}(b, 3^b)$이다.

선분 AB를 1:2로 내분하는 점 $\mathrm{C}\left(\frac{b-2}{3},\frac{3^b+\frac{2}{3}}{3}\right)$에 대하여 점 C는 y축 위에 있으므로

$\frac{b-2}{3}=0$에서 $b=2$

따라서 점 B의 y좌표는 $3^2=9$이다.

11. [출제의도] 로그함수의 그래프의 성질을 이해하여 좌표를 구한다.

(삼각형 BCD의 넓이)$=\frac{1}{2}\cdot(2p-p)\cdot\log_2 2p$

$=\frac{p}{2}\cdot\log_2 2p$

(삼각형 ACB의 넓이)$=\frac{1}{2}\cdot(2p-p)\cdot\log_2 p$

$=\frac{p}{2}\cdot\log_2 p$

$\frac{p}{2}\cdot\log_2 2p-\frac{p}{2}\cdot\log_2 p=8$이므로

$\frac{p}{2}(\log_2 2p-\log_2 p)=8$, $\frac{p}{2}\cdot\log_2 2=8$

따라서 $p=16$

[다른 풀이]

선분 CD를 삼각형 BCD와 삼각형 ACB의 높이라 하면, 그 길이는 $2p-p=p$로 같다. 그러므로

(삼각형 BCD와 삼각형 ACB 넓이의 차)

$=\frac{p}{2}\times$(선분 BD와 선분 AC의 길이의 차)

$=8$

삼각형 BCD의 밑변인 선분 BD의 길이는 $\log_2 2p$이고, 삼각형 ACB의 밑변인 선분 AC의 길이는 $\log_2 p$이다.

그러므로 $\log_2 2p-\log_2 p=\log_2 2=1$

따라서 $p=16$

12. [출제의도] 무한등비급수의 성질을 이해하여 귀납적으로 정의된 수열의 공비를 구한다.

$a_n a_{n+1}+a_{n+1}=ka_n^2+ka_n$ 에서

$(a_n+1)a_{n+1}=ka_n(a_n+1)$ 이고 $a_n+1\neq 0$ 이므로

양변을 a_n+1 로 나누면 $a_{n+1}=ka_n$

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=k$, 공비가 k인 등비수열

그러므로 $a_n=k^n$

수열 $\{a_n\}$ 의 공비 k가 $0<k<1$ 이므로

무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 은 $\dfrac{k}{1-k}$ 로 수렴한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}k^n=\dfrac{k}{1-k}=5$

따라서 $k=\dfrac{5}{6}$

13. [출제의도] 등차수열과 로그의 성질을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

$\log 3$, $\log(3^t+3)$, $\log 12$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\log(3^t+3)=\dfrac{\log 12+\log 3}{2}=\dfrac{\log 36}{2}=\log\sqrt{36}$

$3^t+3=\sqrt{36}=6$, $3^t=3$

따라서 $t=1$

14. [출제의도] 지표와 가수의 성질을 이해하여 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구한다.

$f(n)=\log n=1+\alpha$

조건에 의해 $1\le 2\alpha<2$ 에서 $\dfrac{1}{2}\le\alpha<1$

$1+\dfrac{1}{2}\le\log n<2$, $10^{\frac{3}{2}}\le n<10^2$

문제에서 $3.1<\sqrt{10}<3.2$, $31<10\sqrt{10}<32$

즉, $10\sqrt{10}=31.\cdots$ 이므로 $31.\cdots\le n<10^2$

그런데 n은 자연수이므로 $32\le n<100$

따라서 자연수 n의 개수는 68이다.

15. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 실생활과 관련된 외적 문제를 해결한다.

마우스 커서가 아이콘 A까지 이동하는 시간이 0.71초이므로

$0.71=a+\dfrac{1}{10}\log_2(D_{\mathrm{A}}+1)$ ⋯ ㉠

마우스 커서가 아이콘 B까지 이동하는 시간이 0.66초이므로

$0.66=a+\dfrac{1}{10}\log_2(D_{\mathrm{B}}+1)$ ⋯ ㉡

㉠−㉡에서

$0.05=\dfrac{1}{10}\log_2(D_{\mathrm{A}}+1)-\dfrac{1}{10}\log_2(D_{\mathrm{B}}+1)$

$=\dfrac{1}{10}\log_2\dfrac{D_{\mathrm{A}}+1}{D_{\mathrm{B}}+1}$

즉, $0.5=\log_2\dfrac{D_{\mathrm{A}}+1}{D_{\mathrm{B}}+1}$

따라서 $\dfrac{D_{\mathrm{A}}+1}{D_{\mathrm{B}}+1}=2^{0.5}=\sqrt{2}$

16. [출제의도] 행렬의 성질을 이용하여 연립방정식의 해를 추론한다.

$\mathrm{A}(\alpha,\beta)$ 가 제1사분면의 점이므로 $\alpha>0$, $\beta>0$

조건에 의해 $\begin{pmatrix}-3-k & 1\\ 5 & 1-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 은

$x=y=0$ 이외의 해 $x=\alpha$, $y=\beta$ 를 가진다.

그러므로 $\begin{pmatrix}-3-k & 1\\ 5 & 1-k\end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하지 않는다.

$(-3-k)(1-k)-5=k^2+2k-8=(k-2)(k+4)=0$

$k=-4$ 또는 $k=2$

i) $k=-4$ 인 경우

연립방정식 $\begin{pmatrix}-3-k & 1\\ 5 & 1-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 은

$x+y=0$ 과 같다.

그런데 α, β 는 모두 양의 실수이므로

$x=\alpha$, $y=\beta$ 는 $x+y=0$ 을 만족시키지 않는다.

ii) $k=2$ 인 경우

연립방정식 $\begin{pmatrix}-3-k & 1\\ 5 & 1-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 은

$-5x+y=0$ 과 같다.

α, β 는 모두 양의 실수이므로

$x=\alpha$, $y=\beta$ 는 $-5x+y=0$ 을 만족시킨다.

따라서 $k=2$

17. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=S_n$ 이라 하면

$a_n+b_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge 2)$

$=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}$

$=-\dfrac{1}{n(n+1)}$

$\lim_{n\to\infty}n^2(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}(n^2a_n+n^2b_n)$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-n^2}{n(n+1)}$

$=-1$

또, 조건에 의해 $\lim_{n\to\infty}n^2b_n=2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}n^2a_n=\lim_{n\to\infty}(n^2a_n+n^2b_n-n^2b_n)$

$=\lim_{n\to\infty}(n^2a_n+n^2b_n)-\lim_{n\to\infty}n^2b_n$

$=-3$

18. [출제의도] 비례식의 성질과 로그함수의 성질을 활용하여 좌표 구하는 문제를 해결한다.

직선이 y축과 만나는 점을 D라 하면

두 곡선 $y=2^x$ 과 $y=\log_2 x$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 점 $\mathrm{C}(a,\ 0)$ 이라 하면 점 $\mathrm{D}(0,\ a)$ 이고, $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AD}}$

조건에 의해 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:1$ 에서

$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{5}\triangle\mathrm{OCD}=\dfrac{1}{10}a^2=40$ 이므로 $a=20$

점 A는 직선 $y=-x+a$ 위의 점이다.

따라서 $p+q=a=20$

[다른 풀이]

두 곡선 $y=2^x$ 과 $y=\log_2 x$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 점 A와 점 B는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 점 $\mathrm{A}(p,\ q)$ 이므로 점 $\mathrm{B}(q,\ p)$ 이고, 점 $\mathrm{C}(a,\ 0)$ 이다.

조건에 의해 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:1$

점 B는 선분 AC를 $3:1$ 로 내분하는 점이므로

$q=\dfrac{3a+p}{4}$, $p=\dfrac{q}{4}$ 에서 $a=5p$, $q=4p$

또, 삼각형 OBC의 넓이가 40이므로

$\dfrac{1}{2}ap=\dfrac{5}{2}p^2=40$

$p^2=16$ 에서 $p=4$ 이므로 $a=20$

($p<0$ 인 경우에는 문제의 조건을 만족시킬 수 없다.)

점 A는 직선 $y=-x+a$ 위의 점이다.

따라서 $p+q=a=20$

19. [출제의도] 지수함수의 성질과 비례관계를 활용하여 미지수의 값 구하는 문제를 해결한다.

$a^{f(t)}=t$ 이므로 $f(t)=\log_a t$

$b^{g(t)}=t$ 이므로 $g(t)=\log_b t$

$2f(a)=3g(a)$ 이므로 $2\log_a a=3\log_b a$ 에서

$\log_b a=\dfrac{2}{3}$ 즉, $\log_a b=\dfrac{3}{2}$

$f(c)=g(27)$

$=\log_b 27=\dfrac{\log_a 27}{\log_a b}=\dfrac{2}{3}\log_a 27$

$=\log_a 27^{\frac{2}{3}}=\log_a 9$

따라서 $c=9$

20. [출제의도] 주어진 조건을 활용하여 행렬과 관련된 명제의 참, 거짓을 추론한다.

ㄱ. $A^2+AB=2E$ 에서 $\dfrac{1}{2}A(A+B)=E$ 이므로 A의 역행렬은 존재하고 $A^{-1}=\dfrac{1}{2}(A+B)$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 A의 역행렬은 존재하고 역행렬의 정의에 의해

$\dfrac{1}{2}A(A+B)=\dfrac{1}{2}(A+B)A=E$

$A(A+B)=(A+B)A$

$A^2+AB=A^2+BA$

$AB=BA$

A의 역행렬이 존재하므로 $BA\neq O$

즉, $BA\neq -BA$

그러므로 $AB\neq -BA$ (거짓)

ㄷ. $A^2-2A=B^2+2B$, $A^2-B^2=2(A+B)$

$AB=BA$ 이므로 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

ㄱ의 풀이에서 $\dfrac{1}{2}A(A+B)=E$ 이므로

$(A+B)^{-1}=\dfrac{1}{2}A$

$(A+B)(A-B)=2(A+B)$ 의 양변에

$(A+B)$ 의 역행렬 $\dfrac{1}{2}A$ 를 곱하면

$A-B=2E$, $A=B+2E$

$A^2+AB=2E$ 에 $A=B+2E$ 를 대입하면

$2E=(B+2E)^2+(B+2E)B$

$=2B^2+6B+4E$

그러므로 $B^2=-3B-E$

$=-3(A-2E)-E$

$=-3A+5E$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄷ은 다음과 같이 확인할 수도 있다.

$A^2=2E-AB=B^2+2B+2A$

$B^2+2B+2A+AB=2E$

$(A+B)(B+2E)=2E$

$\dfrac{1}{2}(B+2E)=(A+B)^{-1}$

ㄱ의 풀이에서 $\dfrac{1}{2}A(A+B)=E$ 이므로

$(A+B)^{-1}=\dfrac{1}{2}A$

즉, $A=B+2E$

$A^2+AB=2E$ 에 $B=A-2E$ 를 대입하면

$A^2+A(A-2E)=2E$

$2A^2-2A=2E$

$A^2=A+E$

그러므로 $B^2=(A-2E)^2$

$=A^2-4A+4E$

$=(A+E)-4A+4E$

$=-3A+5E$

21. [출제의도] 수열의 규칙을 추론하여 수열의 합을

구한다.

$1 \le n \le 15$ 를 만족시키는 자연수 n 중 15와 서로소인 자연수 8개

$16 \le n \le 30$ 을 만족시키는 자연수 n 중 15와 서로소인 자연수 8개

⋮

$15(k-1)+1 \le n \le 15k$ 를 만족시키는 자연수 n 중 15와 서로소인 자연수 8개 ($k=1, 2, 3, \cdots$)

a_{16} 은 $16 \le n \le 30$ 을 만족시키는 15와 서로소인 자연수 n 중 가장 큰 수이다.

$\sum_{n=1}^{16} a_n$ 은 1부터 30까지 자연수 중 15와 서로소인 자연수들의 합이다.

1부터 30까지 자연수 중에는 10개의 3의 배수, 6개의 5의 배수, 2개의 15의 배수가 있다.

따라서 $\sum_{n=1}^{16} a_n = \sum_{n=1}^{30} n - \sum_{n=1}^{10} 3n - \sum_{n=1}^{6} 5n + \sum_{n=1}^{2} 15n$

$= 240$

[다른 풀이]

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$, $a_4=7$, $a_5=8$, $a_6=11$, $a_7=13$, $a_8=14$ 이고

$k\,(k=1, 2, 3, \cdots, 14)$가 15와 서로소이면 $15+k$도 15와 서로소이므로

$a_9 = a_1+15$, $a_{10}=a_2+15$, $\cdots$, $a_{16}=a_8+15$

$\sum_{n=1}^{8} a_n = 1+2+4+7+8+11+13+14 = 60$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{16} a_n &= \sum_{n=1}^{8} a_n + \sum_{n=9}^{16} a_n \\ &= 2\sum_{n=1}^{8} a_n + 15\times 8 \\ &= 2\times 60 + 120 \\ &= 240\end{aligned}$$

22. [출제의도] 연립방정식의 성질을 이용하여 행렬의 성분을 계산한다.

연립방정식을 전개하면

$$\begin{cases} ax + y = 8 \\ -x + by = 9 \end{cases}$$

해 $x=1$, $y=1$을 위 식에 대입하면

$$\begin{cases} a+1 = 8 \\ -1+b = 9 \end{cases}$$

이므로 $a=7$, $b=10$

따라서 $a+b=17$

23. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하여 제50항의 값을 계산한다.

$$\begin{aligned}a_{50} &= S_{50} - S_{49} = 50^2 - 49^2 \\ &= (50-49)(50+49) = 99\end{aligned}$$

[다른 풀이]

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \ (n \ge 2) \\ &= n^2 - (n-1)^2 \\ &= 2n-1\end{aligned}$$

따라서 $a_{50} = 99$

24. [출제의도] 거듭제곱근의 성질을 이해하여 주어진 조건을 만족시키는 자연수를 구한다.

$\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}$ 이 자연수가 되기 위해서는 a는 어떤 자연수의 제곱 꼴이고 b는 세제곱 꼴이다.

$5^2 < 30 \le a \le 40 < 7^2$ 이므로 $a = 6^2$

또, $5^3 < 150 = 5^2 \times 6 < 6^3$ 이고

$6^3 < 294 = 7^2 \times 6 < 7^3$

이므로 $5 < \sqrt[3]{b} < 7$, $b = 6^3$

따라서 $a+b = 36+216 = 252$

25. [출제의도] 양의 약수와 등비수열의 합을 활용하여 주어진 문제를 해결한다.

2^{n-1} 의 모든 양의 약수 : $1, 2, 2^2, \cdots, 2^{n-1}$

$a_n = 1+2+\cdots+2^{n-1} = \dfrac{1\times(2^n-1)}{2-1} = 2^n - 1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{8} a_n &= \sum_{n=1}^{8}(2^n-1) \\ &= \sum_{n=1}^{8} 2^n - \sum_{n=1}^{8} 1 \\ &= \frac{2\times(2^8-1)}{2-1} - 8 \\ &= 2^9 - 2 - 8 = 502\end{aligned}$$

26. [출제의도] 상용로그의 성질을 이해하여 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 합을 구한다.

4^m 이 8자리의 정수이기 때문에 4^m 의 상용로그의 지표는 7이다. 따라서

$7 \le \log 4^m < 8$

$7 \le m \log 4 < 8$

$\dfrac{7}{\log 4} \le m < \dfrac{8}{\log 4}$

$\dfrac{7}{2\log 2} \le m < \dfrac{8}{2\log 2}$

$\dfrac{7}{0.602} \le m < \dfrac{4}{0.301}$

$11.6\cdots \le m < 13.2\cdots$ 이므로 $m = 12$, 13

따라서 $12+13=25$

27. [출제의도] 행렬의 거듭제곱과 $\sum$의 성질을 활용하여 로그와 관련된 문제를 해결한다.

행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여

$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$,

$A^3 = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}$이므로

$A^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$이 되어

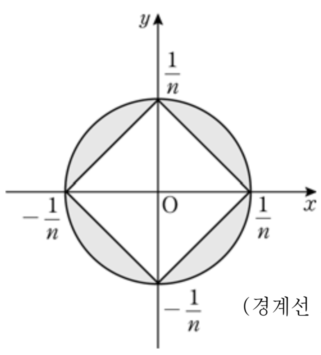
$(1, 1)$성분과 $(2, 2)$성분의 곱 $p_n = 3^n \times 2^n = 6^n$

$$\begin{aligned}\log_{36} p_1 p_2 \cdots p_n &= \log_{36} 6^1 \times 6^2 \times \cdots \times 6^n \\ &= \log_{36} 6^{1+2+\cdots+n} \\ &= \log_{6^2} 6^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= \frac{n(n+1)}{4} = 105\end{aligned}$$

이므로 $n(n+1) = 420 = 20 \times 21$

따라서 $n = 20$

28. [출제의도] 연립부등식의 영역으로 주어진 도형과 관련된 무한급수의 문제를 해결한다.



(경계선 포함)

$S_n = \pi\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{1}{n}\cdot 2 = \dfrac{\pi-2}{n^2}$ 이므로

$S_{n+2} = \dfrac{\pi-2}{(n+2)^2}$

$$\begin{aligned}&\frac{20}{\pi-2}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{S_n S_{n+2}} \\ &= \frac{20}{\pi-2}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi-2}{n^2}\cdot\frac{\pi-2}{(n+2)^2}} \\ &= 20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} \\ &= 20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= 10\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) \\ &= 10\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= 10\times\left(1+\frac{1}{2}\right) \\ &= 15\end{aligned}$$

29. [출제의도] 로그의 정의와 이차함수의 성질을 활용하여 자연수의 개수 구하는 문제를 해결한다.

$f(x) = -x^2 + ax + 4$ 라 하면

로그의 진수 조건에 의해 $f(x) > 0$

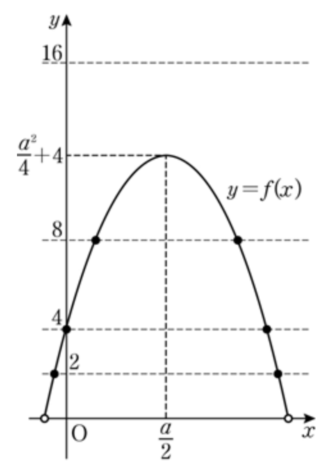
$$\begin{aligned}f(x) &= -x^2 + ax + 4 \\ &= -\left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right) + 4 \\ &= -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + 4\end{aligned}$$

$\log_2(-x^2+ax+4)$ 의 값이 자연수가 되는 실수 x의 개수가 6이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 $y=2^1$, $y=2^2$, $y=2^3$과 각각 2개의 점에서 만나고 $y=2^n$ $(n \ge 4)$와는 만나지 않는다.

즉, $2^3 < \dfrac{a^2}{4} + 4 < 2^4$

$16 < a^2 < 48$ 이고, a가 자연수이므로 $a=5$, 6

따라서 $5 \times 6 = 30$



30. [출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 수열의 규칙을 추론하여 수열의 합을 구한다.

조건 (가)에서 두 원소의 합이 31이 아니므로 집합 A에 속하지 않는 원소는 $31 - a_i \ (1 \le i \le 15)$이다.

그러므로 $\sum_{i=1}^{15} a_i^2$ 과 $\sum_{i=1}^{15}(31-a_i)^2$ 의 합은 집합 U의 모든 원소의 제곱의 합과 같다.

$\sum_{i=1}^{15} a_i^2 + \sum_{i=1}^{15}(31-a_i)^2 = \sum_{i=1}^{30} i^2$

$\sum_{i=1}^{15} a_i^2 + \sum_{i=1}^{15} 31^2 - 62\sum_{i=1}^{15} a_i + \sum_{i=1}^{15} a_i^2 = \dfrac{30\times 31\times 61}{6}$

조건 (나)에 의해

$2\sum_{i=1}^{15} a_i^2 + 15\times 31^2 - 62\times 264 = 5\times 31\times 61$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{15} a_i^2 &= \frac{1}{2}(5\times 31\times 61 - 15\times 31^2 + 62\times 264) \\ &= \frac{31}{2}(5\times 61 - 15\times 31 + 2\times 264) \\ &= \frac{31}{2}(-5\times 32 + 2\times 264) \\ &= 31\times 184\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{1}{31}\sum_{i=1}^{15} a_i^2 = 184$

[참고]

두 원소의 합이 31이 되는 쌍은 (1, 30), (2, 29),

$\cdots$, $(15,\ 16)$ 이므로 집합 A는 각 순서쌍에서 원소를 하나씩 택하여 얻을 수 있다. 이와 같은 방법으로 찾은 집합 A의 여러 예 중 하나는 다음과 같다.

$\{5, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 23, 25, 27, 28, 29, 30\}$

수학영역 A형 정답 및 풀이

01. ①	02. ⑤	03. ④	04. ③	05. ④
06. ③	07. ②	08. ④	09. ②	10. ③
11. ①	12. ②	13. ③	14. ①	15. ⑤
16. ⑤	17. ④	18. ②	19. ⑤	20. ①
21. ⑤	22. 7	23. 11	24. 54	25. 20
26. 12	27. 5	28. 33	29. 16	30. 120

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$5\times 8^{\frac{1}{3}}=5\times(2^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$=5\times 2$$
$$=10$$

<답> ①

2. **출제의도** : 행렬의 덧셈을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$A+B=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\3&2\end{pmatrix}$$

따라서 모든 성분의 합은

$2+2+3+2=9$

<답> ⑤

3. **출제의도** : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6}{n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{6}{n^2}}{1+\frac{3}{n}}$$
$$=\frac{4+0}{1+0}$$
$$=4$$

<답> ④

4. **출제의도** : 그래프를 나타내는 행렬을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

꼭짓점이 5개이므로

그래프를 나타내는 행렬은 5×5행렬이다.

이때, 1의 개수는 변의 개수의 두 배이므로 1의 개수는

2×6

따라서, 0의 개수는

$5\times5-2\times6=13$

<답> ③

5. **출제의도** : 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_5=a_1\times r^4=3r^4$이므로

$3r^4=48$에서 $r^4=16$

$r^2>0$이므로 $r^2=4$

$\therefore\ a_3=a_1\times r^2$

$=3\times4$

$=12$

<답> ④

[다른 풀이]

세 수 a_1, a_3, a_5는 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_3{}^2=a_1\times a_5$

$=3\times48$

$=144$

등비수열 $\{a_n\}$에서

$a_1>0$이므로 $a_3>0$이다.

$\therefore\ a_3=12$

6. **출제의도** : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\int_0^1(2x+a)dx=\left[x^2+ax\right]_0^1$

$=1+a$

$=4$

$\therefore\ a=3$

<답> ③

7. **출제의도** : 이항정리를 이용하여 다항식의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(x+a)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r\,a^{6-r}x^r$이므로

x^4항은 $r=4$일 때이다.

따라서 x^4의 계수는

${}_6\mathrm{C}_4\,a^2=15a^2$

이므로

$15a^2=60$에서 $a^2=4$

$a>0$이므로 $a=2$

<답> ②

8. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x\to-0$일 때, $f(x)\to2$이므로

$\lim_{x\to-0}f(x)=2$

또, $x\to1+0$일 때, $f(x)\to2$이므로

$\lim_{x\to1+0}f(x)=2$

따라서,

$\lim_{x\to-0}f(x)+\lim_{x\to1+0}f(x)$

$=2+2$

$=4$

<답> ④

9. **출제의도** : 수열의 합과 일반항의 관계를 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$S_n=\dfrac{n}{n+1}$에서

$a_4=S_4-S_3$

$= \frac{4}{5} - \frac{3}{4}$

$= \frac{1}{20}$

<답> ②

10. **출제의도** : 실생활 문제를 로그를 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 원본 A, B를 압축했을 때, 최대 신호 대 잡음비는 각각 P_A, P_B이고 평균제곱 오차는 각각 E_A, E_B이므로

주어진 식에 대입하면

$P_A = 20\log 255 - 10\log E_A$

$P_B = 20\log 255 - 10\log E_B$

이때, 두 식을 변끼리 빼면

$P_A - P_B = -10\log E_A + 10\log E_B$

$P_A - P_B = 10\log \frac{E_B}{E_A}$

이때, $E_B = 100E_A$이므로

$P_A - P_B = 10\log \frac{100E_A}{E_A}$

$= 10\log 100$

$= 20$

<답> ③

11. **출제의도** : 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$

수열 $\{{a_n}^2\}$은

첫째항이 ${a_1}^2 = 9$이고,

공비가 $r^2 = \frac{1}{9}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 = \frac{9}{1 - \frac{1}{9}}$

$= \frac{9}{\frac{8}{9}}$

$= \frac{81}{8}$

<답> ①

12. **출제의도** : 정규분포를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

토마토 모종을 심은 지 3주가 지났을 때의 토마토 줄기의 길이를 확률변수 X라 하면

X는 정규분포 $\mathrm{N}(30, 2^2)$을 따르며,

$Z = \frac{X-30}{2}$라 하면

확률변수 Z는 표준정규분포를 따른다.

따라서, 구하는 확률은

$\mathrm{P}(27 \le X \le 32)$

$= \mathrm{P}\left(\frac{27-30}{2} \le \frac{X-30}{2} \le \frac{32-30}{2}\right)$

$= \mathrm{P}(-1.5 \le Z \le 1)$

$= \mathrm{P}(-1.5 \le Z \le 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$

$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$

$= 0.4332 + 0.3413$

$= 0.7745$

<답> ②

13. **출제의도** : 행렬의 연산을 이용하여 삼차방정식을 세우고, 그 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} f(a) \\ 3f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore\ f(a) = 0$

$f(a) = a(a+1)(a-4) = 0$에서

$a = -1$ 또는 $a = 0$ 또는 $a = 4$이므로

모든 a의 값의 합은

$-1 + 0 + 4 = 3$

<답> ③

14. **출제의도** : 미분을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선 $y = 5x + k$가 함수 $y = f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선 $y = 5x + k$가 함수 $y = f(x)$의 그래프와 접해야 한다.

접점의 좌표를 $(a, f(a))$라 하면

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$에서

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 4$

이므로 접선의 기울기는

$f'(a) = 3a^2 - 6a - 4$

한편, 기울기가 5이므로

$3a^2 - 6a - 4 = 5$

$a^2 - 2a - 3 = 0$

$(a+1)(a-3) = 0$

$\therefore\ a = -1$ 또는 $a = 3$

(ⅰ) $a = -1$일 때,

접점은 $(-1, 0)$이므로

접선의 방정식은

$y = 5(x+1) + 0$

즉, $y = 5x + 5$이므로

$k = 5$

(ⅱ) $a = 3$일 때,

접점은 $(3, -12)$이므로

접선의 방정식은

$y = 5(x-3) - 12$

즉, $y = 5x - 27$

이때, k는 양수이므로 k의 값은 없다.

따라서, (ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$k = 5$

<답> ①

15. **출제의도** : 지수부등식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x} \le 5^{x+4}$에서

$5^{2x-1} \le 5^{x+4}$

$2x - 1 \le x + 4$

$x \le 5$

따라서 자연수 x의 값은

1, 2, 3, 4, 5이므로

구하는 합은

$1+2+3+4+5=15$

<답> ⑤

16. **출제의도** : 조건부 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$이므로

$$\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(A)}$$

$$=\frac{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{\frac{5}{24}}{\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{5}{8}$$

<답> ⑤

17. **출제의도** : 등차수열의 합으로부터 공차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}=3n^2+n$이므로

$n=1$일 때, $a_1=3+1=4$

$n=2$일 때,

$\sum_{k=1}^{2} a_{2k-1}=a_1+a_3=3\times 2^2+2=14$

$a_3=14-a_1=14-4=10$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3=a_1+2d$이므로

$10=4+2d$에서 $d=3$

$\therefore\ a_8=a_1+7d$

$=4+7\times 3$

$=25$

<답> ④

18. **출제의도** : 중복조합을 활용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{cases} x+y+z+3w=14 & \cdots ㉠ \\ x+y+z+w=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면

$2w=4$

$\therefore\ w=2$

이때, $x+y+z=8$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

서로 다른 3개에서 8개를 택하는

중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3+8-1}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_8$$

$$={}_{10}\mathrm{C}_2$$

$$=\frac{10\times 9}{2\times 1}$$

$$=45$$

<답> ②

19. **출제의도** : 행렬의 성질을 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $A^2-AB=3E$에서

$A(A-B)=3E$이므로

$A^{-1}=\frac{1}{3}(A-B)$ (참)

ㄴ. $A\cdot\frac{1}{3}(A-B)=\frac{1}{3}(A-B)\cdot A=E$

이므로

$A(A-B)=(A-B)A$

$A^2-AB=A^2-BA$

$\therefore\ AB=BA$ (참)

ㄷ. $AB=BA$이므로

$A^2B-B^2A=A^2B-AB^2$

또, $A^2-AB=3E$의 양변에 B를 곱하면

$A^2B-AB^2=3B$

따라서 조건 $A^2B-B^2A=A+B$에서

$3B=A+B$, $A=2B$

이므로

$A^2-AB=3E$에 대입하면

$(2B)^2-2B\cdot B=3E$

$4B^2-2B^2=3E$, $2B^2=3E$

$\therefore\ B^2=\frac{3}{2}E$

$$\begin{aligned}\therefore\ (A+2B)^2&=(2B+2B)^2\\&=16B^2\\&=16\times\frac{3}{2}E\\&=24E\ \text{(참)}\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

<답> ⑤

20. **출제의도** : 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 상수 a의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=f(x)$는 y축에 대하여 대칭이므로

$\int_{-a}^{a}f(x)dx=13$에서

$2\int_{0}^{a}f(x)dx=13$

$\therefore\ \int_{0}^{a}f(x)dx=\frac{13}{2}$

한편,

$$\begin{aligned}\int_{0}^{3}f(x)dx&=\frac{1}{2}\times(3+1)\times1\\&=2\end{aligned}$$

이고, $f(x+3)=f(x)$이므로

$\int_{0}^{3}f(x)dx=\int_{3}^{6}f(x)dx=\int_{0}^{9}f(x)dx=2$

$\therefore\ \int_{0}^{9}f(x)dx=6$

따라서 $\int_{0}^{9}f(x)dx+\int_{9}^{a}f(x)dx=\frac{13}{2}$에서

$\int_{9}^{a}f(x)dx=\frac{1}{2}$

한편

$\int_{9}^{10}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{1}{2}$

이므로

$a=10$

<답> ①

21. **출제의도** : 도함수로부터 삼차함수의 그래프의 성질을 파악하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건(가)에 의하여

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$로 놓을 수 있다.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f(0)=f'(0)$에서

$c=b$

$\therefore\ f(x)=x^3+ax^2+bx+b$

$g(x)=f(x)-f'(x)$라 하면

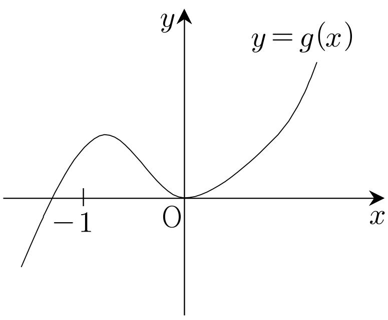
$g(x)=(x^3+ax^2+bx+b)-(3x^2+2ax+b)$

$\quad=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$

$g(0)=0$이고,

조건(다)에 의해 $x\geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq 0$이므로

그림과 같이 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.



따라서 $g'(0)=0$이므로

$g'(x)=3x^2+2(a-3)x+b-2a$에서

$g'(0)=b-2a=0$

$\therefore\ b=2a$

$g(x)=x^3+(a-3)x^2=x^2(x+a-3)$

이므로

$g(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3-a$이고,

$x\geq -1$에서 $g(x)\geq 0$이므로

$3-a\leq -1$이어야 한다.

$\therefore\ a\geq 4 \qquad \cdots ㉠$

$f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$이므로

$f(2)=8+4a+4a+2a=10a+8$

$\quad\geq 10\times 4+8=48\ (\because ㉠)$

따라서 $f(2)$의 최솟값은 48이다.

<답> ⑤

22. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 0}\frac{x(x+7)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}(x+7)$

$=0+7$

$=7$

<답> 7

23. **출제의도** : 함수의 연속성을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}f(x)=f(1)$이다.

$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}(2x+10)=12$

$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}(x+a)=1+a$

$f(1)=1+a$

이므로

$12=1+a$

$\therefore\ a=11$

<답> 11

24. **출제의도** : 무한급수의 성질을 이용하여 무한급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 10$

이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 5b_n)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 5\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$= 4+5\times 10$

$= 54$

<답> 54

25. **출제의도** : 이항분포의 분산을 계산하고, 분산의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X) = n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{2}{9}n$

$\mathrm{V}(3X) = 9\mathrm{V}(X) = 9\times\frac{2}{9}n = 2n$이므로

$2n = 40$에서

$n=20$

<답> 20

26. **출제의도** : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x) = 6x^2+4$이므로

$f(x) = \int f'(x)dx$

$= \int (6x^2+4)dx$

$= 2x^3+4x+C$ (단, C는 적분상수)

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프가

점 $(0, 6)$을 지나므로 $f(0)=6$에서

$C=6$

따라서, $f(x) = 2x^3+4x+6$이므로

$f(1) = 2+4+6 = 12$

<답> 12

27. **출제의도** : 확률밀도함수의 그래프를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{P}(0\le X\le 3) = 1$이므로

$3k+\frac{1}{2}\times 3\times 2k = 1$

$6k=1$

$\therefore\ k=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(0\le X\le 2) = \frac{1}{2}\times(3k+k)\times 2$

$= 4k$

$= 4\times\frac{1}{6}$

$= \frac{2}{3}$

$\therefore\ p+q = 3+2 = 5$

<답> 5

28. **출제의도** : 등비수열의 극한을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^{n}+1}$$

에서 공비가 $\frac{6}{k}$이므로

각 경우로 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) $\frac{6}{k}<1$ 즉, $k>6$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^{n}=0$이므로

$$a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^{n}+1}$$

$$=\frac{0}{0+1}$$

$$=0$$

(ⅱ) $\frac{6}{k}=1$ 즉, $k=6$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^{n}=1$이므로

$$a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1^{n+1}}{1^{n}+1}=\frac{1}{2}$$

(ⅲ) $\frac{6}{k}>1$, 즉, $k<6$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^{n}=\infty$이므로

$$a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^{n}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)}{1+\frac{1}{\left(\frac{6}{k}\right)^{n}}}$$

$$=\frac{\frac{6}{k}}{1+0}$$

$$=\frac{6}{k}$$

따라서,

$$\sum_{k=1}^{10} k a_k$$

$$=1\times a_1+2\times a_2+\cdots+10\times a_{10}$$

$$=1\times\frac{6}{1}+2\times\frac{6}{2}+3\times\frac{6}{3}+4\times\frac{6}{4}+5\times\frac{6}{5}$$

$$\quad+6\times\frac{1}{2}+7\times 0+8\times 0+9\times 0+10\times 0$$

$$=6+6+6+6+6+3$$

$$=33$$

<답> 33

29. **출제의도** : 곱의 미분법과 함수의 극대, 극소를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=(x^3+2)f(x)$에서

$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+2)f'(x)$

$g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가지므로

$g(1)=24$, $g'(1)=0$

$g(1)=3f(1)=24$에서

$f(1)=8$

$g'(1)=3f(1)+3f'(1)=0$에서

$3\times 8+3f'(1)=0$, $f'(1)=-8$

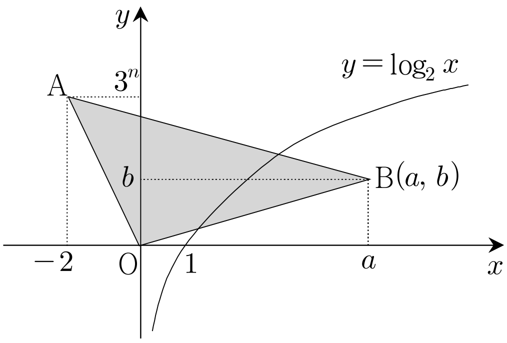
$\therefore\ f(1)-f'(1)=8-(-8)$

$=16$

<답> 16

30. 출제의도 : 로그함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족하는 삼각형의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(a+2)\times(3^n+b)-\frac{1}{2}\times2\times3^n-\frac{1}{2}ab$

$=\frac{1}{2}(a\cdot3^n+ab+2\cdot3^n+2b)-3^n-\frac{1}{2}ab$

$=\frac{3^n}{2}a+b$

이때, 넓이가 50이하이므로

$\frac{3^n}{2}a+b\le50$

$\therefore\ 3^na+2b\le100 \qquad \cdots$ ㉠

(ⅰ) $n=1$일 때,

㉠에서 $3a+2b\le100$이므로 a의 값은 $2,\ 3,\ \cdots,\ 32$의 값을 가질 수 있다.

이때, $b\le\log_2 a$를 만족시키므로

$2^1\le a<2^2$일 때, $b=1$

$2^2\le a<2^3$일 때, $b=1,2$

$2^3\le a<2^4$일 때, $b=1,\ 2,\ 3$

$2^4\le a\le30$일 때, $b=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$a=31$일 때, $b=1,2,3$

$a=32$일 때, $b=1,2$

$f(1)$은 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수와 같으므로

$f(1)=1\times(2^2-1^1)+2\times(2^3-2^2)$

$+3\times(2^4-2^3)+4\times(30-2^4+1)$

$+3+2$

$=2+8+24+60+3+2$

$=99$

(ⅱ) $n=2$일 때,

㉠에서 $9a+2b\le100$이므로 a의 값은 $2,\ 3,\ \cdots,\ 10$의 값을 가질 수 있다.

이때, $b\le\log_2 a$를 만족시키므로

$2^1\le a<2^2$일 때, $b=1$

$2^2\le a<2^3$일 때, $b=1,\ 2$

$2^3\le a\le10$일 때, $b=1,2,3$

$f(2)$는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수와 같으므로

$f(2)=1\times(2^2-2^1)+2\times(2^3-2^2)+3\times3$

$=2+8+9$

$=19$

(ⅲ) $n=3$일 때,

㉠에서 $27a+2b\le100$이므로 a의 값은 $2,3$의 값을 가질 수 있다.

이때, $b\le\log_2 a$를 만족시키므로

$a=2,\ 3$일 때, $b=1$

$f(3)$은 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수와 같으므로

$f(3)=2$

따라서, (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$f(1)+f(2)+f(3)=99+19+2$

$=120$

<답> 120

2014학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 A형 정답

1	③	2	④	3	④	4	④	5	⑤
6	⑤	7	④	8	③	9	⑤	10	①
11	①	12	②	13	①	14	③	15	③
16	②	17	③	18	⑤	19	②	20	①
21	②	22	45	23	72	24	132	25	11
26	101	27	13	28	14	29	50	30	315

해 설

1. [출제의도] 지수를 계산하여 값을 구한다.

$(3^2)^{\frac{1}{2}}+(3^{-2})^{\frac{1}{2}}=3^{2\times\frac{1}{2}}+3^{-2\times\frac{1}{2}}=3+3^{-1}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

2. [출제의도] 그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성질을 이해하여 성분의 값을 계산한다.

그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬의 $(i,\ j)$성분과 $(j,\ i)$성분의 값이 같으므로 $a=0,\ b=1$

따라서 $2a+b=1$

3. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n^2}}{1}=4$

4. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 값을 계산한다.

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$

5. [출제의도] 미분계수를 이해하고 조건의 값을 구한다.

$\lim_{h\to0}\{f(1+h)-3\}=\lim_{h\to0}h\left\{\frac{f(1+h)-3}{h}\right\}$

$=\lim_{h\to0}h\cdot\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-3}{h}=0$

$\lim_{h\to0}\{f(1+h)-3\}=\lim_{h\to0}f(1+h)-3=0$이므로

$\lim_{h\to0}f(1+h)=3$

$f(x)$가 연속이므로

$f(1)=\lim_{h\to0}f(1+h)=3$

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-3}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=\frac{3}{2}$

따라서 $f'(1)+f(1)=\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$

6. [출제의도] 확률분포를 이해하여 주어진 조건의 값을 구한다.

$\mathrm{E}(6X)=6\mathrm{E}(X)=13$이므로 $\mathrm{E}(X)=\frac{13}{6}$

주어진 표를 이용하여 $\mathrm{E}(X)$를 구하면

$1\times\frac{1}{6}+2a+3b=\frac{13}{6}$

따라서 $2a+3b=2$

7. [출제의도] 행렬의 성질을 이용하여 성분의 값을 구한다.

행렬 A의 역행렬이 존재한다면

$A^2=A^{-1}A^3=A^{-1}O=O$이므로 $A^2=O$

$A=A^{-1}A^2=A^{-1}O=O$이므로 $A=O$

행렬 A는 영행렬이 될 수 없으므로 모순이다.

따라서 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않으므로

$-2a+4=0$에서 $a=2$이다.

8. [출제의도] 지수함수를 이해하고 함수의 값을 구한다.

$f(b)=a^b=3$, $f(c)=a^c=6$이므로 $a^b\times a^c=a^{b+c}=18$

$f\left(\frac{b+c}{2}\right)=a^{\frac{b+c}{2}}=\left(a^{b+c}\right)^{\frac{1}{2}}=18^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{2}$

9. [출제의도] 극한의 성질을 이해하여 등차수열의 일반항과 합으로 이루어진 극한값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$, $d=3$인 등차수열이므로

$a_n=3n-1$, $a_{n+1}=3n+2$

첫째항부터 제n항까지 합 S_n은

$S_n=\frac{n(2+3n-1)}{2}=\frac{3n^2+n}{2}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_na_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^2+n}{2}}{(3n-1)(3n+2)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{18+\frac{6}{n}-\frac{4}{n^2}}=\frac{1}{6}$

10. [출제의도] 함수의 극한을 이해하고 극한값을 구한다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x}=2$이므로 $f(x)=x^2+2x+c$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{2}{x}+c$

$\lim_{x\to+0}x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+0}(1+2x+cx^2)=1$

[다른 풀이]

$\frac{1}{x}=t$라 하면 $x\to+0$일 때, $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to+0}x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+2t+c}{t^2}=1$

11. [출제의도] 정규분포를 이해하여 주어진 조건의 확률을 구한다.

확률변수 X는 정규분포 $N(16,0.3^2)$을 따른다.

$P(X\le15.25)$

$=P\left(\frac{X-16}{0.3}\le\frac{15.25-16}{0.3}\right)=P(Z\le-2.5)$

$=P(Z\ge2.5)=0.5-P(0\le Z\le2.5)=0.5-0.49=0.01$

12. [출제의도] 지수를 활용하여 실생활 관련 문제를 해결한다.

$T_0=60$, $T_s=20$이므로

$t=a$, $T=40$ 일 때

$40=20+(60-20)K^{-a}$ …㉠

$t=a+20$, $T=25$ 일 때

$25=20+(60-20)K^{-a-20}$ …㉡

㉠, ㉡에 의해서 $K^{-a}=\frac{1}{2}$ …㉢, $K^{-a-20}=\frac{1}{8}$ …㉣

㉢을 ㉣에 대입하면 $K^{-20}=\frac{1}{4}$

$K=2^{\frac{1}{10}}$을 ㉢에 대입하면 $2^{-\frac{a}{10}}=\frac{1}{2}=2^{-1}$

따라서 $a=10$

[다른 풀이]

$K^{-a}=\frac{1}{2}$, $K^{-20}=\frac{1}{4}$이므로 $K^{-20}=\left(K^{-a}\right)^2=K^{-2a}$

따라서 $a=10$

13. [출제의도] 수열의 일반항을 구하는 과정을 추론한다.

주어진 식에 의하여

$$a_{n+1}-1=\frac{a_n-1}{2a_n-1}$$

이므로

$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{2a_n-1}{a_n-1}=\frac{1+2(a_n-1)}{a_n-1}=\frac{1}{a_n-1}+\boxed{2}$

이다. $b_n=\frac{1}{a_n-1}$이라 하면

$b_{n+1}=b_n+\boxed{2}$

수열 $\{b_n\}$은 $b_1=1$이고, 공차가 2인 등차수열이다.

$b_n=\boxed{2n-1}$ $(n\ge1)$

이다. 따라서 $a_n=\frac{1}{\boxed{2n-1}}+1\ (n\ge1)$이다.

따라서 $k=2$, $f(n)=2n-1$이므로 $f(k)=f(2)=3$

14. [출제의도] 함수의 극한과 연속을 이해하여 함숫값을 구한다.

$g(x)=ax+b\,(a\ne0)$라 하고 $h(x)=f(x)g(x)$라 하자.

$g(0)=\lim_{x\to1-0}f(x)=2$이므로 $b=2$

$h(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-0}h(x)=\lim_{x\to1+0}h(x)=h(1)$이다.

$\lim_{x\to1-0}h(x)=\lim_{x\to1-0}f(x)(ax+2)=2(a+2)$,

$\lim_{x\to1+0}h(x)=\lim_{x\to1+0}f(x)(ax+2)=0$,

$h(1)=f(1)(a+2)=a+2$이므로 $a+2=0$

따라서 $a=-2$이고 $g(x)=-2x+2$이므로 $g(-1)=4$이다.

15. [출제의도] 수열의 일반항을 이용하여 좌표 구하는 문제를 해결한다.

$\mathrm{P}_1\left(\frac{1}{2},\frac{a}{4}\right)$를 지나는 직선은 $y=-\frac{a}{2}x+\frac{a}{2}$

직선 $y=-\frac{a}{2}x+\frac{a}{2}$와 곡선 $y=ax^2$을 연립하면

$ax^2=-\frac{a}{2}x+\frac{a}{2}$

$2x^2+x-1=0$

$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=-1$

P_2는 $(-1,a)$, $x_2=-1$

같은 방법으로 P_3을 구하면 P_3은 $(2,4a)$, $x_3=2$

⋮

$x_n=\frac{1}{2}(-2)^{n-1}$

따라서 $x_{10}=-256$

16. [출제의도] 정적분을 활용하여 직선과 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이 구하는 문제를 해결한다.

점 $\mathrm{P}_1\left(1,\frac{1}{3}\right)$은 곡선 $y=ax^2$ 위의 점이므로 $a=\frac{1}{3}$

직선 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$의 방정식은

$y=-\frac{1}{3}\times1\times x+2\times\frac{1}{3}\times1^2$, $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

점 P_2의 x좌표는 직선 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$와 곡선 $y=\frac{1}{3}x^2$의

교점이므로 $\frac{1}{3}x^2=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

$x^2+x-2=0$

$x=-2$ 또는 $x=1$

점 P_2의 x좌표는 -2

구하는 부분의 넓이는

$\int_{-2}^{0}\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x^2\right)dx=\left[-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}x^3\right]_{-2}^{0}$

$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}-\frac{8}{9}=\frac{10}{9}$

17. [출제의도] 주어진 조건을 이용하여 행렬의 참, 거짓을 추론한다.

ㄱ. $(A+B)A=E$이므로 $A^{-1}=A+B$ (참)

ㄴ. $A(A+B)=(A+B)A=E$이므로 $A^2+AB=A^2+BA$

$AB=BA$이므로

$(AB)^2=ABAB=AABB=A^2B^2$ (참)

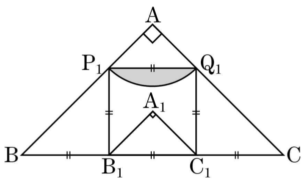
ㄷ. $B(A+B)=A-E$이고 $(A+B)^{-1}=A$이므로

$B=(A-E)A=A^2-A$

그러므로 $A^2+(A^2-A)A=E$에서 $A^3=E$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

18. [출제의도] 등비수열의 일반항을 추측하여 무한등비급수의 합을 구한다.



두 삼각형 P_1BB_1, Q_1CC_1 은 직각이등변삼각형이고 사각형 $P_1B_1C_1Q_1$ 은 정사각형이므로

$\overline{BB_1}=\overline{P_1B_1}=\overline{B_1C_1}=\overline{C_1C}$, $\overline{BC}:\overline{B_1C_1}=3:1$

그러므로 의 넓이의 비는 $9:1$

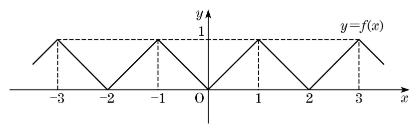
그런데 삼각형 AP_1Q_1 은 선분 P_1Q_1 이 빗변인 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AP_1}=\overline{AB}-\overline{BP_1}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

S_1은 부채꼴 AP_1Q_1 의 넓이에서 삼각형 AP_1Q_1 의 넓이를 뺀 값이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{\pi-2}{18}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\frac{\pi-2}{18}}{1-\frac{1}{9}}=\dfrac{\pi-2}{16}$

19. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 정적분의 값 구하는 문제를 해결한다.



주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로

$g(a+4)-g(4)$

$=\int_{-2}^{a+4}f(t)dt-\int_{-2}^{a}f(t)dt$

$=\int_{-2}^{a+4}f(t)dt+\int_{a}^{-2}f(t)dt$

$=\int_{a}^{a+4}f(t)dt=\int_{0}^{4}f(t)dt=2\int_{0}^{2}f(t)dt=2$

20. [출제의도] 중복조합을 활용하여 실생활 관련 문제를 해결한다.

한 상자에 공을 담는 경우가 결정되면 다른 상자에 공을 담는 경우도 한 가지로 결정된다.

예를 들어 각 상자에는 상자의 색과 다른 색의 공을 담아야 하므로 빨간 상자에 파란 공 1개와 노란 공 4개를 담으면 노란 상자에는 파란 공 4개와 빨간 공 1개를, 파란 상자에는 노란 공 1개와 빨간 공 4개를 담아야 한다.

즉, 빨간 상자에 공을 담는 경우가 결정되면 다른 상자에 공을 담는 경우도 한 가지로 결정된다.

그러므로 노란 공 5개와 파란 공 5개 중에서 빨간 상자에 담을 5개의 공을 선택하는 방법의 수가 구하는 경우의 수이다.

따라서 노란 공과 파란 공 2종류의 공에서 중복을 허락하여 5개의 공을 빨간 상자에 담는 방법의 수는 ${}_{2+5-1}C_5=6$이다.

21. [출제의도] 도함수의 성질을 이용하여 y좌표 구하는 문제를 해결한다.

$f(x)=\frac{x^2}{2}$ 이라 하면 $f'(x)=x$

$f'(a)=a$이므로 접선 l의 방정식은 $y=ax-\frac{a^2}{2}$

직선 m은 l과 수직이므로 기울기가 $-\frac{1}{a}$

미분계수가 $-\frac{1}{a}$ 인 점 Q의 x좌표는 $f'(x)=-\frac{1}{a}$ 에서 $x=-\frac{1}{a}$

직선 m과 곡선 $y=\frac{x^2}{2}$ 의 접점은 $Q\left(-\frac{1}{a},\ \frac{1}{2a^2}\right)$

직선 PQ의 방정식은

$$y=\frac{\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2a^2}}{a+\frac{1}{a}}(x-a)+\frac{a^2}{2}=\frac{a^2-1}{2a}x+\frac{1}{2}$$

이 직선이 y축과 만나는 점 R을 구하면 $R\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$

따라서 점 R의 y좌표는 $\frac{1}{2}$ 이다.

22. [출제의도] 이항정리를 이용하여 x^2의 계수를 계산한다.

$(x+1)^{10}=\sum_{r=0}^{10}{}_{10}C_r\ x^r\cdot 1^{10-r}$

따라서 x^2의 계수는 ${}_{10}C_2=45$이다.

23. [출제의도] 수열을 이해하고 주어진 조건의 값을 계산한다.

$a, 10, 17, b$가 등차수열이므로 공차는 $17-10=7$

그러므로 $a=10-7=3$, $b=17+7=24$

a, x, y, b가 등비수열이므로 $xy=ab=72$

24. [출제의도] 정적분의 성질을 이해하여 정적분의 값을 구한다.

정적분의 성질에 의해 $x=12$를 대입하면

$\int_{12}^{12}f(t)dt=0$ 이므로 $-12^3+12^2+\int_0^1 12f(t)dt=0$

따라서 $\int_0^1 f(x)dx=132$

[다른 풀이]

$\int_{12}^{x}f(t)dt=-x^3+x^2+\int_0^1 xf(t)dt$

$\qquad=-x^3+x^2+x\int_0^1 f(t)dt$

$\int_0^1 f(t)dt=c$라 하고 위 등식의 양변을 x에 관하여 미분하면 $f(x)=-3x^2+2x+c$

$\int_{12}^{x}f(t)dt=-x^3+x^2+\int_0^1 xf(t)dt$ 에 대입하면

$\int_{12}^{x}(-3t^2+2t+c)dt=\left[-t^3+t^2+ct\right]_{12}^{x}$

$=-x^3+x^2+cx-12(-132+c)=-x^3+x^2+cx$

즉, $-132+c=0$

따라서 $\int_0^1 f(x)dx=132$

25. [출제의도] 상용로그의 가수의 성질을 이용하여 주어진 집합의 원소의 개수를 구한다.

n의 값을 구하면 다음과 같다.

i) $1\le n\le 9$

$\log n$의 지표는 0이므로 $f(n)$의 값은

$\log 1$, $\log 2$, $\cdots$, $\log 9$

이 중 $f(n)<\log 2$인 n은 1

ii) $10\le n\le 99$

$\log n$의 지표는 1이므로 $f(n)$의 값은

$\log\frac{10}{10}$, $\log\frac{11}{10}$, $\cdots$, $\log\frac{99}{10}$

이 중 $f(n)<\log 2$인 n은 10, 11, $\cdots$, 19

따라서 집합 A의 원소의 개수는 $1+10=11$이다.

26. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이해하여 최솟값 구하는 문제를 해결한다.

$|f(x)-g(x)|\ge 0$이므로

$f(x)-g(x)=0$일 때 최솟값을 갖는다.

$\log_2(x+10)-\log_{\frac{1}{2}}(x-10)=\log_2(x+10)+\log_2(x-10)$

$\qquad=\log_2(x^2-100)=0$

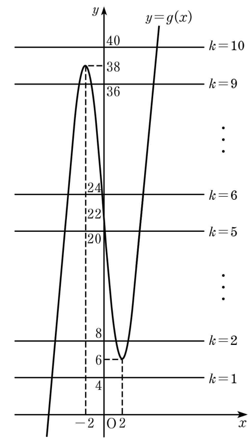
따라서 $p^2-100=1$에서 $p^2=101$이다.

27. [출제의도] 도함수를 활용하여 양의 실근의 개수를 추측한다.

$g(x)=x^3-12x+22$라 하면 $g'(x)=3(x-2)(x+2)$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	38	↘	6	↗



삼차방정식의 양의 실근의 개수 $f(k)$는 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=4k$가 제1사분면에서 만나는 교점의 개수와 같다.

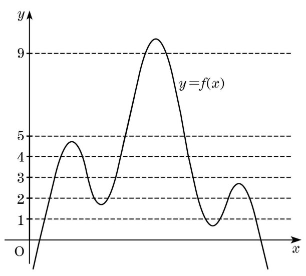
i) $k=1$일 때 $f(k)=0$

ii) $k=2, 3, 4, 5$일 때 $f(k)=2$

iii) $k=6, 7, \cdots, 10$일 때 $f(k)=1$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}f(k)=0\times1+2\times4+1\times5=13$

28. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 평균 구하는 문제를 해결한다.



확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$E(X)=2\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{2}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{11}{3}$

따라서 $p=3$, $q=11$이므로 $p+q=14$이다.

29. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 극한값을 구한다.

직선 PQ의 방정식은

$y=(2a+1)(x-a)+a^2=(2a+1)x-(a^2+a)$

직선 PQ와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x=(2a+1)x-(a^2+a)$이고 $a\ne0$일 때 $x=\frac{a^2+a}{2a}$

$f(a)=\frac{a^2+a}{2a}$ 이고 $\lim_{a\to0}f(a)=\lim_{a\to0}\frac{a^2+a}{2a}=\frac{1}{2}$

따라서 $100\lim_{a\to0}f(a)=50$

30. [출제의도] 주어진 조건을 이용하여 수열의 합 구하는 문제를 해결한다.

(가)에서 $a_n+a_{n+1}\le|a_n|+a_{n+1}=n+6$

$n=2k-1$일 때 $a_{2k-1}+a_{2k}\le 2k+5$

그런데 $\sum_{n=1}^{40}a_n=\sum_{k=1}^{20}(a_{2k-1}+a_{2k})\le\sum_{k=1}^{20}(2k+5)=520$

(나)에서 $\sum_{n=1}^{40} a_n = 520$ 이므로

$a_{2k-1} = |a_{2k-1}|$ $(k=1, 2, \cdots, 20)$

$a_{2k-1} \geq 0$이므로 $a_{2k-1} + a_{2k} = 2k+5$

따라서 $\sum_{n=1}^{30} a_n = \sum_{k=1}^{15} (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{k=1}^{15} (2k+5) = 315$

2015학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 A형 정답 및 풀이

01. ④	02. ①	03. ⑤	04. ②	05. ③
06. ①	07. ⑤	08. ④	09. ②	10. ④
11. ⑤	12. ①	13. ⑤	14. ②	15. ③
16. ②	17. ①	18. ④	19. ③	20. ③
21. ①	22. 27	23. 8	24. 88	25. 11
26. 304	27. 5	28. 4	29. 10	30. 196

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$4^{\frac{3}{2}}\times 2$

$=(2^2)^{\frac{3}{2}}\times 2$

$=2^3\times 2$

$=8\times 2=16$

정답 ④

2. **출제의도** : 행렬의 실수배의 정의를 이용하여 행렬의 모든 성분의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$3A=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 6 & 3\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $3A$의 모든 성분의 합은 12이다.

정답 ①

3. **출제의도** : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3+1}{n^3+3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{3}{n^3}}$

$=\frac{5+0}{1+0}=5$

정답 ⑤

4. **출제의도** : 그래프의 연결 관계를 행렬로 표현하였을 때 행렬의 모든 성분의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는 그래프의 변의 개수의 2배이므로

$4\times 2=8$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은 8이다.

정답 ②

5. **출제의도** : 등비수열의 정의를 이용하여 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_5=a_3\times 2^2$

$=12\times 4=48$

정답 ③

6. **출제의도** : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_0^1 3x^2dx = [x^3]_0^1$$
$$=1-0=1$$

정답 ①

7. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로

$P(A\cap B)=0$

따라서,

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=4P(B)$

이므로

$$P(A)=3P(B)=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

정답 ⑤

8. **출제의도** : 함수의 그래프로부터 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to -0} f(x)=2$$

$\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)=2$이므로

$$\lim_{x\to -0} f(x)+\lim_{x\to 2} f(x)=2+2=4$$

정답 ④

9. **출제의도** : 조건부확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

임의로 선택한 1명이 여학생인 사건을 A, 2학년 학생인 사건을 B라 하면 구하고자 하는 확률은 $P(B|A)$ 이고

$$P(A)=\frac{130}{300},\ P(A\cap B)=\frac{70}{300}$$

이므로

$$P(B|A)=\frac{\frac{70}{300}}{\frac{130}{300}}=\frac{7}{13}$$

정답 ②

10. **출제의도** : 실생활에서 로그로 나타내어진 수식에서 로그의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$V=2C,\ t=\frac{7}{2}t_0$이므로

$\log\left(\frac{t}{t_0}-1\right)=k+4\log\frac{V}{C}$에서

$$\log\left(\frac{\frac{7}{2}t_0}{t_0}-1\right)=k+4\log\frac{2C}{C}$$

$$\log\frac{5}{2}=k+4\log 2$$

$$1-2\log 2=k+4\log 2$$

$$\left(\because \log\frac{5}{2}=\log\frac{10}{4}=\log 10-\log 2^2\right.$$
$$\left.=1-2\log 2\right)$$

$$\therefore\ k=1-6\log 2$$

정답 ④

11. **출제의도** : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이해하고 사각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$A(0,1)$, $B(0,-1)$ 이므로 점 C의 x좌표는

$\log_2(x+1)-1=1$, $\log_2(x+1)=2$

$x+1=4$

$\therefore\ x=3$

또한, 점 D의 x좌표는

$3^{x+1}-2=-1$, $3^{x+1}=1$

$x+1=0$

$\therefore\ x=-1$

따라서, 사각형 ADBC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{BD})\times\overline{AB}$$

$$=\frac{1}{2}(3+1)\times 2=4$$

정답 ⑤

12. **출제의도** : 자연수의 양의 약수의 개수를 이용하여 무한급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$3^n\cdot 5^{n+1}$의 양의 약수의 개수 a_n은

$a_n=(n+1)(n+2)$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}$$

정답 ①

13. **출제의도** : 이항분포를 이용하여 기댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(1)>0$, $f(2)>0$ 이므로

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

따라서, 확률변수 X는 이항분포

$B(15,\frac{1}{3})$을 따르므로

$$E(X)=15\times\frac{1}{3}=5$$

정답 ⑤

14. **출제의도** : 무한급수와 정적분의 관계를 이해하고 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$f(x)=ax(x-3)$

$\quad=a(x^2-3x)$ $(a<0)$

라 하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_0^1 a(x^2-3x)dx$$

$$=a\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=a\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)$$

$$=-\frac{7}{6}a=\frac{7}{6}$$

$\therefore\ a=-1$

$\therefore\ f(x)=-x^2+3x$

따라서 $f'(x)=-2x+3$이므로

$f'(0)=3$

정답 ②

15. **출제의도** : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

네 개의 자연수 중에서 중복을 허락하여 세 수를 선택하는 경우의 수는

$${}_{4+3-1}C_3={}_6C_3$$

$$=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20\cdots㉠$$

이때, 네 개의 자연수 1,2,4,8은 각각 2^0, 2^1, 2^2, 2^3으로 나타낼 수 있고, $2^6=64$, $2^7=128$ 이므로 ㉠ 중에서

$(2^3,2^3,2^3)$, $(2^3,2^3,2^2)$, $(2^3,2^3,2)$, $(2^3,2^2,2^2)$

인 경우는 제외해야 하므로 구하고자 하는 경우의 수는

$20-4=16$

정답 ③

16. **출제의도** : 수열의 일반항을 구하는 과정에서 수식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{S_{n+1}}{n+1}=\sum_{k=1}^{n}S_k\ (n\ge1)\ \cdots\cdots\ (*)$$

에 의하여

$$\frac{S_n}{n}=\sum_{k=1}^{n-1}S_k\ (n\ge2)\ \cdots\cdots\ ㉠$$

$(*)$에서 ㉠을 빼면

$$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\sum_{k=1}^{n}S_k-\sum_{k=1}^{n-1}S_k$$

$$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=S_n$$

$$\frac{S_{n+1}}{n+1}=\frac{S_n}{n}+S_n=\frac{(n+1)S_n}{n}$$

$$\therefore\ \frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{\boxed{(n+1)^2}}{n}(n\ge2)$$

㉠으로부터 $S_2=2$이고,

$$S_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}\times\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\times\cdots\times\frac{S_3}{S_2}\times S_2\ (n\ge3)$$

이므로

$$S_n=\frac{n^2}{n-1}\times\frac{(n-1)^2}{n-2}\times\cdots\frac{3^2}{2}\times2$$

$$=n\cdot n!\times\frac{1}{2\times1}$$

$$=n!\times\boxed{\frac{n}{2}}\ (n\ge3)$$

이다. 그러므로 a_n은

$$a_n=\begin{cases}1 & (n=1,\ 2)\\ \dfrac{n^2-n+1}{2}\times(n-1)! & (n\ge3)\end{cases}$$

이다.

$$\therefore\ f(n)=(n+1)^2,\ g(n)=\frac{n}{2}$$

$$\therefore\ f(4)\times g(20)=5^2\times\frac{20}{2}$$

$$=250$$

정답 ②

17. 출제의도 : 다항함수의 극값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-3x^2+a$ 에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$ 에서

$x=0$ 또는 $x=2$

따라서, 모든 극값의 곱이 -4이므로

$f(0)\times f(2)=a(a-4)=-4$

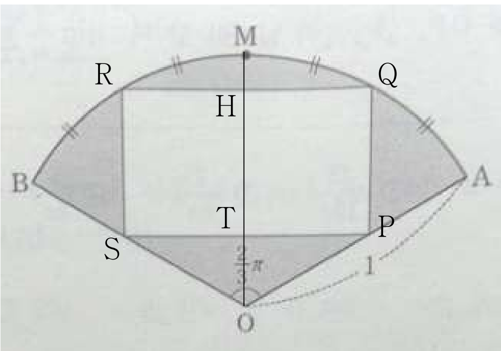
$a^2-4a+4=0,\ (a-2)^2=0$

$\therefore\ a=2$

정답 ①

18. 출제의도 : 도형에 활용된 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



위의 그림 R_1에서 직사각형의 꼭짓점을 각각 P, Q, R, S라 하자. 선분 OM과 두 선분 QR, PS의 교점을 각각 H, T라 하자.

$\angle\mathrm{POQ}=\angle\mathrm{QOM}=\dfrac{\pi}{6}$이므로

$\overline{\mathrm{RQ}}=2\overline{\mathrm{HQ}}=2\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\sin\dfrac{\pi}{6}$

$=2\times\dfrac{1}{2}=1$

$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OQ}}\times\cos\dfrac{\pi}{6}$

$=1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

한편, 삼각형 OPT에서

$\angle\mathrm{POT}=\dfrac{\pi}{3}$이고 $\overline{\mathrm{PT}}=\dfrac{1}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{OT}}=\dfrac{\overline{\mathrm{PT}}}{\tan\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{HT}}=\overline{\mathrm{OH}}-\overline{\mathrm{OT}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

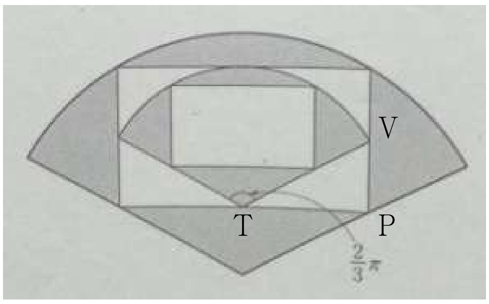
따라서 직사각형 PQRS의 넓이는

$1\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

이므로 그림 R_1에서 색칠한 부분의 넓이 S_1은

$S_1=\dfrac{1}{2}\times1^2\times\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$=\dfrac{\pi-\sqrt{3}}{3}$



위의 그림 R_2에서 그림 R_1의 직사각형과 그 내부에 있는 부채꼴이 만나는 한 점을 그림과 같이 점 V라 하자.

삼각형 TPV에서

$\angle\mathrm{VTP}=\dfrac{\pi}{6}$이고 $\overline{\mathrm{TP}}=\dfrac{1}{2}$이므로

$$\overline{\mathrm{TV}}=\frac{\overline{\mathrm{TP}}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

즉, 그림 R_1에서 부채꼴의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{OA}}=1$이고 그림 R_2에서 작은 부채꼴의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{TV}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로

$$S_2=S_1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 S_1$$

……

따라서,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S_1+\frac{1}{3}S_1+\left(\frac{1}{3}\right)^2S_1+\cdots$$
$$=\frac{S_1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}S_1$$
$$=\frac{3}{2}\times\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$$
$$=\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$$

정답 ④

19\. **출제의도** : 행렬의 관계식을 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $AB+A+B=2E$ 에서

$(A+E)(B+E)=3E$

$(A+E)\left\{\frac{1}{3}(B+E)\right\}=E$

$\therefore\ (A+E)^{-1}=\frac{1}{3}(B+E)$

따라서, 행렬 $A+E$의 역행렬이 존재한다. (참)

ㄴ. $(A+E)(B+E)=3E$ 에서

$(B+E)(A+E)=3E$ 이므로

$(A+E)(B+E)=(B+E)(A+E)$

$AB+A+B+E=BA+A+B+E$

$\therefore\ AB=BA$ (참)

ㄷ. $A^3+E=O$ 에서

$(A+E)(A^2-A+E)=O$

이때, ㄱ에 의하여 존재하므로

$(A+E)^{-1}(A+E)(A^2-A+E)=O$

$A^2-A+E=O$

$\therefore\ A^2=A-E$

$AB+A+B=2E$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$A^2B+A^2+AB=2A$

$(A-E)B+(A-E)+AB=2A$

$2AB=A+B+E$

그런데, $AB=2E-A-B$ 이므로

$2(2E-A-B)=A+B+E$

$4E-2A-2B=A+B+E$

$3A+3B=3E$

$\therefore\ A+B=E$ (거짓)

정답 ③

20\. **출제의도** : 모평균의 신뢰구간을 이용하여 모집단의 확률분포를 파악하고, 정규분포에서의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

어느 나라에서 작년에 운행된 택시의 주행거리를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다.

이 나라에서 작년에 운행된 택시 중에서

16개를 임의추출하여 구한 연간 주행거리의 표본평균이 $\overline{x}$이고, 이 결과를 이용하여 신뢰도 95%로 추정한 m에 대한 신뢰구간은

$$\left[\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{16}},\ \overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\right]$$

즉, $[\overline{x}-0.49\sigma,\ \overline{x}+0.49\sigma]$

$\therefore\ c=0.49\sigma$

$$\therefore\ \mathrm{P}(X\le m+c)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{0.49\sigma}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le 0.49)$$
$$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.49)$$
$$=0.5+0.1879=0.6879$$

정답 ③

21. **출제의도** : 함수의 그래프와 접선의 관계를 이용하여 함수를 정할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에 $x=1$을 대입하면

$0\le f(1)\le 0$

$\therefore\ f(1)=0\cdots$㉠

또한, 조건 (나)에서 $x\neq1$일 때, 즉

(i) $x>1$

$$\frac{6x-6}{x-1}\le\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\le\frac{2x^3-2}{x-1}$$

그런데,

$$\lim_{x\to1+0}\frac{6x-6}{x-1}=6,$$

$$\lim_{x\to1+0}\frac{2x^3-2}{x-1}=\lim_{x\to1}2(x^2+x+1)=6$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=6$$

$x<1$일 때도 같은 방법으로 생각하면

$$\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=6$$

$$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=6\cdots㉢$$

따라서, 다항함수 $f(x)$가 조건 (나)를 만족시키기 위해서는 삼차이하의 다항함수이어야 한다.

(i) $f(x)$가 일차함수인 경우

최고차항의 계수가 1이면서 ㉢을 만족시킬 수는 없다. 따라서, 조건을 만족시키는 일차함수 $f(x)$는 존재하지 않는다.

(ii) $f(x)$가 이차함수인 경우

$f(x)=x^2+ax-3$ ($\because$(가))라 하면 ㉠에서

$f(1)=a-2=0\quad\therefore\ a=2$

그런데, $f'(x)=2x+2$ 이므로 ㉢을 만족시킬 수는 없다. 따라서, 조건을 만족시키는 이차함수 $f(x)$는 존재하지 않는다.

(iii) $f(x)$가 삼차함수인 경우

$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$ ($\because$(가))라 하면 ㉠에서

$f(1)=a+b-2=0\quad\therefore\ a+b=2\cdots$㉣

$f'(x)=3x^2+2ax+b$라 하면 ㉢에서

$f'(1)=2a+b+3=6\quad\therefore\ 2a+b=3\cdots$㉤

㉣, ㉤에서 $a=1,\ b=1$ 이므로

$f(x)=x^3+x^2+x-3$

$\therefore\ f(3)=3^3+3^2+3-3=36$

정답 ①

22. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to3}\frac{x^3}{x-2}=\frac{3^3}{3-2}=27$$

정답 27

23. **출제의도** : 행렬로 표현된 연립일차 방정식 해가 주어졌을 때, 행렬을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ b \end{pmatrix}$의 해가 $x=-1,\ y=2$이므로

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -a+2 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ b \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-a+2=-2,\ 4=b$

즉, $a=4,\ b=4$ 이므로

$a+b=8$

정답 8

24. **출제의도** : 등차수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$a_1+a_{10}=a+(a+9d)$$
$$=2a+9d=22$$

이므로

$$\sum_{k=2}^{9}a_k=a_2+a_3+\cdots+a_9$$
$$=\frac{8(a_2+a_9)}{2}$$
$$=\frac{8(a+d+a+8d)}{2}$$
$$=4(2a+9d)$$
$$=4\times22=88$$

정답 88

25. **출제의도** : 함수가 연속일 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=3$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$$

이 성립해야 한다.

$$\therefore a=\lim_{x\to3}\frac{(3x+2)(x-3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}(3x+2)$$
$$=3\times3+2=11$$

정답 11

26. **출제의도** : 정적분과 미분의 관계를 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_0^x f(x)dx=x^3+4x$$

의 양변을 x에 관하여 미분하면

$f(x)=3x^2+4$

$\therefore\ f(10)=3\times10^2+4=304$

정답 304

27. 출제의도 : 접선을 활용하여 점과 직선 사이의 거리가 최소가 될 접점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}(x>0)$ 에서 $y'=x^2$

또한, 직선 $y=x-10$은 기울기가 1이므로 $x^2=1$ 에서

$x=1$

따라서, $y=\frac{1}{3}+\frac{11}{3}=4$ 이므로 점 P의 좌표는 (1,4)이다.

$\therefore\ a+b=5$

정답 5

28. 출제의도 : 도형과 관련된 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

자연수 n에 대하여 점 $(3n, 4n)$을 중심으로 하고 y축에 접하는 원 O_n의 방정식은

$(x-3n)^2+(y-4n)^2=(3n)^2$

이다.

점 $(3n, 4n)$과 점 $(0, -1)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}=\sqrt{25n^2+8n+1}$

이므로

$a_n=\sqrt{25n^2+8n+1}+3n$

$b_n=\sqrt{25n^2+8n+1}-3n$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^2+8n+1}+3n}{\sqrt{25n^2+8n+1}-3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}+3}{\sqrt{25+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}-3}$$

$$=\frac{5+3}{5-3}=4$$

정답 4

29. 출제의도 : 연속확률변수 X을 이해하고 확률의 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$P(0\le X\le 3)=1$ 이어야 하므로

$P(0\le X\le 3)=3a=1$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}$

$\therefore\ P(0\le X<a)$

$=P(0\le X<\frac{1}{3})$

$=P(0\le X\le 3)-P(\frac{1}{3}\le X\le 3)$

$=1-\frac{1}{3}(3-\frac{1}{3})$

$=1-\frac{1}{3}\times\frac{8}{3}=\frac{1}{9}$

$\therefore\ p+q=10$

정답 10

30. 출제의도 : 지수함수의 그래프와 관련된 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(x-a)^2+(y-b)^2=1=2^0\cdots$ ㉠

$(x-a)^2+(y-b)^2=4=2^2 \cdots$ ㉡

곡선 $y=2^x$이 원 ㉠과는 만나지 않고

원 ㉡과 적어도 한 점에서 만나므로

$a=1$일 때, $2^2<b\le 2^3$

$a=2$일 때, $2^0\le b<2^1$ 또는 $2^3<b\le 2^4$

$a=3$일 때, $2^1\le b<2^2$ 또는 $2^4<b\le 2^5$

$a=4$일 때, $2^2\le b<2^3$ 또는 $2^5<b\le 2^6$

$a=5$일 때,

$2^3\le b<2^4$ 또는 $2^6<b\le 100$

$a=6$일 때, $2^4\le b<2^5$

$a=7$일 때, $2^5\le b<2^6$

$a=8$일 때, $2^6\le b\le 100$

이어야 한다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$$2^2+(2^0+2^3)+(2^1+2^4)+(2^2+2^5)$$
$$+(2^3+36)+2^4+2^5+37$$
$$=(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^5)+37$$
$$+(2^2+2^3+2^4+2^5)+36$$
$$=\frac{1(2^6-1)}{2-1}+\frac{2^2(2^4-1)}{2-1}+73$$
$$=63+60+73$$
$$=196$$

정답 196

2014학년도 7월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설(수학 영역)

수학 영역

A형 정답

1	④	2	③	3	④	4	③	5	④
6	⑤	7	①	8	①	9	②	10	①
11	⑤	12	③	13	②	14	③	15	⑤
16	①	17	⑤	18	②	19	②	20	④
21	④	22	7	23	160	24	11	25	16
26	32	27	31	28	49	29	40	30	5

수학 영역

A형 해설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 계산하기

$\sqrt{8}\times\sqrt[4]{4}=2^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}=2^2=4$

2. [출제의도] 행렬 계산하기

$AB-2B=(A-2E)B$
$=\begin{pmatrix}-1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-6\\5&-14\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $AB-2B$의 모든 성분의 합은 -14

3. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-a}{x-2}=b$이므로

$f(x)=x^3-a$라 하면 $f(2)=0$이므로 $a=8$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x^2+2x+4)=12=b$

따라서 $a+b=20$

4. [출제의도] 행렬과 그래프 이해하기

그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 모든 성분의 개수는 16이므로 $p+q=16$

$q=$(주어진 그래프의 변의 개수)$\times2=8$, $p=8$

따라서 $p-q=0$

(예시) $\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

5. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to-1+0}f(x)+\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=0+1=1$

6. [출제의도] 조건부확률 이해하기

두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B\mid A)=\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}$

따라서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=\dfrac{3}{8}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{19}{24}$

7. [출제의도] 함수의 최대, 최소 이해하기

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a+20$	↘	a	↗	$a+4$

$x=0$일 때, 최솟값을 가지므로 $a=-4$

따라서 $x=-2$일 때, 최댓값은 16

8. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 수학 내적 문제해결하기

함수 $y=3^{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 함수 $y=3^{x-2}$의 그래프이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=3$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=3$

점 A의 좌표를 $(a,\ 3^{a+1})$이라 하면

점 C의 좌표는 $(a,\ 3^{a-2})$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=3^{a+1}-3^{a-2}=3\cdot3^a-\dfrac{1}{9}\cdot3^a=\dfrac{26}{9}\cdot3^a=3$

따라서 점 A의 y좌표 $3^{a+1}=\dfrac{81}{26}$

9. [출제의도] 연립일차방정식과 행렬의 관계를 이용하여 수학내적 문제해결하기

x, y에 대한 연립일차방정식

$\begin{pmatrix}t+5&2\\t-1&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}t+5&1\\t&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지려면 이차정사각행렬 $\begin{pmatrix}t+5&1\\t&t\end{pmatrix}$의 역행렬은 존재하지 않아야 한다.

$t(t+5)-t=t^2+4t=0$

따라서 모든 실수 t의 값의 합은 -4

10. [출제의도] 접선의 방정식 이해하기

곡선이 $(1,\ 1)$을 지나므로 $a+b=-1$

$f'(x)=6x^2+a$이고 $f'(1)=2$ 이므로

$6+a=2$

$a=-4$, $b=3$

따라서 $a^2+b^2=25$

11. [출제의도] 역행렬의 성질 추론하기

ㄱ. $A*O=A^2=O$이면 $A=O$ (거짓)

반례) $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

ㄴ. $A*B=A*(-B)$이므로 $AB=BA$이다.

$(AB)^2=A^2B^2$ (참)

ㄷ. $A*E=A$ 이므로 $A^2-A-E=O$

$A^2-A-E=(A+E)(A-2E)+E=O$

$(A+E)(2E-A)=E$이므로

$(A+E)^{-1}=2E-A$ (참)

따라서 ㄴ, ㄷ

12. [출제의도] 무한수열의 극한을 이용하여 수학 내적 문제해결하기

사다리꼴 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}$의 꼭짓점의 좌표는

$\mathrm{P}_n(n,\ 2^n)$, $\mathrm{Q}_n\left(n,\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$,

$\mathrm{Q}_{n+1}\left(n+1,\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$, $\mathrm{P}_{n+1}(n+1,\ 2^{n+1})$

이므로 사다리꼴 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이

$A_n=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\left\{\left(2^n-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)+\left(2^{n+1}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right)\right\}$

따라서

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{2^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{1-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n+2-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}=3$

13. [출제의도] 독립시행의 정리 이해하기

시행을 5번 한 후 앞면이 나온 횟수를 k라 하면

점 P의 좌표는 $(k,\ 5-k)$

점 P가 직선 $x-y=3$ 위에 있으려면

$k-(5-k)=3$이므로 $k=4$

따라서 $k=4$일 확률은

${}_5\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\left(\dfrac{1}{2}\right)^1=\dfrac{5}{32}$

14. [출제의도] 여러 가지 수열을 이용하여 수학 내적 문제해결하기

1번 시행 : $\mathrm{P}_1(0,1)$, $\mathrm{P}_2(1,0)$

2번 시행 : $\mathrm{P}_3(0,2)$, $\mathrm{P}_4(1,1)$, $\mathrm{P}_5(2,0)$

$\vdots$

n번 시행 : $\mathrm{P}_{\frac{n(n+1)}{2}}(0,n)$, $\cdots$, $\mathrm{P}_{\frac{n(n+3)}{2}}(n,0)$

$\dfrac{13\times14}{2}<100<\dfrac{13\times16}{2}$

그러므로 $\mathrm{P}_{100}(a,\ b)$는 시행을 13번 한 후 위치할 수 있는 점이다.

$\mathrm{P}_{91}(0,\ 13)$, $\cdots$, $\mathrm{P}_{104}(13,\ 0)$

이므로 $\mathrm{P}_{100}(9,\ 4)$

따라서 $a-b=5$

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

> 주어진 식에 의하여
> $$(n+1)a_{n+1} = 2na_n + n\cdot 2^{n+1}$$
> 이다. $b_n = \frac{n}{2^n}a_n$ 이라 하면
> $$b_{n+1} = b_n + \boxed{n} \quad (n \ge 1)$$
> 이고 $b_1 = \boxed{6}$ 이므로
> $$b_n = \boxed{\frac{n^2-n+12}{2}} \quad (n \ge 1)$$
> 이다. 그러므로
> $$a_n = \frac{2^n}{n} \times \boxed{\frac{n^2-n+12}{2}} \quad (n \ge 1)$$
> 이다.

$f(n) = n$, $p = 6$,

$g(n) = b_n = 6 + \sum_{k=1}^{n-1} k \quad (n \ge 2)$

$g(n) = 6 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n+12}{2}$

따라서 $f(p)+g(p) = f(6)+g(6) = 6+21 = 27$

16. [출제의도] 무한급수와 정적분의 관계 이해하기

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k^2+2nk}{n^3}$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{k}{n}\right) + 1 - 1\right\}\frac{1}{n}$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\left\{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2 - 1\right\}\frac{1}{n}$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \left\{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2 + 1\right\}\left\{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2 - 1\right\}\frac{1}{n}$

$= \int_1^2 (x^2+1)(x^2-1)\,dx = \frac{26}{5}$

17. [출제의도] 로그와 시그마의 성질을 이용하여 수학내적 문제해결하기

$a^{\log_5 16} = 16^{\log_5 a} = 2^{4\log_5 a}$ 이므로

$2^{4\log_5 a} = 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots$

$\log_5 a = \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \cdots$

$a_1 = 5^{\frac{1}{4}},\ a_2 = 5^{\frac{2}{4}},\ a_3 = 5^{\frac{3}{4}},\ \cdots$

따라서 $\sum_{k=1}^{40}\log_5 a_k = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{40}{4}$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{40(40+1)}{2} = 205$

18. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2} = 1$ 이므로

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 이차함수

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = k$ 이므로 $f(x) = (x-1)(x-a)$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = 1-a = k$

$h(x) = f(x)g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$h(2) = \lim_{x\to 2+0} h(x) = \lim_{x\to 2-0} h(x)$

$h(2) = f(2)g(2) = 3(2-a)$

$\lim_{x\to 2+0} h(x) = \lim_{x\to 2+0}(x-1)(x-a)(2-x) = 0$

$\lim_{x\to 2-0} h(x) = \lim_{x\to 2-0}(x-1)(x-a)(x+1)$

$= 3(2-a)$

따라서 $a = 2$ 이므로 $k = -1$

19. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이용하여 수학내적 문제해결하기

함수 $f'(x) = (x-a)(x-b)$ 이고

(가)에서 $f(x)$ 가 $x = \frac{1}{2}$ 에서 극값을 가지므로

$a = \frac{1}{2}$ 또는 $b = \frac{1}{2}$

$f(a) - f(b)$

$= \int_0^a (t-a)(t-b)dt - \int_0^b (t-a)(t-b)dt$

$= \int_0^a (t-a)(t-b)dt + \int_b^0 (t-a)(t-b)dt$

$= \int_b^a (t-a)(t-b)dt = -\frac{(a-b)^3}{6} = \frac{1}{6}$

이므로 $b - a = 1$

$b = \frac{1}{2}$ 이면 $a = -\frac{1}{2}$ 이므로 모순

따라서 $a = \frac{1}{2}$ 이고 $b = \frac{3}{2}$ 이므로 $a+b = 2$

20. [출제의도] 도형과 무한수열의 극한을 이용하여 수학내적 문제해결하기

C_1: $x^2 + y^2 = 1$

C_2: $(x-2)^2 + y^2 = 2^2$

C_3: $\{x-(2+2^2)\}^2 + y^2 = (2^2)^2$

$\vdots$

C_n: $\{x-(2+2^2+\cdots+2^{n-1})\}^2 + y^2 = (2^{n-1})^2$

원 C_n 의 중심의 x 좌표

$a_n = 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 2 \quad (n \ge 2)$

원 C_n 의 반지름의 길이 $r_n = 2^{n-1}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{r_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n-2}{2^{n-1}} = 2$

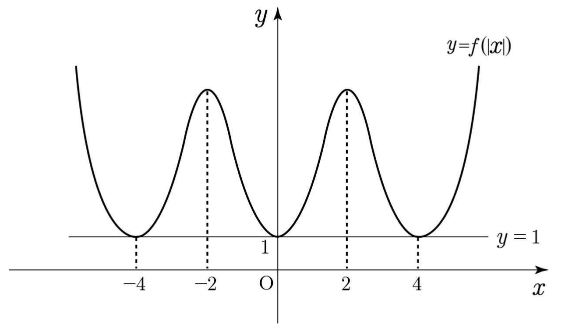
21. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 수학내적 문제해결하기

사차함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 이고

함수 $f(x)$ 의 그래프가 직선 $x = 2$에 대해 대칭

이므로 $f(x) = (x-2)^4 + a(x-2)^2 + b$

$f(0) < f(2)$ 이고 방정식 $f(|x|) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 이려면 $f(x)$ 가 $x = 0$, 4 에서 극솟값 1 을 갖고 $x = 2$ 에서 극댓값을 가져야 한다.



$f(0) = f(4) = 1$에서 $16 + 4a + b = 1$

$f'(x) = 4(x-2)^3 + 2a(x-2)$에서

$f'(0) = f'(4) = 0$이므로 $-32 - 4a = 0$

$a = -8$, $b = 17$ 이므로

$f(x) = (x-2)^4 - 8(x-2)^2 + 17$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값 $f(2) = 17$

22. [출제의도] 무한급수의 성질 이해하기

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - 7)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n - 7) = 0$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = 7$

23. [출제의도] 이항정리 이해하기

$(x+2)^6$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는

${}_6C_3 \cdot 2^3 = 160$

24. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x) = 3x^2 - 1$이므로 $f'(2) = 11$

25. [출제의도] 등차수열 이해하기

수열 $\{b_n\}$ 은 공차가 3 인 등차수열이므로

$b_n = 3n - 3 + b_1$

주어진 조건에 의하여

$a_n = b_n - 2n = n - 3 + b_1$

$a_{10} = 7 + b_1 = 11$

$b_1 = 4$

따라서 $b_5 = 4 + 12 = 16$

26. [출제의도] 로그방정식을 이용하여 수학외적 문제해결하기

주어진 조건에 의하여

$E_1 = 300R\log_a 16$, $E_2 = 240R\log_a x$ 이고,

$E_1 = E_2$ 이므로 $300R\log_a 16 = 240R\log_a x$

$\frac{5}{4}\log_a 16 = \log_a 32 = \log_a x$

따라서 $x = 32$

27. [출제의도] 상용로그의 성질 이해하기

$\log x = 1 + \alpha \ (0 < \alpha < 1)$ 이라 하자.

$\log\sqrt{x} = \frac{1+\alpha}{2}$ 이고 $\log\frac{1}{x} = -2 + (1-\alpha)$

주어진 조건에 의하여 $\frac{1+\alpha}{2}=5(1-\alpha)$

$\alpha=\frac{9}{11}$ 이므로 $\log x=1+\frac{9}{11}=\frac{20}{11}$

따라서 $p+q=31$

28. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 수학 외적 문제해결하기

[실행 3]까지 할 때, 상자 B 의 흰 공의 개수가 홀수가 되려면

(i) [실행 2]에서 상자 B 에서 검은 공 2개를 상자 A 로 넣고 [실행 3]에서는 상자 A 에서 검은 공 1개, 흰 공 1개를 상자 B 로 넣는 경우

$\frac{{}_{10}C_2}{{}_{12}C_2}\times\frac{{}_8C_1\times{}_2C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{8}{33}$

(ii) [실행 2]에서 상자 B 에서 검은 공 1개, 흰 공 1개를 상자 A 로 넣고 [실행 3]에서는 상자 A 에서 흰 공 2개를 상자 B 로 넣는 경우

$\frac{{}_{10}C_1\times{}_2C_1}{{}_{12}C_2}\times\frac{{}_9C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{8}{33}$

(i), (ii)에 의하여 $\frac{8}{33}+\frac{8}{33}=\frac{16}{33}$

따라서 $p+q=49$

29. [출제의도] 정적분의 성질 추론하기

(가)에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 y 축 대칭

(다)에서

$$\int_{-1}^{1}(2x+3)f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}3f(x)\,dx=15$$

이므로 $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=5$

(나)에 의해 $\int_{-6}^{10}f(x)dx=8\int_{-1}^{1}f(x)dx=40$

30. [출제의도] 도형과 무한등비급수 추론하기

$S_1=2\{($삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 넓이$)$

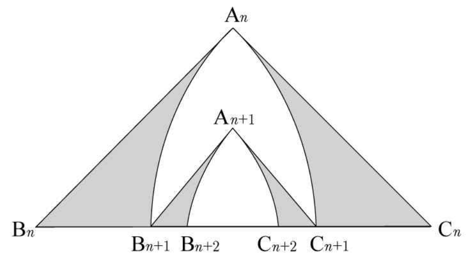
$-($부채꼴 $B_1A_1C_2$ 의 넓이$)\}$

$=2\left(4-\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{\pi}{4}\right)=2(4-\pi)$

$S_2=2\{($삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 넓이$)$

$-($부채꼴 $B_2A_2C_3$ 의 넓이$)\}$

$=2(4-\pi)(\sqrt{2}-1)^2$



$\overline{B_nC_n}=2l_n$, $\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=2l_{n+1}$ 이라 하면

$\overline{A_nB_n}=\overline{B_nC_{n+1}}=\sqrt{2}\,l_n$ 이고

$\frac{1}{2}\overline{B_nC_n}+\frac{1}{2}\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=\overline{B_nC_{n+1}}$ 이므로

$l_n+l_{n+1}=\sqrt{2}\,l_n$

$l_{n+1}=(\sqrt{2}-1)l_n$

$S_{n+1}=(\sqrt{2}-1)^2S_n$

$\frac{1}{4-\pi}\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{4-\pi}\cdot\frac{2(4-\pi)}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=1+\sqrt{2}$

$a=1$, $b=2$

따라서 $a^2+b^2=5$

수학영역 A형 정답 및 풀이

01. ①	02. ④	03. ③	04. ②	05. ①
06. ⑤	07. ②	08. ③	09. ③	10. ⑤
11. ④	12. ④	13. ⑤	14. ②	15. ①
16. ②	17. ④	18. ①	19. ⑤	20. ③
21. ⑤	22. 3	23. 21	24. 32	25. 5
26. 34	27. 12	28. 8	29. 10	30. 71

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$3\times 8^{\frac{2}{3}}=3\times\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}$

$=3\times 2^2$

$=12$

정답 ①

2. 출제의도 : 행렬의 연산의 정의를 이용하여 행렬을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$2A+B=2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $2A+B$의 모든 성분의 합은 9이다.

정답 ④

3. 출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)$

$=2+1$

$=3$

정답 ③

4. 출제의도 : 그래프의 연결 관계를 행렬로 표현하였을 때 행렬의 성분 중 1의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는 그래프의 변의 개수의 2배이므로

$4\times 2=8$

정답 ②

5. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_8 2+\log_8 4$

$=\log_8(2\times 4)$

$=\log_8 8$

$=1$

정답 ①

6. 출제의도 : 등차수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1=2$이므로

$a_3=a_1+2d=10$

$\therefore\ d=4$

따라서,

$a_5 = 2+4\times 4 = 18$

정답 ⑤

7. 출제의도 : 함수의 연속의 정의를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

을 만족시킨다.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x+5) = 7$$

$f(1) = a$

이므로 $a=7$

정답 ②

8. 출제의도 : 등비수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

첫째항이 3이고 공비가 3이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n = 3\cdot 3^{n-1} = 3^n$

따라서,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-7}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{7}{3^n}}{1}$$

$$= 3$$

정답 ③

9. 출제의도 : 미분계수의 정의와 도함수를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = x^2+4x$에서

$f'(x) = 2x+4$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\frac{1}{2}$$

$$= f'(1)\times\frac{1}{2}$$

$$= 6\times\frac{1}{2}$$

$$= 3$$

정답 ③

10. 출제의도 : 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+1)}$$

$$= 4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 4\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$= 4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{4n}{n+1}$$

$$= \frac{15}{4}$$

에서

$16n = 15n+15$

$\therefore\ n = 15$

정답 ⑤

11. **출제의도** : 연립방정식의 해가 무수히 많을 조건을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\left\{\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k & 0\\0 & k\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2-k & 0\\0 & 4-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\cdots$ ㉠

연립방정식 ㉠이 무수히 많은 해를 가지므로

$(2-k)(4-k)=0$ 에서

$k=2$ 또는 $k=4$

따라서 모든 k의 값의 합은 6이다.

정답 ④

12. **출제의도** : 행렬의 거듭제곱을 이용하여 수열의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}$

$A^2=AA=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2 & 0\\0 & 4^2\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}2^2 & 0\\0 & 4^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^3 & 0\\0 & 4^3\end{pmatrix}$

$\cdots$

$A^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\0 & 4^n\end{pmatrix}$ $(n\geq 1)$

그러므로

$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2^n & 0\\0 & 4^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3\cdot 2^n\\4^n\end{pmatrix}$

$\therefore$ $x_n=3\cdot 2^n$, $y_n=4^n$

따라서,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n)^2}{y_n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^2\cdot 4^n}{4^n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^2}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

$$=9$$

정답 ④

13. **출제의도** : 함수의 그래프로부터 우극한과 좌극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim\limits_{x\to-1-0}f(x)=2$

$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=3$ 이므로

$\lim\limits_{x\to-1-0}f(x)+\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=2+3=5$

정답 ⑤

14. **출제의도** : 미분법을 이용하여 속도를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

시각 t에서의 위치가 $x=-t^2+4t$이므로

속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}$

$=-2t+4$

$t=a$에서 속도가 0이므로

$-2a+4=0$ $\therefore$ $a=2$

정답 ②

15. **출제의도** : 실생활에서 로그로 나타내어진 수식을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$L^2=100D^2\times\log_3 R$에서

$D=20$, $R=81$이므로

$L^2=100\times20^2\times\log_3 81$

$=100\times20^2\times4$

$L>0$이므로

$L=10\times20\times2=400$

정답 ①

16. **출제의도** : 미분을 이용하여 극댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-9x^2+24x+a$에서

$f'(x)=3x^2-18x+24$

$=3(x^2-6x+8)$

$=3(x-2)(x-4)$

이때, $f'(x)=0$에서 $x=2$, $x=4$이므로 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$20+a$	$\searrow$	$16+a$	$\nearrow$

따라서, $x=2$에서 극댓값 $20+a$를 가지므로

$20+a=10$

$\therefore\ a=-10$

정답 ②

17. **출제의도** : 수열의 일반항을 구하는 과정에서 수식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$2a_{n+1}=3a_n-\frac{6n+2}{(n+1)!}$$

$$=3a_n-\frac{6(n+1)-4}{(n+1)!}$$

$$=3a_n-\frac{6(n+1)}{(n+1)!}+\frac{4}{(n+1)!}$$

$$2a_{n+1}-\frac{4}{(n+1)!}=3a_n-\frac{6}{n!}$$

$$=3a_n-3\times\boxed{\frac{2}{n!}}$$

$b_n=a_n-\boxed{\frac{2}{n!}}$라 하면

$2a_{n+1}-\dfrac{4}{(n+1)!}=2b_{n+1}$,

$3a_n-3\times\dfrac{2}{n!}=3b_n$이므로

$2b_{n+1}=3b_n$

이다. $b_{n+1}=\dfrac{3}{2}b_n$이고

$b_1=a_1-2=3-2=1$이므로

$$b_n=1\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=\boxed{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$$

이다. 그러므로

$a_n=b_n+\dfrac{2}{n!}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{2}{n!}$이다.

따라서 $f(n)=\dfrac{2}{n!}$, $g(n)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

이므로

$$f(3)\times g(3)=\frac{2}{3!}\times\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$=\frac{1}{3}\times\frac{9}{4}$

$=\frac{3}{4}$

정답 ④

18. 출제의도 : 도형에 활용된 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

R_1에 색칠된 부채꼴은 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$이므로

$S_1=\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$

또, 사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$에서 $\overline{\mathrm{A_2B_2}}=x$라 하면 $\overline{\mathrm{A_2D_2}}=2x$이므로

$\overline{\mathrm{A_1C_2}}=\overline{\mathrm{A_1A_2}}+\overline{\mathrm{A_2C_2}}$

$2=1+\sqrt{x^2+(2x)^2}$

$\sqrt{5}x=1$

$\therefore\ x=\frac{\sqrt{5}}{5}$

이때,

$$\frac{\overline{\mathrm{A_2B_2}}}{\overline{\mathrm{A_1B_1}}}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{1}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

이므로

$S_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2$

…

따라서,

$\lim_{n\to\infty}S_n$

$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2+\frac{\pi}{4}\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^4+\cdots$

$$=\frac{\frac{\pi}{4}}{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{5}}$$

$=\frac{5}{16}\pi$

정답 ①

19. 출제의도 : 행렬의 관계식을 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $A^2=-A$이므로

$A^3=-A^2=-(-A)=A$ (참)

ㄴ. $B^2=-A^2+A+E$

$=A+A+E$

$=2A+E$

이므로

$AB^2=A(2A+E)=2A^2+A$

$=-2A+A=-A$

$B^2A=(2A+E)A=2A^2+A$

$=-2A+A=-A$

따라서 $AB^2=B^2A$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $B^2=2A+E$이므로

양변을 제곱하면

$B^4=(2A+E)^2=4A^2+4A+E$

$=4(-A)+4A+E$

$=E$

즉, $B\cdot B^3=B^3\cdot B=E$

따라서, 행렬 B의 역행렬은 B^3이다.

(참)
그러므로 <보기>에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

20. 출제의도 : 로그함수의 그래프의 평행이동을 이용하여 관계식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
곡선 $y=f(x)$와 x축과의 교점의 y좌표는 0이므로
$\log_a(bx-1)=0$
$bx-1=1$
$\therefore\ x=\dfrac{2}{b}$
그러므로 x축과의 교점은 $\left(\dfrac{2}{b},\ 0\right)$이다.
한편,
$$y=\log_b(ax-1)$$
$$=\log_b a\left(x-\frac{1}{a}\right)$$
$$=\log_b\left(x-\frac{1}{a}\right)+\log_b a$$
이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $y=\log_b x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{a}$만큼, y축의 방향으로 $\log_b a$만큼 평행이동한 것이다.
그러므로 곡선 $y=g(x)$의 점근선은
$x=\dfrac{1}{a}$
이다. 이때, 점 $\left(\dfrac{2}{b},\ 0\right)$이 직선 $x=\dfrac{1}{a}$위에 있어야 하므로
$\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}$
$\therefore\ b=2a$
한편, $b>1$에서 $a=\dfrac{1}{2}b$이므로 $a>\dfrac{1}{2}$이고 조건에서 $a<1$이므로
$\dfrac{1}{2}<a<1$
이다.

정답 ③

21. 출제의도 : 함수의 극한의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
조건(나)에서 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이고,
조건(가) $\displaystyle\lim_{x\to1}g(x)=g(1)=0$이므로
$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이다.
또한, $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이므로
$f(x)=(x-1)^2(x+a)$,
$g(x)=(x-1)(x+b)(x+c)$
($a,\ b,\ c$는 상수)로 놓을 수 있다.
조건(나)에서 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이고,
$f(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 가질 수 없으므로 $\displaystyle\lim_{x\to2}g(x)=g(2)\neq0$,
$\displaystyle\lim_{x\to2}f(x)=f(2)=0$
따라서 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$이다.
조건(나)에서
$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=2$, $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}=6$이고,

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-1)(x+b)(x+c)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-2)}{(x+b)(x+c)}$$

$$=\frac{2}{(3+b)(3+c)}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-1)(x-2)}{(x+b)(x+c)}$$

$$=\frac{6}{(4+b)(4+c)}$$

이므로

$(3+b)(3+c)=1$, $(4+b)(4+c)=1$

즉, $bc+3(b+c)=-8$ ⋯㉠

$bc+4(b+c)=-15$ ⋯㉡

㉠,㉡에서 $b+c=-7$, $bc=13$

따라서

$g(5)=4(5+b)(5+c)$

$=4\{bc+5(b+c)+25\}$

$=4(13-35+25)$

$=12$

정답 ⑤

22. **출제의도** : 수열의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{n^2+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}$$

$=3$

정답 3

23. **출제의도** : 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^2+x+3$에서

$f'(x)=2x+1$이므로

$f'(10)=21$

정답 21

24. **출제의도** : 지수함수를 이용하여 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2^x$에서 밑이 1보다 크므로 최댓값은

$f(3)=2^3=8$

또, $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{4}\right)^x$에서 밑이 1보다 작으므로 최댓값은

$g(-1)=\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=4$

따라서,

$ab=8\times4=32$

정답 32

25. **출제의도** : 무한급수의 수렴조건을 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)=0$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(a_n - \frac{5n}{n+1}\right)+\frac{5n}{n+1}\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{5n}{n+1}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}$$
$$= 0+5$$
$$= 5$$

정답 5

26. **출제의도** : 주어진 수열의 합을 이용하여 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=2n+1$에서

$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$

$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)$

$=a_{n+1}-a_1$

$=2n+1$

$\therefore\ a_{n+1}=a_1+2n+1$

$n=9$를 대입하면 $a_1=15$이므로

$a_{10}=15+2\times 9+1$

$\quad =34$

정답 34

27. **출제의도** : 도함수를 활용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=-x^3+2x$ 에서

$y'=-3x^2+2$ 이므로

$x=1$일 때 $y'=-1$이다.

따라서 점 $(1, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=-(x-1)$ 즉, $y=-x+2$

접선이 점 $(-10, a)$를 지나므로

$a=10+2=12$

정답 12

28. **출제의도** : 귀납적 추론에 의하여 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건(가)에서

$(x_1, y_1)=(1, 1)$

조건(나)를 이용하면

$(x_2, y_2)=\left(x_1, (y_1-3)^2\right)=(1, 4)$

$(x_3, y_3)=\left((x_2-3)^2, y_2\right)=(4, 4)$

$(x_4, y_4)=\left(x_3, (y_3-3)^2\right)=(4, 1)$

$(x_5, y_5)=\left((x_4-3)^2, y_4\right)=(1, 1)$

$(x_6, y_6)=\left(x_5, (y_5-3)^2\right)=(1, 4)$

$\cdots$

그러므로 자연수 k에 대하여

$(x_{4k-3}, y_{4k-3})=(1, 1)$

$(x_{4k-2}, y_{4k-2})=(1, 4)$

$(x_{4k-1}, y_{4k-1})=(4, 4)$

$(x_{4k}, y_{4k})=(4, 1)$

이다.

이때, $2015=4\times 504-1$ 이므로

$(x_{2015}, y_{2015})=(4, 4)$

$\therefore\ x_{2015}+y_{2015}=4+4=8$

정답 8

29. **출제의도** : 함수의 극한의 성질을 이용하여 다항함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{x^2}=-11$ 에서

$f(x)=x^3-11x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=-9$ 이고,

$\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$ 이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=0$ 이다.

$f(1)=-10+a+b=0$ 에서 $b=-a+10$

$f(x)=x^3-11x^2+ax-a+10$ 이고,

아래의 조립제법에 의하여

$f(x)=(x-1)(x^2-10x+a-10)$

1	1	-11	a	$-a+10$
		1	-10	$a-10$
	1	-10	$a-10$	0

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2-10x+a-10)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}(x^2-10x+a-10)$

$=a-19$

따라서 $a-19=-9$ 에서 $a=10$ 이므로

$f(x)=x^3-11x^2+10x$ 이다.

$\dfrac{1}{x}=t$ 라 하면

$\lim\limits_{x\to\infty}xf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{f(t)}{t}$

$=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{t^3-11t^2+10t}{t}$

$=\lim\limits_{t\to+0}(t^2-11t+10)$

$=10$

정답 10

30. 출제의도 : 상용로그를 이용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log a=n_1+\alpha_1$ (n_1은 정수, $0\le\alpha_1<1$)

$\log b=n_2+\alpha_2$ (n_2는 정수, $0\le\alpha_2<1$)

라 하자.

조건(나)에서

$\log b-\log a\le f(a)-f(b)$

이므로

$(n_2+\alpha_2)-(n_1+\alpha_1)\le\alpha_1-\alpha_2$

$\therefore\ n_2-n_1\le2(\alpha_1-\alpha_2)$ ---㉠

한편, $0\le\alpha_1<1$, $0\le\alpha_2<1$이므로

$-1<\alpha_1-\alpha_2<1$,

$-2<2(\alpha_1-\alpha_2)<2$

한편, $a\le b$에서 $n_1\le n_2$이고 n_2-n_1은 정수이므로 ㉠에서

$n_2-n_1=0$ 또는 $n_2-n_1=1$

(ⅰ) $n_2-n_1=0$ 즉, $n_2=n_1$일 때,

㉠에서 $\alpha_1\ge\alpha_2$이고 $a\le b$이므로 $a=b$이어야 한다.

그러므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 20이다.

(ⅱ) $n_2-n_1=1$ 즉, $n_2=n_1+1$일 때,

$a\le b\le20$이므로

$n_1=0$이고 $n_2=1$

㉠에서

$1\le2(\alpha_1-\alpha_2)$

$\alpha_1-\alpha_2\ge\dfrac{1}{2}$

한편. $\log a=\alpha_1$, $\log b=1+\alpha_2$이므로

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \log a - (\log b - 1)$$
$$= \log \frac{10a}{b}$$
$$\geq \frac{1}{2}$$

$\therefore \ \frac{10a}{b} \geq \sqrt{10}$

양변을 제곱하여 정리하면

$10a^2 \geq b^2$

한편 $1 \leq a \leq 9$이고 $10 \leq b \leq 20$이므로 위의 조건을 만족하는 a의 값과 b의 값은 다음과 같다.

$a=4$일 때, $b=10, 11, 12$

$a=5$일 때, $b=10, 11, 12, 13, 14, 15$

$a=6$일 때,

$b=10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18$

$a=7$일 때,

$b=10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$

$a=8$일 때,

$b=10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$

$a=9$일 때,

$b=10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$

그러므로 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$3+6+9+11+11+11$

$=51$

따라서, (ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$20+51=71$

이다.

정답 71

1.
출제의도 : 지수와 로그의 계산을 할 수 있는가?

$$4^{-\frac{1}{2}} \times \log_3 9 = (2^2)^{-\frac{1}{2}} \times \log_3 3^2$$
$$= 2^{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} \times 2\log_3 3$$
$$= 2^{-1} \times 2$$
$$= 2^0$$
$$= 1$$

<답> ①

2.
출제의도 : 행렬의 뺄셈과 곱셈을 할 수 있는가?

$$A-B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

이므로

$$(A-B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $(A-B)^2$의 모든 성분의 합은

$2+2+2+2=8$

이다.

<답> ④

3.
출제의도 : r^n이 포함된 식의 극한값을 계산할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\times 5^n - 3^n}{5^{n+1}+2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{5+\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{2}{5}$$

<답> ④

4.
출제의도 : 정적분을 계산할 수 있는가?

$$\int_{-1}^{1} (x^3+3x^2+5)dx$$
$$= \int_{-1}^{1} x^3 dx + \int_{-1}^{1} (3x^2+5)dx$$
$$= 0 + 2\int_{0}^{1} (3x^2+5)dx$$
$$= 2\left[x^3+5x\right]_0^1$$
$$= 2(1+5)$$
$$= 12$$

<답> ②

5.
출제의도 : 독립인 두 사건의 확률을 계산할 수 있는가?

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B) = \frac{1}{4}$에서

$\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B) = \frac{1}{4}$ … ㉠

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

두 사건 A^c, B도 서로 독립이다.

따라서 $\mathrm{P}(A^c\cap B) = \frac{1}{6}$에서

$\mathrm{P}(A^c)\cdot\mathrm{P}(B) = \frac{1}{6}$

$\{1-\mathrm{P}(A)\}\cdot\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$ $\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\mathrm{P}(B)-\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$

이 값을 ㉠에 대입하면

$\mathrm{P}(A)\cdot\frac{5}{12}=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}\times\frac{12}{5}=\frac{3}{5}$

<답> ③

6.
출제의도 : 로그부등식을 풀 수 있는가?

$\log_{\sqrt{2}}|x|<5$

$\log_{\sqrt{2}}|x|<\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^5$

$\therefore\ 0<|x|<(\sqrt{2})^5$ $\cdots$ ㉠

$(\sqrt{2})^5=4\sqrt{2}$, $5<4\sqrt{2}<6$

이므로

부등식 ㉠을 만족시키는 정수 x는

-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5

의 10개이다.

<답> ③

7.
출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$\lim_{x\to 0}f(x)=3$, $\lim_{x\to 1+0}f(x)=1$

이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)+\lim_{x\to 1+0}f(x)=3+1=4$

<답> ②

8.
출제의도 : 연속확률변수의 성질과 확률을 구할 수 있는가?

X의 확률밀도함수를 $f(x)(0\le x\le 10)$라고 하자.

$\int_0^{10}f(x)dx=1$ 에서 $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot b=1$

$\therefore\ b=\frac{1}{5}$

또한 $\mathrm{P}(0\le X\le a)=\int_0^a f(x)dx=\frac{2}{5}$ 에서

$\frac{1}{2}\cdot a\cdot b=\frac{2}{5}$ $\cdots$ ㉠

$b=\frac{1}{5}$을 ㉠에 대입하면

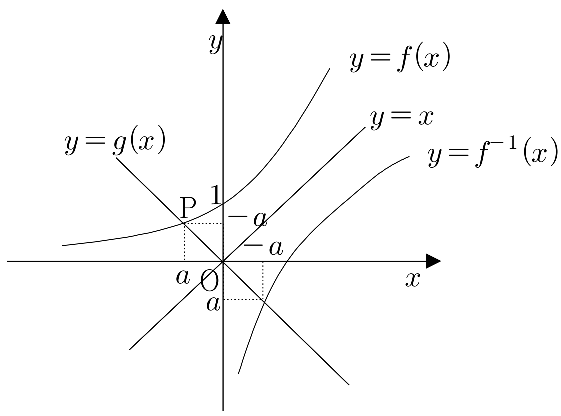
$\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

$\therefore\ a=4$

$\therefore\ a+b=4+\frac{1}{5}=\frac{21}{5}$

<답> ①

9.
출제의도 : 지수함수의 그래프를 이해할 수 있는가?



2014학년도 대수능 예비 시행 5월 모의평가 수학 A형 정답 및 해설

ㄱ. (거짓) P의 y좌표는 $-a$이고

그림에서 $0<-a<1$ 이다.

$\therefore\ -1<a<0$

ㄴ. (참) ⅰ) $0<t<-a$ 일 때

$$\begin{aligned}&|f(t)-g(t)|\\&=f(t)-g(t)\\&>f(t) && (\because g(t)<0)\\&>f(-t) && (\because -t<0)\\&>f(-t)-g(-t) && (\because g(-t)>0)\\&=|f(-t)-g(-t)| && (\because f(-t)>g(-t))\end{aligned}$$

ⅱ) $t\geq -a$ 일 때

$$\begin{aligned}&|f(t)-g(t)|\\&=f(t)-g(t)\\&>-g(t) && (\because f(t)>0)\\&=g(-t)\\&>g(-t)-f(-t) && (\because f(-t)>0)\\&=|f(-t)-g(-t)| && (\because g(-t)\geq f(-t))\end{aligned}$$

ㄷ. (참) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 좌표가 $(a,-a)$이므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 함수 $y=g^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 점의 좌표는 $(-a,a)$이다.

그런데 $g^{-1}(x)=g(x)$이므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 좌표는 $(-a,a)$이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ,ㄷ이다.

<답> ⑤

10.

출제의도 : 속도를 나타내는 함수를 정적분하여 움직인 거리를 구할 수 있는가?

$$\int_0^6|v(t)|dt=\int_0^4 v(t)dt+\int_4^6\{-v(t)\}dt$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times2\times(1+2)+\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times2\times1$$

$$=\frac{1}{2}+3+1+1$$

$$=\frac{11}{2}$$

<답> ⑤

11.

출제의도 : 연속함수의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$, $x=0$에서도 연속이다.

ⅰ) $x=0$에서 $f(x)$가 연속이므로

$f(0)=\lim\limits_{x\to-0}f(x)$. 즉,

$3\times0^2+2a\times0+b=\lim\limits_{x\to-0}(ax+1)\quad\therefore\ b=1$

ⅱ) $x=-1$에서 $f(x)$가 연속이고

$f(x+2)=f(x)$이므로

$$\lim_{x\to-1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}(3x^2+2ax+b)$$

이다.

그러므로 $f(-1)=\lim\limits_{x\to-1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to1-0}(3x^2+2ax+b)$

$-a+1=3+2a+b\quad\therefore\ a=-1$

따라서 $a+b=0$

<답> ③

12.

출제의도 : 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬과 변사이의 관계를 알고 있는가?

그래프의 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은 변의 개수의 2배와 같다.
변의 개수는 12이므로 연결 관계를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은 $2\times 12=24$

<답> ④

13.

출제의도 : 각 지점에 연결된 도로의 개수를 확률변수로 하는 확률분포에서의 기댓값을 구할 수 있는가?

각 꼭짓점에 연결된 변의 개수에 따라 꼭짓점을 분류하면

변의 개수	꼭짓점
2	A, D, G, H
3	E
4	B, C
5	F

X의 확률분포를 표로 나타내면

X	2	3	4	5	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

그러므로

$$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{4}{8}+3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{2}{8}+5\times\frac{1}{8}=\frac{24}{8}=3$$

따라서 $\mathrm{E}(3X+1)=3\mathrm{E}(X)+1=10$

<답> ③

14.

출제의도 : 모집단의 분포를 이용하여 표본평균의 확률을 구할 수 있는가?

어느 고등학교 학생들의 일주일 독서 시간을 확률변수 X라고 할 때 X는 평균이 7, 표준편차가 2인 정규분포를 따른다. 이 고등학교 학생 중 36명을 임의추출하여 만든 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(7,\frac{2^2}{36}\right)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(6+\frac{40}{60}\le\overline{X}\le 7+\frac{30}{60}\right)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{6+\frac{40}{60}-7}{\frac{1}{3}}\le\frac{\overline{X}-7}{\frac{1}{3}}\le\frac{7+\frac{30}{60}-7}{\frac{1}{3}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-1\le Z\le\frac{3}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.3413+0.4332=0.7745\end{aligned}$$

<답> ②

15.

출제의도 : 행렬의 거듭제곱을 간단하게 표현할 수 있고 수열의 규칙성을 발견할 수 있는가?

$$\begin{aligned}(A-E)^{n+1}&=a_nA^2-a_nA+(-1)^nA+(-1)^{n+1}E\\&=a_n(3A)-a_nA+(-1)^nA+(-1)^{n+1}E\\&=2a_nA+(-1)^nA+(-1)^{n+1}E\\&=\left\{2a_n+(-1)^n\right\}A+(-1)^{n+1}E\end{aligned}$$

그러므로 (가)$=(-1)^n$

$$a_n+a_{n+1}=2(a_{n-1}+a_n)$$

이고 $a_1+a_2=1+1=2$

이므로 수열 $\{a_n+a_{n+1}\}$은 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열이다. 즉,

$a_n + a_{n+1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

그러므로 (나)$=2^n$

따라서 $f(n)=(-1)^n$이고 $g(n)=2^n$이므로

$$f(9)\times g(5)=(-1)^9\times 2^5 = -32$$

<답> ①

16.

출제의도 : 무한등비급수의 규칙성을 찾고 그 극한값을 구할 수 있는가?

각 단계에서 만들어지는 도형의 넓이는 등비수열을 이루므로 공비와 첫째항을 구하여 무한등비급수의 합을 구할 수 있다.

R_1에서 두 반지름을 각각 지름으로 하는 두 반원을 그리고, 두 반원 안에 지름의 길이가 최대인 내접원을 그린 후, 두 내접원 안에 두  모양의 도형을 그리고 칠한 것이 R_2이다. 그러므로 R_2에서 만들어지는 내접원의 반지름은 R_1의 반지름의 $\frac{1}{4}$이다.

또 R_1에서는  모양의 도형이 하나이지만 R_2에서는 2개의 도형이므로 공비는 $2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$이다.

첫째항은 점 D가 선분 OC를 1:2로 내분하는 점이므로 $\overline{\mathrm{OD}} = \frac{1}{3}\times 3 = 1$

각 AOB를 이등분한 각이 COB이므로 $\angle\mathrm{COB} = \frac{\pi}{4}$

그러므로 첫째항은

$$2\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times 3\times \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{12\sqrt{2}}{7}$

<답> ②

17.

출제의도 : 역행렬과 행렬의 곱을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판정할 수 있는가?

ㄱ. (참) $(AB)^2=E$이므로 $ABAB=E$이다. 두 행렬 M, N에 대하여 $MN=NM=E$이면 $N^{-1}=M$이고 $M^{-1}=N$이므로 $A^{-1}=BAB$이고 $B^{-1}=ABA$이다.

ㄴ. (참) $A^2=A-E$에서

$E=A-A^2=A(E-A)$이다.

즉, $A^{-1}=E-A$

그러므로 $BAB=E-A=-(A-E)=-A^2$

ㄷ. (참)
$$\begin{aligned} B^2AB^2 &= B(BAB)B = B(E-A)B \\ &= B^2 - BAB = B^2 - (-A^2) \\ &= A^2 + B^2 \end{aligned}$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

<답> ⑤

18.

출제의도 : 수열의 규칙성을 찾을 수 있는가?

$a_2 = (-1)^1 a_1 + \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$a_3 = (-1)^2 a_2 + \sin\frac{2\pi}{2} = 1$

$a_4 = (-1)^3 a_3 + \sin\frac{3\pi}{2} = -2$

$a_5 = (-1)^4 a_4 + \sin\frac{4\pi}{2} = -2$

$a_6 = (-1)^5 a_5 + \sin\frac{5\pi}{2} = 3$

$a_7 = (-1)^6 a_6 + \sin\frac{6\pi}{2} = 3$

$a_8 = (-1)^7 a_7 + \sin\frac{7\pi}{2} = -4$

항과 함께 수열을 나열하면

a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	$\cdots$
1	1	-2	-2	3	3	-4	$\cdots$

따라서 $a_{50} = a_{2\times 25} = 25$

<답> ④

<참고>

i) $n=2k$일 때 $a_{2k+1} = a_{2k} + \sin\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = a_{2k}$

ii) $n=2k-1$일 때

$$a_{2k} = -a_{2k-1} + \sin\frac{(2k-1)\pi}{2}$$

그런데 $a_{2k+1} = a_{2k}$이므로

$$a_{2k+1} + a_{2k-1} = \sin\frac{(2k-1)\pi}{2}$$

그러므로

a_1	a_3	a_5	a_7	a_9	a_{11}	a_{13}	$\cdots$
0	1	-2	3	-4	5	-6	$\cdots$

19.

출제의도 : 직선의 방정식에 활용된 수열의 규칙성을 찾고 극한값을 구할 수 있는가?

점 A_n의 x좌표가 a_n이므로 $a_1 = 1$이고 A_n의 좌표는 $(a_n, 0)$이다.

(가)의 규칙에 의해서 B_n의 x좌표는 $a_n + n$이다.

(나)의 규칙에서 점 A_n을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y = 2(x - a_n)$$

이고, 점 B_n과 점 C_n을 지나는 직선의 방정식은 직선 $y = 2(x-a_n)$과 수직으로 만나고 있으므로 기울기가 $-\frac{1}{2}$이다.

즉, $y = -\frac{1}{2}(x - a_n - n)$

두 직선의 만나는 점의 x좌표를 구하면

$$2(x-a_n) = -\frac{1}{2}(x-a_n-n)$$

$$\frac{5}{2}x = \frac{5a_n + n}{2}$$

$$\therefore\ x = a_{n+1} = a_n + \frac{1}{5}n$$

그러므로 $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{5}k$

$= 1 + \frac{1}{5}\times\frac{(n-1)n}{2}$

$= \frac{n^2 - n + 10}{10}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+10}{10n^2} = \frac{1}{10}$

<답> ①

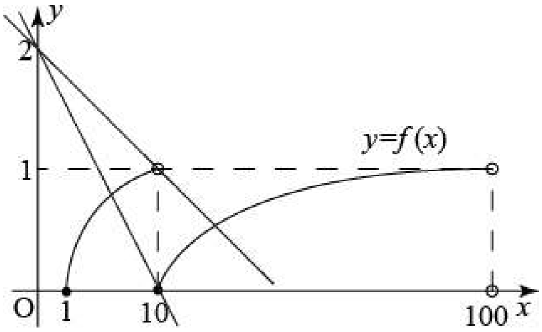
20.

출제의도 : 상용로그에서 가수의 의미를 알고 그래프를 그려서 일차함수와의 교점을 구할 수 있는가?

$y = 2 - \frac{x}{n}$의 그래프는 점 $(0, 2)$를 지나는 직선이고 함수 $y = f(x)$는 0이상 1미만의 값을 취하는 함수이므로

$$f(x) = \begin{cases} \log x & (1 \le x < 10) \\ \log x - 1 & (10 \le x < 100) \end{cases}$$

이다. 그러므로 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



두 그래프가 만나는 점의 개수가 2이므로

직선 $y=2-\dfrac{x}{n}$이 지나는 점을 이용하여 n의 값을 다음과 같이 구할 수 있다.

ⅰ) 점 $(10, 0)$을 지나는 경우

$0=2-\dfrac{10}{n}$에서 $n=5$

ⅱ) 점 $(10, 1)$을 지나는 경우

$1=2-\dfrac{10}{n}$에서 $n=10$

ⅰ), ⅱ)에 의해서 $5\le n<10$

따라서 자연수 n의 개수는 5

<답> ⑤

21.

출제의도 : 미분법을 활용하여 미분가능을 판정 할 수 있는가?

함수 $f(t)$를 구하면 다음과 같다.

$$f(t)=\begin{cases} t^2 & (0<t\le 1) \\ \dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{2} & (1<t\le 2) \\ 2t-\dfrac{3}{2} & (2<t\le 3) \\ 3t-\dfrac{9}{2} & (3<t<4) \end{cases}$$

열린 구간 $(0,\ 4)$에서 $t\ne 1,\ t\ne 2, t\ne 3$인 경우에 함수 $f(t)$는 미분가능하다.

$$f'(t)=\begin{cases} 2t & (0<t<1) \\ t & (1<t<2) \\ 2 & (2<t<3) \\ 3 & (3<t<4) \end{cases}$$

이므로

$t=1,\ t=2,\ t=3$에서 함수 $f(t)$가 미분가능한지 알아보자.

(i) $t=1$일 때

$\lim\limits_{x\to 1-0} f'(x)=2,\ \lim\limits_{x\to 1+0} f'(x)=1$ 이므로

$t=1$에서 함수 $f(t)$는 미분가능하지 않다.

(ii) $t=2$일 때

$\lim\limits_{x\to 2-0} f'(x)=2,\ \lim\limits_{x\to 2+0} f'(x)=2$ 이므로

$t=2$에서 함수 $f(t)$는 미분가능하다.

(iii) $t=3$일 때

$\lim\limits_{x\to 3-0} f'(x)=2,\ \lim\limits_{x\to 3+0} f'(x)=3$ 이므로

$t=3$에서 함수 $f(t)$는 미분가능하지 않다.

따라서 $t=1,\ t=3$에서 함수 $f(t)$는 미분가능하지 않으므로 구하는 t의 값의 합은

$1+3=4$

<답> ③

22.

출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^2+9x-22}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+11)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2}(x+11) \\ &= 2+11 \\ &= 13\end{aligned}$$

<답> 13

23.
출제의도: 등차수열의 합을 이용하여 항의 개수를 구할 수 있는가?

첫째항이 -6, 공차가 2인 등차수열이고 첫째항부터 제n항까지의 합이 30이므로

$$\frac{n\{2\cdot(-6)+(n-1)\cdot 2\}}{2}=30$$
$$n^2-7n-30=0$$
$$(n-10)(n+3)=0$$
$$\therefore n=10(\because n>0)$$

<답> 10

24.
출제의도: 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 수열의 항을 구할 수 있는가?

$$a_1=S_1=2^0+5=6$$
$$a_5=S_5-S_4=(2^4+5)-(2^3+5)=8$$
$$\therefore\quad a_1+a_5=6+8=14$$

<답> 14

25.
출제의도 : 미분법을 활용하여 다항함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)=x^3-9x^2+24x+5$에서

$$f'(x)=3x^2-18x+24$$
$$=3(x-2)(x-4)=0$$

그러므로 $x=2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

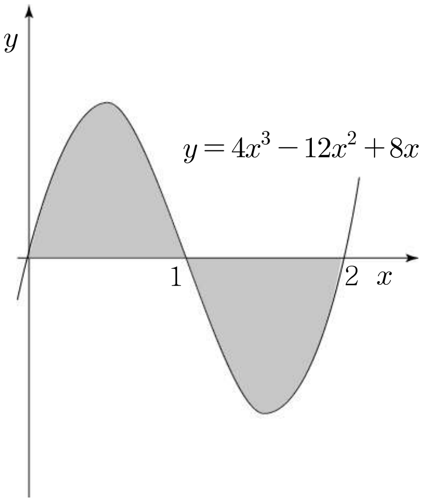
함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이므로
구하는 극댓값은

$f(2)=25$

<답> 25

26.
출제의도 : 정적분을 활용하여 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

$y=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$이므로
함수 $y=4x^3-12x^2+8x$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 |4x^3-12x^2+8x|dx$$
$$=\int_0^1(4x^3-12x^2+8x)dx+\int_1^2(-4x^3+12x^2-8x)dx$$
$$=\Big[\ x^4-4x^3+4x^2\Big]_0^1+\Big[\ -x^4+4x^3-4x^2\Big]_1^2$$
$$=1+1$$
$$=2$$

<답> 2

27.
출제의도 : 중복조합을 이용하여 다항식의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구할 수 있는가?

$(a+b+c)^4$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 세 문자 a, b, c에서 중복을 허용하여 네 문자를 선택하는 방법의 수와 같으므로 이 경우의 서로 다른 항의 개수는

$${}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 15(\text{가지})$$

$(x+y)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 두 문자 x, y에서 중복을 허용하여 세 문자를 선택하는 방법의 수와 같으므로 이 경우의 서로 다른 항의 개수는

$${}_{2+3-1}C_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4(\text{가지})$$

따라서 주어진 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 $15\times 4 = 60$(가지)

<답> 60

28.
출제의도 : 로그의 성질을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가?

신호잡음전력비가 a일 때 신호의 최대 전송 속도를 C_a, 신호잡음전력비가 $33a$일 때 신호의 최대 전송 속도를 C_{33a}라 하자.

$C_a = B\times\log_2(1+a)$

$C_{33a} = B\times\log_2(1+33a)$

이때 $C_{33a} = 2C_a$이므로

$B\times\log_2(1+33a) = 2B\times\log_2(1+a)$

$1+33a = (1+a)^2$

$a^2 - 31a = 0$

$\therefore\ a = 31\quad (\because\ a>0)$

<답>31

29.
출제의도 : 조건부확률을 구할 수 있는가?

주사위를 던져 얻은 점수가 5점 이상인 사건을 A, 주사위를 한 번만 던져 얻은 점수가 5점 이상인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{5}{9}$

$\mathrm{P}(A\cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{5}$$

$\therefore p=5,\ q=3$

$\therefore p^2+q^2 = 25+9 = 34$

<답>34

30
출제의도 : 미분법과 접선의 방정식을 활용할 수 있는가?

직선 AB와 삼차함수 $y=x^3-5x$가 접하는 점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 직선 AB의 기울기가 1이므로 $y'_{x=x_1}=1$이다.

$y' = 3x^2-5$이므로

$y'_{x=x_1} = 3x_1^2 - 5 = 1$

$\therefore x_1 = -\sqrt{2}\ (\because x_1<0)$

$y_1 = -2\sqrt{2}+5\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

이때, 직선 AB의 방정식은

$y-3\sqrt{2} = x-(-\sqrt{2})$

$\therefore y = x+4\sqrt{2}$

두 점 A, B의 좌표가

$\mathrm{A}(0,\ 4\sqrt{2}),\ \mathrm{B}(-4\sqrt{2},\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2} = 8$

따라서 구하는 정사각형 ABCD의 둘레의 길이는 $4\overline{\mathrm{AB}}=4\times 8=32$

<답> 32

2014 4월 고3 전국연합학력평가
및 해설

• 2 수학 영역 •

[A]

1	⑤	**2**	④	**3**	②	**4**	③	**5**	①
6	①	**7**	②	**8**	④	**9**	③	**10**	②
11	②	**12**	⑤	**13**	④	**14**	①	**15**	④
16	③	**17**	⑤	**18**	⑤	**19**	①	**20**	③
21	⑤	**22**	18	**23**	27	**24**	14	**25**	9
26	17	**27**	505	**28**	64	**29**	553	**30**	79

1. [ ] 지수법칙을 활용하여 계산하기

$$^{1}\times 4^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}=2^2=4$$

2. [출제의도] 행렬의 실수배와 뺄셈 계산하기

$$2\quad -B=2\ \begin{matrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{matrix}\Big)-\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 6 & 6\end{pmatrix}$$

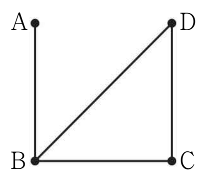
행렬 $2A-B$의 모든 성분의 합은 8

3. [출제의도] 무한수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}$$

4. [출제의도] 행렬과 그래프의 관계 이해하기

그림과 같이 주어진 그래프의 꼭짓점을 A, B, C, D라 할 때, 이를 행렬로 나타내면 다음과 같다.



$$\begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D\\ \hline A & 0 & 1 & 0 & 0\\ B & 1 & 0 & 1 & 1\\ C & 0 & 1 & 0 & 1\\ D & 0 & 1 & 1 & 0\end{array}$$

따라서 행렬의 성분 중 1의 개수는 8

[다른 풀이]

그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는 그래프의 변의 개수의 2배이므로 8

5. [출제의도] 행렬의 연산 이해하기

$$X=\ \ A^{-1})^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

6. [출제의도] 로그부등식 이해하기

로그의 진수는 양수이므로 $x+1>0$, $x-5>0$

$\therefore\ x>5$ ……㉠

$\log_3(x+1)(x-5)<\log_3 27$

$(x+1)(x-5)<27$

$x^2-4x-32<0$

$(x+4)(x-8)<0$

$\therefore\ -4<x<8$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $5<x<8$

$5<x<8$을 만족시키는 정수 x는 6, 7

따라서 정수 x의 개수는 2

7. [출제의도] 등비수열의 일반항 이해하기

등비수열 $\ a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1a_3=\frac{1}{36}$에서 $a^2r^2=\frac{1}{6^2}$이므로

$ar=\frac{1}{6}$ ($\because\ ar>0$) ……㉠

$a_5=\frac{4}{81}$에서 $ar^4=\frac{4}{81}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $r=\frac{2}{3}$, $a=\frac{1}{4}$

따라서 $a_4=ar^3=\frac{2}{27}$

8. [출제의도] 지수방정식 이해하기

$3^x=t\,(t>0)$라 하면 주어진 방정식은

$t^2-11t+28=0$

$(t-4)(t-7)=0$

$t=4$ 또는 $t=7$

$3^\alpha=4$, $3^\beta=7$이라 하면

$9^\alpha+9^\beta=(3^\alpha)^2+(3^\beta)^2=16+49=65$

따라서 $9^\alpha+9^\beta=65$

9. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

$2a_1=a_2+3$ ……㉠

$a_{n+1}=a_n+3n$에서 $a_2=a_1+3$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a_1=6$

따라서

$$a_{10}=a_1+\ \ ^{9}_{n=1}\ 3n=6+\frac{3\times9\times10}{2}=141$$

10. [출제의도] 무한급수와 일반항 사이의 관계 이해하기

$\sum_{n=1}^{\infty}\ \ 2-\frac{a_n}{9^n}\Big)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{a_n}{9^n}\right)=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{9^n}=2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{9^n}{2a_n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\times\frac{a_n}{9^n}+\frac{1}{9^n}}=\frac{1}{4}$

11. [출제의도] 로그를 활용하여 문제해결하기

처음 물의 높이가 64 cm일 때, 실험을 시작한 지 40분 후의 물의 높이가 16 cm이므로

$k=\frac{C}{40}(\log 64-\log 16)=\frac{C}{20}\log 2$

실험을 시작한 지 x분 후의 물의 높이가 2 cm이므로

$\frac{C}{20}\log 2=\frac{C}{x}(\log 64-\log 2)=\frac{C}{x}\times 5\log 2$

따라서 $x=20\times 5=100$

12. [출제의도] 함수의 우극한과 좌극한 이해하기

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $\lim_{x\to1+0}f(x)=1$

$1-x=t$라 하면 $x\to1+0$일 때, $t\to-0$이므로

$\lim_{x\to1+0}f(1-x)=\lim_{t\to-0}f(t)=2$

따라서 $\lim_{x\to1+0}f(x)f(1-x)=1\times2=2$

13. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제해결하기

$\mathrm{OP}=1$, $\mathrm{OR}=1+r$, $\overline{\mathrm{QR}}=2+r$

$\overline{\mathrm{OP}}$, $\overline{\mathrm{OR}}$, $\overline{\mathrm{QR}}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(1+r)^2=1\times(2+r)$

$r^2+r-1=0$

따라서 $r=\frac{-1+\ \ 5}{2}$ ($\because\ 0<r<\sqrt{2}$)

14. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$x^2+y^2=1$ ……㉠

$(x-1)^2+y^2=r^2$ ……

㉠, ㉡에서 $x=\frac{1}{2}(2-r^2)$이므로

$f(r)=\frac{1}{2}(2-r^2)$

따라서 $\lim_{r\to\ \ 2-0}\frac{f(r)}{4-r^4}=\lim_{r\to\sqrt{2}-0}\frac{2-r^2}{2(4-r^4)}$

$=\lim_{r\to\sqrt{2}-0}\frac{1}{2(2+r^2)}=\frac{1}{8}$

15. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_c b=\frac{1}{2}\log_a b$이므로 $\log_b c=2\log_b a$

$\therefore\ c=a^2$

$\log_b c=\frac{1}{3}\log_a c$이므로 $\log_c b=3\log_c a$

$\therefore\ b=a^3$

a, b, c는 1보다 크고 10보다 작은 자연수이므로

$a=2$, $b=8$, $c=4$

따라서 $a+2b+3c=30$

16. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

주어진 식의 양변에 $\ \ \frac{n}{n+1}\Big)^2$을 곱하면

$\frac{2n+1}{n^4}\ \times\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ 이므로

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^2a_{n+1}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2a_n+\boxed{\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}}$

이다. $b_n=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2a_n$이라 하면, $b_1=0$이고

$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{2n+1}{(n+1)^2-n^2}\ \ \frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\Big\}$

$=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$이므로

$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{n^2}-\boxed{\frac{1}{(n+1)^2}}$ $(n\geq1)$

이다. 수열 $\ \ b_n\}$의 일반항을 구하면

$b_n=b_1+\ \ ^{n-1}_{k=1}\left\{\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$

$=0+\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\cdots$

$+\left\{\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}\right\}$

$=1-\frac{1}{n^2}$ $(n\geq2)$이고, $b_1=0$이므로

$b_n=\boxed{\frac{n^2-1}{n^2}}$ $(n\geq1)$

이다. 그러므로

$$a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ \boxed{\frac{n^2-1}{n^2}}\times\left(\frac{n}{n-1}\right)^2 & (n\geq2)\end{cases}$$

이다.

$\therefore\ f(n)=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, $g(n)=\frac{1}{(n+1)^2}$

$h(n)=\frac{n^2-1}{n^2}$

따라서 $\frac{f(1)\times h(4)}{g(7)}=\frac{\frac{3}{4}\times\frac{15}{16}}{\frac{1}{64}}=45$

17. [ ] 함수의 연속의 뜻 이해하기

i) $x| < 1$ 때, $\lim\limits_{\to\infty} x^{2n} = 0$이므로

$f(x) = ax^2 + bx - 2$

ii) $|x| > 1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0$이므로

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx - 2}{x^{2n} + 1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x + \frac{ax^2}{x^{2n}} + \frac{bx}{x^{2n}} - \frac{2}{x^{2n}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = x$$

iii) $x = 1$일 때, $f(1) = \frac{a+b-1}{2}$

iv) $x = -1$일 때, $f(-1) = \frac{a-b-3}{2}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$x = -1$, $x = 1$에서 연속이다.

① $x = -1$에서 연속이므로

$a - b - 2 = -1 = \frac{a-b-3}{2}$

$\therefore\ a - b = 1$ ……㉠

② $x = 1$에서 연속이므로

$a + b - 2 = 1 = \frac{a+b-1}{2}$

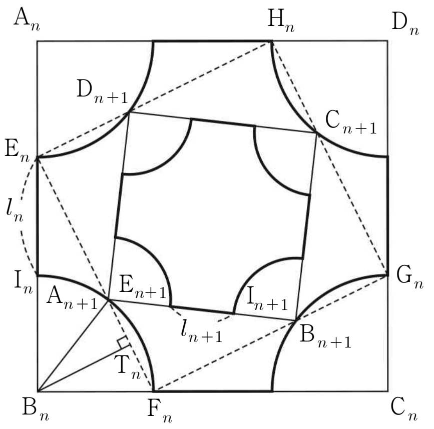
$\therefore\ a + b = 3$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a = 2$, $b = 1$

따라서 $ab = 2$

18. [출제의도] 무한급수를 활용하여 추론하기

그림과 같이 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$에서 점 B_n을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n$을 반지름으로 하는 사분원이 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$과 만나는 점을 I_n이라 하고, $\mathrm{E}_n\mathrm{I}_n = l_n$이라 하자.



$\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n = l_n$, $\overline{\mathrm{E}_n\mathrm{B}_n} = 2l_n$이므로 $\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n = \ 5\, l_n$

점 B_n에서 선분 $\mathrm{F}_n\mathrm{A}_{n+1}$에 내린 수선의 발을 T_n이라 하자.

$\triangle\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n\mathrm{T}_n \backsim \triangle\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n\mathrm{B}_n$이므로

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n} : \overline{\mathrm{F}_n\mathrm{T}_n} = \overline{\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n} : \overline{\mathrm{F}_n\mathrm{B}_n}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{F}_n\mathrm{T}_n} = \frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n})^2}{\overline{\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\, l_n$

$\triangle\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n\mathrm{A}_{n+1}$이 이등변삼각형이므로

$\mathrm{F}_n\mathrm{A}_{n+1} = 2\overline{\mathrm{F}_n\mathrm{T}_n} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\, l_n$

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{E}_n} = \overline{\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n} - \overline{\mathrm{F}_n\mathrm{A}_{n+1}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}\, l_n$

$\triangle\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{E}_n\mathrm{D}_{n+1} \equiv \triangle\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{F}_n\mathrm{A}_{n+1}$이므로

$\overline{\mathrm{F}_n\mathrm{B}_{n+1}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}\, l_n$

$\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1} = \frac{\sqrt{65}}{5}\, l_n$

$l_{n+1} = \frac{1}{3}\,\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}} = \frac{\sqrt{65}}{15}\, l_n$이므로

${}_{n+1} = \frac{13}{45} S_n$

그러므로 수열 $S_n\}$은 $S_1 = 9 - \pi$이고, 공비가 $\frac{13}{45}$인 등비수열이다.

따라서 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{9-\pi}{1-\frac{13}{45}} = \frac{45}{32}(9-\pi)$

19. [출제의도] 여러 가지 수열을 활용하여 문제해결하기

함수 $y = \log_2 x$는 함수 $y = 2^x$의 역함수이므로
점 Q_n의 좌표는 $2^n, n)$
직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 방정식은 $x + y - 2^n - n = 0$이고,
원점 O와 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ 사이의 거리는 $\frac{2^n + n}{\sqrt{2}}$,
선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이는 $\sqrt{2}\,(2^n - n)$ ($\because\ 2^n > n$)

$\therefore\ S_n = \frac{1}{2} \times \frac{2^n + n}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}\,(2^n - n)$

$= \frac{4^n - n^2}{2}$

따라서 $2\sum\limits_{n=1}^{5} S_n = \sum\limits_{n=1}^{5} (4^n - n^2)$

$= \frac{4(4^5 - 1)}{4-1} - \frac{5\times6\times11}{6}$

$= 1309$

20. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제해결하기

함수 $y = |x^2 - 9|$의 그래프는 y축 대칭이므로
$a_2 = -a_3$
이 등차수열의 공차는 $a_3 - a_2 = 2a_3$이므로
$a_4 = a_3 + 2a_3 = 3a_3$
점 (a_3, k)는 곡선 $y = -x^2 + 9$ 위의 점이므로
$-{a_3}^2 + 9 = k$ ……㉠
점 (a_4, k)는 곡선 $y = x^2 - 9$ 위의 점이므로
${a_4}^2 - 9 = 9{a_3}^2 - 9 = k$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $10k = 72$
따라서 $k = \frac{36}{5}$

21. [출제의도] 행렬의 연산을 활용하여 추론하기

ㄱ. $(B + A + E)B = E$이므로
$B(B + A + E) = E$이고
$(B + A + E)B = B(B + A + E)$
$B^2 + AB + B = B^2 + BA + B$
$\therefore\ AB = BA$ (참)

ㄴ. $A^2 + 2A + E = E$, $(A + E)^2 = E$
$\therefore\ (A + E)^{-1} = A + E$ (참)

ㄷ. $B^2 + AB + B = E$
$B^2 + (A + E)B = E$
$B^2 + (A + E)B - 2E = -E$
$B^2 + (A + E)B - 2(A + E)^2 = -E$
$\{B - (A + E)\}\{B + 2(A + E)\} = -E$
$(B - A - E)(-B - 2A - 2E) = E$
$\therefore\ B - A - E$의 역행렬이 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계 이해하기

$a_3 = S_3 - S_2 = (3^3 - 1) - (3^2 - 1) = 18$

23. [출제의도] 연립일차방정식과 행렬 이해하기

$\begin{pmatrix} a-5 & 4 \\ 2 & a-7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 $x = 0$, $y = 0$ 이외의 해를 가지려면 행렬 $\begin{pmatrix} a-5 & 4 \\ 2 & a-7 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로 $(a-5)(a-7) - 8 = 0$
$(a-3)(a-9) = 0$
$\therefore\ a = 3$ 또는 $a = 9$
따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 27

24. [출제의도] 함수의 극한의 성질 이해하기

$\lim\limits_{x\to-2}(x+2) = 0$이고 $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x+2}{\sqrt{x+a} - b} = 6$
이므로 $\lim\limits_{x\to-2} \sqrt{x+a} - b) = 0$
$\therefore\ b = \sqrt{a-2}$

$\lim\limits_{x\to-2} \frac{x+2}{\sqrt{x+a} - b}$

$= \lim\limits_{x\to-2} \frac{x+2}{\sqrt{x+a} - \sqrt{a-2}}$

$= \lim\limits_{x\to-2} \frac{(x+2)(\sqrt{x+a} + \sqrt{a-2})}{x+2}$

$= \lim\limits_{x\to-2} (\sqrt{x+a} + \sqrt{a-2}) = 2\sqrt{a-2} = 6$

$\therefore\ a = 11$, $b = 3$
따라서 $a + b = 14$

25. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$3^{a-1} = 2$에서 $3^a = 6$
$5 = 6^{2b} = (3^a)^{2b} = 3^{2ab}$
따라서 $5^{\frac{1}{ab}} = (3^{2ab})^{\frac{1}{ab}} = 3^2 = 9$
[다른 풀이]
$3^{a-1} = 2$에서 $3^a = 6$이므로 $a = \log_3 6$
$6^{2b} = 5$이므로 $b = \frac{1}{2}\log_6 5$
$ab = \frac{1}{2}\log_3 6 \times \log_6 5 = \frac{1}{2}\log_3 5$
따라서 $5^{\frac{1}{ab}} = 5^{2\log\ 3} = 9$

26. [출제의도] 지수부등식을 활용하여 추론하기

주어진 부등식의 양변에 $3^{-2} \times 3^p$을 곱하면
$(3^x - 3^{-2})(3^x - 3^p) \le 0$
p가 자연수이므로 $3^{-2} \le 3^x \le 3^p$
$\therefore\ -2 \le x \le p$
$-2 \le x \le p$를 만족시키는 정수 x는
$-2, -1, 0, 1, \cdots, p$
이때, 정수 x의 개수는 $p + 3 = 20$
따라서 $p = 17$

27. [출제의도] 여러 가지 수열을 활용하여 문제해결하기

곡선 $y = \frac{6^n}{x}$ 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수는 6^n의 양의 약수의 개수와 같다.
$6^n = 2^n \times 3^n$이므로 $a_n = (n+1)^2$

따라서 $\sum\limits_{n=1}^{10} a_n = \sum\limits_{n=1}^{10} (n+1)^2$

$= \sum\limits_{n=1}^{10} (n^2 + 2n + 1)$

$= \frac{10\times11\times21}{6} + 2\times\frac{10\times11}{2} + 10$

$= 505$

28. [ ] 무한수열의 극한을 활용하여 문제해결하기

$\mathrm{P}\ \mathrm{OQ}_n$에서

$\mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n = \dfrac{\pi}{3}$이고 $\mathrm{OP}_n = n+2$이므로

$\mathrm{OQ}_n = \dfrac{1}{2}(n+2)$, $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n = \dfrac{\ 3}{2}(n+2)$

$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OQ}_n} \times \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = \dfrac{\sqrt{3}(n+2)^2}{8}$

$_n$은 $\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n$의 넓이에서 원 C_n의 넓이의 $\dfrac{1}{6}$을 빼면 된다.

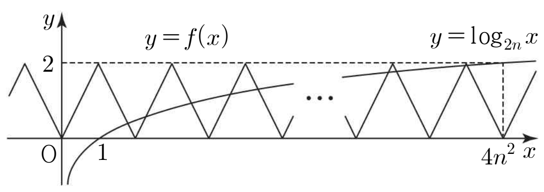
$\therefore\ S_n = \dfrac{\sqrt{3}(n+2)^2}{8} - \dfrac{n\pi}{6}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\dfrac{\sqrt{3}(n+2)^2}{8} - \dfrac{n\pi}{6}} = \dfrac{8}{\sqrt{3}} = a$

따라서 $3a^2 = 64$

29. [출제의도] 여러 가지 수열을 활용하여 문제해결하기

그림과 같이 곡선 $y = \log_{2n}x$는 점 $4n^2, 2)$를 지난다.



그러므로 자연수 k에 대하여 닫힌 구간 $[k, k+1]$에서 곡선 $y = \log_{2n}x$와 함수 $y = f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 1이다. (단, $1 \le k \le 4n^2 - 1$)

$\therefore\ a_n = 4n^2 - 1$

따라서 $\overset{7}{\underset{n=1}{\ }} a_n = \sum_{n=1}^{7}(4n^2-1)$

$= 4 \times \dfrac{7 \times 8 \times 15}{6} - 7 = 553$

30. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질 이해하기

(가)에서 $f(a) + g(b) = 2 + \dfrac{1}{4}$이므로

$f(a) = 2$, $g(b) = \dfrac{1}{4}$

(나)에서 $g(b) = \dfrac{1}{4}$이므로 $g(a) \neq 0$

이때 $g\ \dfrac{1}{a}\Big) = 1 - g(a)$이므로

$g(a) = 1 - g(a) + \dfrac{1}{4}$, 즉 $g(a) = \dfrac{5}{8}$

$\log a = f(a) + g(a) = 2 + \dfrac{5}{8} = \dfrac{21}{8}$

$\therefore\ a = 10^{\frac{21}{8}}$

(다)에서 $g(b) \neq 0$이므로 $f\left(\dfrac{1}{b}\right) = -1 - f(b)$,

$a^5 = 10^{\frac{105}{8}} = 10^{13+\frac{1}{8}}$에서 $f(a^5) = 13$이므로

$f(b) = -1 - f(b) + 13$, 즉 $f(b) = 6$

$\log b = f(b) + g(b) = 6 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{4}$

$\therefore\ b = 10^{\frac{25}{4}}$

$\therefore\ ab = 10^{\frac{21}{8}+\frac{25}{4}} = 10^{\frac{71}{8}}$

따라서 $m + n = 79$

2014학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 A형 정답

1	③	2	①	3	①	4	②	5	①
6	⑤	7	②	8	④	9	④	10	⑤
11	④	12	②	13	⑤	14	③	15	②
16	①	17	④	18	③	19	⑤	20	③
21	③	22	12	23	24	24	4	25	11
26	160	27	6	28	70	29	20	30	25

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 식의 값을 계산한다.

$16^{\frac{3}{4}}\times 2^{-3}$

$=(2^4)^{\frac{3}{4}}\times 2^{-3}$

$=2^3\times 2^{-3}$

$=8\times\frac{1}{8}$

$=1$

2. [출제의도] 행렬의 연산을 이해하고 행렬의 뺄셈을 계산한다.

$A-B$

$=\begin{pmatrix}2&-1\\3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&1\\1&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4&-2\\2&2\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A-B$의 모든 성분의 합은 6이다.

3. [출제의도] 극한의 성질을 이용하여 극한값을 계산한다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n-3)}{4n^2+5}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-4n-3}{4n^2+5}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4-\frac{4}{n}-\frac{3}{n^2}}{4+\frac{5}{n^2}}$

$=\frac{4}{4}$

$=1$

4. [출제의도] 등차수열의 성질을 이해한다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=10$에서 $a+2d=10$ ⋯ ㉠

$a_4-a_2=4$에서

$(a+3d)-(a+d)=4$ $\quad\therefore\ d=2$

㉠에 대입하면 $a=6$이다.

$\therefore\ a_8=a+7d=6+7\times 2=20$

5. [출제의도] 지수함수의 성질을 이용하여 지수방정식의 해를 구한다.

$9^x=27^{2x-4}$에서

$3^{2x}=3^{3(2x-4)}$

지수함수는 일대일함수이므로

$2x=3(2x-4)$

$\therefore\ x=3$

6. [출제의도] 등비중항의 성질을 이해한다.

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n=a\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad(n\geq 1)$

세 수 a_3, 2, a_7이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$2^2=a_3\times a_7=a\left(\frac{1}{2}\right)^2\times a\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{a^2}{2^8}$

$a^2=2^{10}$

$\therefore\ a=32\ (\because\ a>0)$

7. [출제의도] 그래프의 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성질을 이해한다.

행렬 M^2의 (i,i)성분은 i번째 꼭짓점에 연결된 변의 개수와 같으므로

$a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}=2+2+3+3=10$

[다른 풀이]

행렬 M과 M^2을 구하면

$M=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix},\ M^2=\begin{pmatrix}2&2&1&1\\2&2&1&1\\1&1&3&2\\1&1&2&3\end{pmatrix}$

이므로

$a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}=2+2+3+3=10$

8. [출제의도] 연립일차방정식의 해가 무수히 많을 조건과 역행렬의 성질을 이해한다.

주어진 연립방정식을 정리하면

$\begin{cases}3x-3y=kx\\3x+5y=-ky\end{cases}$

$\begin{cases}(3-k)x-3y=0\\3x+(5+k)y=0\end{cases}$

이다. 이를 다시 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix}3-k&-3\\3&5+k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

이므로 $x=0$, $y=0$이외의 해를 갖기 위해서는 행렬 $\begin{pmatrix}3-k&-3\\3&5+k\end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않아야 한다.

$(3-k)(5+k)-(-9)=0$

$k^2+2k-24=0$

$(k-4)(k+6)=0$

$\therefore\ k=-6$ 또는 $k=4$

따라서 구하는 양수 k의 값은 4이다.

9. [출제의도] 등비수열의 일반항을 구하고 무한등비급수의 합을 구한다.

$a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{7}{2}a_n\ (n\geq 1)$에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{7}{2}$인 등비수열이므로

$a_n=\left(\frac{7}{2}\right)^{n-1}\quad(n\geq 1)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10}{a_n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}10\times\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}$

$=\frac{10}{1-\frac{2}{7}}$

$=14$

10. [출제의도] 지수함수의 성질을 이해하여 문제를 해결한다.

곡선 $y=f(x)$와 $y=h(x)$는 y축 대칭이므로 $h(2)=f(-2)$에서 점 R의 x좌표는 2, 점 P의 x좌표는 -2이다. 점 Q의 x좌표를 α라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QR}}=2:1$에서 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{QR}}$이므로

$\alpha+2=2(2-\alpha)$

$\therefore\ \alpha=\frac{2}{3}$

$g(\alpha)=2$에서 $b^{\frac{2}{3}}=2$

$\therefore\ b=2^{\frac{3}{2}}$

$g(4)=b^4=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^4=2^6=64$

[다른 풀이]

세 점 P, Q, R의 y좌표는 모두 2이므로 세 점 P, Q, R의 x좌표는 각각 $-\log_a 2$, $\log_b 2$, $\log_a 2$이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QR}}=2:1$에서 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{QR}}$이므로

$\log_b 2-(-\log_a 2)=2(\log_a 2-\log_b 2)$

양변을 밑이 2인 로그로 변환하면

$\frac{1}{\log_2 a}=\frac{3}{\log_2 b}$

$\log_2 b=3\log_2 a=\log_2 a^3$

$\therefore\ b=a^3$

$h(2)=2$에서 $a^2=2$

$\therefore\ a=\sqrt{2}\ (\because\ a>1)$

$\therefore\ b=a^3=(\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}$

따라서 $g(x)=(2\sqrt{2})^x$이다.

$\therefore\ g(4)=(2\sqrt{2})^4=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^4=2^6=64$

11. [출제의도] 지수부등식의 해를 구한다.

$4^{f(x)}-2^{1+f(x)}<8$에서

$2^{2f(x)}-2\times 2^{f(x)}-8<0$

$(2^{f(x)}+2)(2^{f(x)}-4)<0$

$-2<2^{f(x)}<4$

$2^{f(x)}>0$이므로 $0<2^{f(x)}<2^2$

$\therefore\ f(x)<2$

$x^2-x-4<2$에서

$(x+2)(x-3)<0$

$\therefore\ -2<x<3$

부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 4이다.

12. [출제의도] 경우의 수를 이용하여 수열의 일반항을 구하고 수열의 극한값을 구한다.

$2n$장의 카드에서 세 장의 카드를 동시에 뽑을 때, 세 장의 카드에 적힌 수의 합이 짝수인 경우는 세 수 모두 짝수인 경우와 세 수 중 두 수는 홀수이고 나머지 한 수는 짝수인 경우가 있다.

ⅰ) 세 수가 모두 짝수인 경우의 수는 짝수 n개 중 3개를 택하는 경우의 수이므로

$_n\mathrm{C}_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

ⅱ) 세 수 중 두 수는 홀수이고 나머지 한 수는 짝수인 경우의 수는 홀수 n개 중 2개를 택하고 짝수 n개 중 한 개를 택하는 경우의 수이므로

$_n\mathrm{C}_2\times {_n\mathrm{C}_1}=\frac{n(n-1)}{2!}\times n=\frac{n^2(n-1)}{2}$

ⅰ), ⅱ)에서

$a_n=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\frac{n^2(n-1)}{2}$

$=\frac{n(n-1)(n-2+3n)}{6}$

$=\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(2n-1)}{3n^3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{3}$

$=\frac{2}{3}$

13. [출제의도] 행렬의 거듭제곱과 역행렬의 성질을 이해한다.

직선 l_5의 x절편과 y절편이 각각 $3\left(\frac{3}{4}\right)^5$, $4\left(\frac{3}{4}\right)^5$이므로

$P=\begin{pmatrix}3\left(\frac{3}{4}\right)^5&0\\0&4\left(\frac{3}{4}\right)^5\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&0\\0&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$에서

$A^5=\begin{pmatrix}\left(\frac{3}{4}\right)^5 & 0\\ 0 & \left(\frac{3}{4}\right)^5\end{pmatrix}$이고 $(A^5)^{-1}=\begin{pmatrix}\left(\frac{4}{3}\right)^5 & 0\\ 0 & \left(\frac{4}{3}\right)^5\end{pmatrix}$

$P=A^5B$에서

$B=(A^5)^{-1}P=\begin{pmatrix}\left(\frac{4}{3}\right)^5 & 0\\ 0 & \left(\frac{4}{3}\right)^5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\left(\frac{3}{4}\right)^5 & 0\\ 0 & 4\left(\frac{3}{4}\right)^5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&4\end{pmatrix}$

따라서 행렬 B의 모든 성분의 합은 7이다.

14. [출제의도] 상용로그의 성질을 이용하여 부등식의 해를 구한다.

직선 l_n이 점 $\left(3\left(\frac{3}{4}\right)^n, 0\right)$과 $\left(0, 4\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$을 지나므로

직선 l_n과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\left(\frac{3}{4}\right)^n\times4\left(\frac{3}{4}\right)^n=6\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$

이고 이 넓이가 $\frac{1}{10}$ 이하가 되어야 하므로

$6\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}\le\frac{1}{10}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log6+2n(\log3-2\log2)\le-1$

$n\ge\frac{1+\log2+\log3}{2(2\log2-\log3)}$

$n\ge\frac{1+0.30+0.48}{2(0.60-0.48)}$

$n\ge\frac{1.78}{0.24}=7.4\times\times$

따라서 자연수 n의 최솟값은 8이다.

15. [출제의도] 등차수열의 합의 성질을 이용하여 수열의 항을 추론한다.

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 30이고 공차가 $-d$인 등차수열이므로

$a_n=30-(n-1)d$ ($n\ge1$)

이때

$a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{m+k}$

$=\frac{(k+1)\{30-(m-1)d+30-(m+k-1)d\}}{2}$

$=\frac{(k+1)\{60-(2m+k-2)d\}}{2}=0$

$k+1>0$이므로

$(2m+k-2)d=60$

$2m+k=2+\frac{60}{d}$

이를 만족하는 자연수 m, k이 존재하기 위해서는 d가 60의 약수이어야 한다.

$60=2^2\times3\times5$이므로 d의 개수는 $3\times2\times2=12$

[다른 풀이]

등차수열의 연속된 $(k+1)$개의 항의 합이 0이기 위한 수열의 조건은 다음과 같다.

ⅰ) $k+1$이 홀수일 때

$\cdots, d, 0, -d, \cdots$

이때 d는 30의 양의 약수가 되어야 하므로

$d=1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$

ⅱ) $k+1$이 짝수일 때

$\cdots, \frac{d}{2}, -\frac{d}{2}, \cdots$

이때 $30-(n-1)d=\frac{d}{2}$에서

$n=\frac{1}{2}+\frac{30}{d}$

n은 자연수이므로

$d=4, 12, 20, 60$

ⅰ), ⅱ)에서 구하는 d의 개수는 12이다.

16. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하는 과정을 증명한다.

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아니므로

$\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_na_{n+1}}{n+1}$

의 양변에 $\frac{n(n+1)}{a_na_{n+1}}$을 곱하면

$\frac{n+1}{a_{n+1}}-\frac{n}{a_n}=\boxed{n}$

이다. $b_n=\frac{n}{a_n}$이라 하면 $b_1=\frac{1}{2}$이고

$b_{n+1}-b_n=\boxed{n}$ ($n\ge1$)

이므로

$b_n=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{1}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n+1}{2}$

$a_n=\frac{n}{b_n}=\boxed{\frac{2n}{n^2-n+1}}$

따라서 $f(n)=n$, $g(n)=\frac{2n}{n^2-n+1}$이다.

$\therefore f(13)g(4)=13\times\frac{8}{13}=8$

17. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 무한등비급수에 관한 문제를 해결한다.

$\overline{P_1B_1}=\overline{B_1Q_1}=2$, $\angle P_1B_1Q_1=90°$이므로

직각이등변삼각형 $P_1B_1Q_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2^2=2$이다.

$\overline{B_1D_1}$이 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 두 변 B_2C_2, D_2A_2와 만나는 점을 각각 M_1, N_1이라 하고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 x라 하면

$\overline{B_1M_1}=\sqrt{2}$, $\overline{M_1N_1}=x$, $\overline{N_1D_1}=\overline{A_2N_1}=\frac{x}{2}$

이고 $\overline{B_1D_1}=3\sqrt{2}$이므로

$\overline{B_1D_1}=\overline{B_1M_1}+\overline{M_1N_1}+\overline{N_1D_1}$

$=\sqrt{2}+x+\frac{x}{2}=3\sqrt{2}$

$\therefore x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

따라서 두 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는

$\overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}=3:\frac{4\sqrt{2}}{3}=9:4\sqrt{2}$

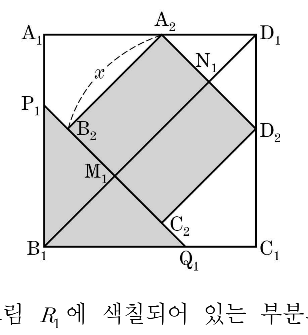
이다.

모든 자연수 n에 대하여 그림 R_n은 정사각형과 직각이등변삼각형으로 이루어진 닮음인 도형이므로

그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1과

그림 R_2에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_2의 비는

$S_1:S_2=9^2:(4\sqrt{2})^2=81:32$



그림에서 그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1은 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이와 직각이등변삼각형 $P_1B_1Q_1$의 넓이의 합이므로 수열 $\{S_n\}$은

첫째항이 $S_1=\frac{1}{2}\times2\times2+\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{50}{9}$이고

공비가 $\frac{32}{81}$인 등비수열이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{50}{9}}{1-\frac{32}{81}}=\frac{450}{49}$

[다른 풀이]

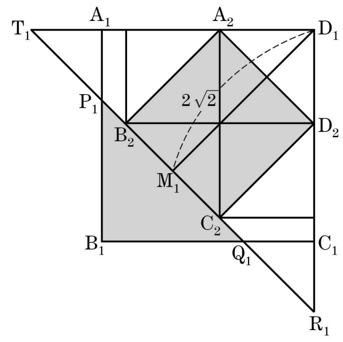
정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이가 3이므로

$\overline{B_1D_1}=3\sqrt{2}$

꼭짓점 D_1에서 선분 P_1Q_1에 내린 수선의 발을 M_1이라 하면 $\overline{D_1M_1}=2\sqrt{2}$이다.

직선 D_1A_1과 직선 P_1Q_1의 교점을 T_1, 직선 C_1D_1과 직선 P_1Q_1의 교점을 R_1이라 하자.

이때 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이는 직각이등변삼각형 $T_1R_1D_1$의 넓이의 $\frac{4}{9}$이다.



직각이등변삼각형 $T_1R_1D_1$은 높이가 $2\sqrt{2}$이고, 밑변의 길이가 $4\sqrt{2}$이므로 직각이등변삼각형 $T_1R_1D_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=8$

이고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이는

$8\times\frac{4}{9}=\frac{32}{9}$

이다. 따라서 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이는

$\overline{A_2B_2}=\sqrt{\frac{32}{9}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}=3:\frac{4\sqrt{2}}{3}=9:4\sqrt{2}$

모든 자연수 n에 대하여 그림 R_n은 정사각형과 직각이등변삼각형으로 이루어진 닮음인 도형이므로

그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1과

그림 R_2에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_2의 비는

$S_1:S_2=9^2:(4\sqrt{2})^2=81:32$

그림에서 그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1은 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이와 직각이등변삼각형 $P_1B_1Q_1$의 넓이의 합이므로 수열 $\{S_n\}$은

첫째항이 $S_1=\frac{1}{2}\times2\times2+\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{50}{9}$이고

공비가 $\frac{32}{81}$인 등비수열이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{50}{9}}{1-\frac{32}{81}}=\frac{450}{49}$

18. [출제의도] 등차수열의 일반항과 합의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$2a_n+n=p$에

$n=1, 2, 3, \cdots, 20$을 대입하면

$2a_1+1=p$

$2a_2+2=p$

$\cdots$

$2a_{20}+20=p$

변끼리 더하면

$2(a_1+a_2+\cdots+a_{20})+(1+2+\cdots+20)=20p$

$2p+\frac{20\times21}{2}=20p$

$18p=210$

$\therefore p=\frac{35}{3}$

$2a_{10}+10=\frac{35}{3}$에서

$a_{10}=\frac{1}{2}\left(\frac{35}{3}-10\right)=\frac{5}{6}$

19. [출제의도] 역행렬의 성질을 이해하고 주어진 조건

에 맞는 행렬의 성질을 추론한다.

ㄱ. $A^2-BA=E$, $(A-B)A=E$

$\therefore\ A^{-1}=A-B$

ㄴ. ㄱ에 의하여 $(A-B)A=E=A(A-B)$

$A^2-BA=A^2-AB$

$A^2=AB+E$

$\therefore\ AB=BA$

$(A-B+2E)(A-B-2E)=O$에서

$(A-B)^2-4E^2=O$이고 $AB=BA$이므로

$A^2-2AB+B^2-4E=O$

$\therefore\ A^2+B^2=2AB+4E$

ㄷ. ㄱ에서 $(A-B)^{-1}=A$이고,

ㄴ의 $(A-B)^2=4E$에서

$(A-B)^{-1}=\frac{1}{4}(A-B)$

역행렬을 가지는 행렬의 역행렬은 유일하므로

$(A-B)^{-1}=A=\frac{1}{4}(A-B)$

$\therefore\ B=-3A$

따라서 B의 모든 성분의 합은 A의 모든 성분의 합에 -3을 곱한 값과 같으므로 A의 모든 성분의 합이 2이면 B의 모든 성분의 합은 -6이다.

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄷ. $(A-B)^{-1}=A$이고 $A^2=BA+E$이므로

$A^2=BA+E$을 $A^2+B^2=2AB+4E$에 대입하면

$BA+E+B^2=2AB+4E$

$B^2=AB+3E$ ($\because\ AB=BA$)

$(A-B)B=-3E$

$\therefore\ A=(A-B)^{-1}=-\frac{1}{3}B$

$\therefore\ B=-3A$

20. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

조건 (가)에서 양변을 4^n으로 나누면

$1<\frac{a_n}{4^n}<1+\frac{1}{4^n}$

$\lim_{n\to\infty}1=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4^n}\right)=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=1$ … ㉠

조건 (나)에서

$2+2^2+2^3+\cdots+2^n=\frac{2(2^n-1)}{2-1}$

$=2^{n+1}-2$

$2^{n+1}-2<b_n<2^{n+1}$에서 양변을 2^n으로 나누면

$2-\frac{2}{2^n}<\frac{b_n}{2^n}<2$

$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}2=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{2^n}=2$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+b_n}{2a_n+2^n b_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4a_n+b_n}{4^n}}{\frac{2a_n+2^n b_n}{4^n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times\frac{a_n}{4^n}+\frac{b_n}{2^n}\times\frac{1}{2^n}}{2\times\frac{a_n}{4^n}+\frac{b^n}{2^n}}$

$=\frac{4}{2+2}=1$

21. [출제의도] 수열의 규칙성을 찾아서 수열을 추론하고 합을 구한다.

$n\geq 2$일 때, 제 $n-1$행의 맨 오른쪽 끝의 수는

$1+2+3+\cdots+(n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2}$이다.

따라서 a_n은 $\frac{n(n-1)}{2}$보다 큰 수 중 가장 작은 n의 배수이다.

i) n이 홀수일 때,

$\frac{n(n-1)}{2}$이 n의 배수이므로

$a_n=\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$a_{2n-1}=\frac{(2n-1)(2n-1+1)}{2}=2n^2-n$

ii) n이 짝수일 때,

$\frac{n(n-1)}{2}=n\times\frac{n-2}{2}+\frac{n}{2}$이므로

$a_n=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}n^2$

$a_{2n}=\frac{1}{2}(2n)^2=2n^2$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{30}a_n=\sum_{n=1}^{15}(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=\sum_{n=1}^{15}(2n^2-n+2n^2)$

$=4\sum_{n=1}^{15}n^2-\sum_{n=1}^{15}n$

$=4\times\frac{15\times16\times31}{6}-\frac{15\times16}{2}$

$=4840$

22. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그방정식의 해를 구한다.

$\log_2 x=1+\log_2(x-6)$

$\log_2 x=\log_2 2(x-6)$

$x=2(x-6)$

$\therefore\ x=12$

23. [출제의도] 행렬의 연산과 거듭제곱을 계산한다.

$A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-2\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=3E$ (단, E는 단위행렬)

이므로 $A^3=3A$, $A^4=9E$이다.

$A+A^2+A^3+A^4$

$=A+3E+3A+9E$

$=4A+12E$

$=4\begin{pmatrix}2&-1\\1&-2\end{pmatrix}+12\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}20&-4\\4&4\end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$20+(-4)+4+4=24$

24. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해한다.

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an}-n+2a\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+an-(n-2a)^2}{\sqrt{n^2+an}+n-2a}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5an-4a^2}{\sqrt{n^2+an}+n-2a}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5a-\frac{4a^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1-\frac{2a}{n}}$

$=\frac{5a}{2}=10$

$\therefore\ a=4$

25. [출제의도] 행렬을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

직선 OA의 방정식은

$y=\frac{5}{4}x$

$\therefore\ 5x-4y=0$ … ㉠

직선 BC의 방정식은

$y-3=-\frac{2}{7}(x+3)$

$\therefore\ 2x+7y=15$ … ㉡

㉠, ㉡의 연립방정식을 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix}5&-4\\2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\15\end{pmatrix}$

$\therefore\ a=-4,\ b=15$

$\therefore\ a+b=11$

26. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

주어진 식을 정리하면

$\log\frac{Q_t}{Q_0}=kt$

$\frac{Q_t}{Q_0}=10^{kt}$

충전된 전하량이 Q_0인 축전기에 전구를 연결한 지 a초 후에 남은 전하량은 $Q_a=\frac{1}{4}Q_0$이므로

$\frac{Q_a}{Q_0}=\frac{1}{4}=10^{ak}$ … ㉠

충전된 전하량이 Q_0인 축전기에 전구를 연결한 지 b초 후에 남은 전하량은 $Q_b=\frac{1}{10}Q_0$이므로

$\frac{Q_b}{Q_0}=\frac{1}{10}=10^{bk}$ … ㉡

충전된 전하량이 Q_0인 축전기에 전구를 연결한 지 $2a+b$초 후에 남은 전하량은 Q_{2a+b}라 하면 ㉠, ㉡에 의해

$\frac{Q_{2a+b}}{Q_0}=10^{(2a+b)k}=10^{2ak}10^{bk}=\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{10}=\frac{1}{160}$

$\therefore\ Q_{2a+b}=\frac{1}{160}Q_0$

$\therefore\ p=160$

[다른 풀이]

a초 후에 남은 전하량은 $Q_a=\frac{1}{4}Q_0$이므로

$\log\frac{1}{4}Q_0-\log Q_0=ak$

$\log\frac{1}{4}=ak$

b초 후에 남은 전하량은 $Q_b=\frac{1}{10}Q_0$이므로

$\log\frac{1}{10}Q_0-\log Q_0=bk$

$\log\frac{1}{10}=bk$

$2a+b$초 후에 남은 전하량은 $\frac{Q_0}{p}$이므로

$\log\frac{Q_0}{p}-\log Q_0=(2a+b)k$

$\log\frac{1}{p}=(2a+b)k=2ak+bk$

$=2\log\frac{1}{4}+\log\frac{1}{10}$

$=\log\frac{1}{160}$

$\therefore\ p=160$

27. [출제의도] 등차수열의 성질과 합을 이용하여 극한값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=1+(n-1)\times6=6n-5$이다.

$\therefore\ a_{2n}=12n-5$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

$=\sum_{k=1}^{n}(6k-5)$

$=6\sum_{k=1}^{n}k-5n$

$=6\times\frac{n(n+1)}{2}-5n$

$= 3n^2 - 2n$

$\therefore\ S_{2n} = 3\times(2n)^2 - 2\times(2n) = 12n^2 - 4n$

$a_{n+1} - a_n = 6\ \ (n \geq 1)$이므로

$T_{2n} = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^{2n}a_{2n}$

$= (-a_1 + a_2) + (-a_3 + a_4) + \cdots + (-a_{2n-1} + a_{2n})$

$= 6 + 6 + \cdots + 6$

$= 6n$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n}T_{2n}}{S_{2n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(12n-5)\times 6n}{12n^2-4n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{36n-15}{6n-2}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{36-\frac{15}{n}}{6-\frac{2}{n}}$

$= \dfrac{36}{6} = 6$

28. [출제의도] 로그함수의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$\overline{\mathrm{PQ}} = \log_{\frac{1}{9}} a - \log_3 a = -\dfrac{3}{2}\log_3 a$

$\overline{\mathrm{SR}} = \log_3 b - \log_{\frac{1}{9}} b = \dfrac{3}{2}\log_3 b$

$\overline{\mathrm{PQ}} : \overline{\mathrm{SR}} = 2 : 1$에서 $\overline{\mathrm{PQ}} = 2\,\overline{\mathrm{SR}}$이므로

$-\dfrac{3}{2}\log_3 a = 2\times\dfrac{3}{2}\log_3 b$

$\log_3 a + 2\log_3 b = 0$

$\therefore\ ab^2 = 1\ \cdots$ ㉠

선분 PR의 중점의 x좌표가 $\dfrac{9}{8}$이므로

$\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{9}{8}\ \cdots$ ㉡

㉡에서 $a = \dfrac{9}{4} - b$를 ㉠에 대입하면

$\left(\dfrac{9}{4} - b\right)b^2 = 1$

$4b^3 - 9b^2 + 4 = 0$

$(b-2)(4b^2 - b - 2) = 0$

$b = 2$ 또는 $b = \dfrac{1\pm\sqrt{33}}{8}$

$b > 1$이므로 $b = 2$

따라서 $a = \dfrac{1}{4}$, $b = 2$이므로

$40(b-a) = 70$

29. [출제의도] 수열의 합과 일반항의 관계와 상용로그의 가수의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$\sum\limits_{k=1}^{n} k\log a_k = n^2 - n\ \ (n \geq 1)$

$b_n = n\log a_n$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$라 하면 $S_n = n^2 - n$이므로

$b_1 = S_1 = 0$

$b_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 - n) - \{(n-1)^2 - (n-1)\}$

$= 2n - 2\ \ (n \geq 2)$

$\therefore\ b_n = n\log a_n = 2n - 2\ \ (n \geq 1)$

$\therefore\ \log a_n = 2 - \dfrac{2}{n}\ \ (n \geq 1)$

$n = 1$ 또는 $n = 2$일 때, $\log a_n$의 가수는 0이므로

$m \geq 3$이다. 이때 $0 < \dfrac{2}{m} < 1$이므로

$\log a_m = 1 + \left(1 - \dfrac{2}{m}\right)$

에서 $\log a_m$의 가수는 $1 - \dfrac{2}{m}$이다.

$1 - \dfrac{2}{m} = 0.9$

$\therefore\ m = 20$

30. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 극한에 관한 문제를 해결한다.

점 Q_n은 직선 $y = \sqrt{3}x$ 위의 점이므로 $\mathrm{Q}_n\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{\sqrt{3}}{n}\right)$이다.

$\overline{\mathrm{OP}_n} = p_n$, $\overline{\mathrm{OQ}_n} = q_n$, $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = r_n$이라 하면

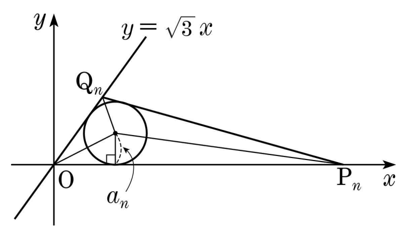
$p_n = n$

$q_n = \sqrt{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{n}\right)^2} = \dfrac{2}{n}$

$r_n = \sqrt{\left(n - \dfrac{1}{n}\right)^2 + \left(0 - \dfrac{\sqrt{3}}{n}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{n^4 - 2n^2 + 4}}{n}$

삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 넓이를 S_n이라 하면

$S_n = \dfrac{1}{2}\times n\times\dfrac{\sqrt{3}}{n} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



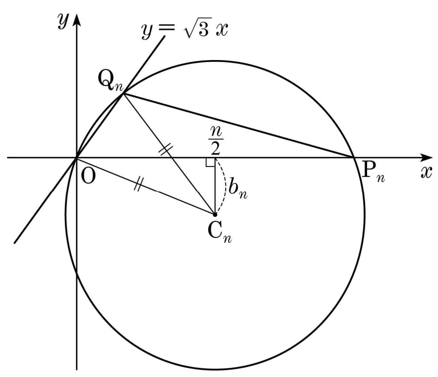
삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 내접원의 중심에서 x축까지의 거리 a_n은 내접원의 반지름의 길이와 같다.

$S_n = \dfrac{1}{2}(p_n + q_n + r_n)\times a_n$에서

$a_n = \dfrac{2S_n}{p_n + q_n + r_n}$

$= \dfrac{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{n + \dfrac{2}{n} + \dfrac{\sqrt{n^4 - 2n^2 + 4}}{n}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}n}{n^2 + 2 + \sqrt{n^4 - 2n^2 + 4}}\ \cdots$ ㉠



삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 외접원의 중심을 $\mathrm{C}_n(x_n, y_n)$이라 하면 점 C_n은 선분 OP_n의 수직이등분선 위에 있으므로 $x_n = \dfrac{n}{2}$이다.

$\overline{\mathrm{OC}_n} = \overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{C}_n}$에서 $\overline{\mathrm{OC}_n}^2 = \overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{C}_n}^2$이므로

$\left(\dfrac{n}{2}\right)^2 + {y_n}^2 = \left(\dfrac{n}{2} - \dfrac{1}{n}\right)^2 + \left(y_n - \dfrac{\sqrt{3}}{n}\right)^2$

$\dfrac{n^2}{4} + {y_n}^2 = \dfrac{n^2}{4} - 1 + \dfrac{1}{n^2} + {y_n}^2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{n}y_n + \dfrac{3}{n^2}$

$\therefore\ y_n = \dfrac{4 - n^2}{2\sqrt{3}n}$

$b_n = |y_n|$이므로 $n \geq 2$일 때

$b_n = \dfrac{n^2 - 4}{2\sqrt{3}n}\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{3}n}{n^2 + 2 + \sqrt{n^4 - 2n^2 + 4}}\times\dfrac{n^2 - 4}{2\sqrt{3}n}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2 - 4}{2(n^2 + 2 + \sqrt{n^4 - 2n^2 + 4})}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1 - \frac{4}{n^2}}{2\left(1 + \frac{2}{n^2} + \sqrt{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^4}}\right)}$

$= \dfrac{1}{4}$

$\therefore\ 100L = 100\times\dfrac{1}{4} = 25$

2014학년도 대학수학능력시험 수학영역 A형 정답 및 풀이(홀수형)

1.
출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

$$8^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} \times (3^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2^2 \times 3 = 12$$

<답> ①

2.
출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

$$A+2B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

따라서, 행렬 $A+2B$의 모든 성분의 합은 $4+2+1+3=10$

<답> ③

3.
출제의도 : 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\times 3^{n+1}+5}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\left\{2\times 3 + 5\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$
$$= 6$$

<답> ⑤

4.
출제의도 : 그래프와 행렬의 관계를 알 수 있는가?

두 꼭짓점이 연결되어 있으면 1, 연결되어 있지 않으면 0의 성분을 가지므로

$$a+b+c+d+e = 0+1+0+1+0 = 2$$

<답> ②

5.
출제의도 : 미분계수를 이해하여 함수를 구할 수 있는가?

$f'(1)=6$ 이므로 $f'(x)=4x+a$에서
$f'(1)=4+a=6$
$\therefore\ a=2$

<답> ④

6.
출제의도 : 등차수열의 일반항, 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 공차를 구할 수 있는가?

$$a_8-a_6=(6+7d)-(6+5d)=2d$$
$$S_8-S_6=a_8+a_7$$
$$=(6+7d)+(6+6d)$$
$$=12+13d$$
$$\frac{a_8-a_6}{S_8-S_6}=\frac{2d}{12+13d}=2$$
$$d=12+13d$$
$\therefore\ d=-1$

<답> ①

7.
출제의도 : 두 사건이 서로 독립임을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

$$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)$$
$$=P(A)\{1-P(B)\}$$

$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$

<답> ②

8.

출제의도 : 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

$x^2-4x+3=3,\ x(x-4)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=4$

$\int_0^4 \{3-(x^2-4x+3)\}dx$

$=\int_0^4 (-x^2+4x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$

<답> ③

9.

출제의도 : 이항분포에서의 평균과 분산을 구하여 이항분포에서의 확률을 구할 수 있는가?

$E(X)=9p,\ \ V(X)=9p(1-p)$ 이므로

$(9p)^2=9p(1-p),\ 9p=1-p(\because 0<p<1)$

$\therefore\ p=\frac{1}{10}$

<답> ④

10.

출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 식이 주어진 실생활의 문제를 해결할 수 있는가?

$\frac{v_c}{\frac{1}{2}v_c}=1-k\log\frac{R^{\frac{27}{23}}}{R},\ \ 2=1-\frac{4}{23}k\log R$

$\therefore\ k\log R=-\frac{23}{4}$

$\frac{v_c}{\frac{1}{3}v_c}=1-k\log\frac{R^a}{R},$

$3=1-(a-1)k\log R=1-(a-1)\times(-\frac{23}{4})$

$8=23a-23$

$\therefore\ a=\frac{31}{23}$

<답> ⑤

11.

출제의도 : 함수의 극한을 구할 수 있는가?

$\lim_{x\to -1-0} f(x)+\lim_{x\to +0} f(x)=3+0=3$

<답> ③

12.

출제의도 : 표본평균이 정규분포를 따르는 분포에서 확률을 구할 수 있는가?

약품 1병의 용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(m,10^2)$을 따르므로 임의로 추출한 25병의 용량의 표본평균을 확률변수 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $N(m,2^2)$을 따른다.

$P(\overline{X}\geq 2000)$

$=P(Z\geq\frac{2000-m}{2})=0.9772$

$0.5+P(0 \le Z \le \dfrac{m-2000}{2})=0.9772$

$P(0 \le Z \le \dfrac{m-2000}{2})=0.4772$

이때, $P(0 \le Z \le 2)=0.4772$ 이므로

$\dfrac{m-2000}{2}=2$

$\therefore\ m=2004$

<답> ②

13.

출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 일반항을 구한 후 합을 구할 수 있는가?

6^n은 짝수이고 3^n은 홀수이므로

$a_n=f(6^n)-f(3^n)$

$=\log_2 6^n-\log_3 3^n$

$=n(1+\log_2 3)-n$

$=(\log_2 3)n$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{15} a_n=\sum_{n=1}^{15}(\log_2 3)n$

$=(\log_2 3)\sum_{n=1}^{15} n$

$=(\log_2 3)\times\dfrac{15\times 16}{2}=120\log_2 3$

<답> ④

14.

출제의도 : 로그의 성질을 활용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

(i) m,n이 모두 홀수이면 mn은 홀수이므로

$f(mn)=\log_3 mn$

$=\log_3 m+\log_3 n$

$=f(m)+f(n)$

이때, 순서쌍 (m,n)의 개수는

$10\times 10=100$

(ii) m,n이 모두 짝수이면 mn은 짝수이므로

$f(mn)=\log_2 mn$

$=\log_2 m+\log_2 n$

$=f(m)+f(n)$

이때, 순서쌍 (m,n)의 개수는

$10\times 10=100$

(iii) m이 짝수, n이 홀수이면

mn은 짝수이므로

$f(mn)=\log_2 mn=\log_2 m+\log_2 n$

$f(m)+f(n)=\log_2 m+\log_3 n$

$\therefore \log_2 n=\log_3 n$이어야 하므로 $n=1$

따라서, $10\times 1=10$

m이 홀수, n이 짝수인 경우도 마찬가지이므로 $10\times 1=10$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하고자 하는 순서쌍 (m,n)의 개수는

$100+100+20=220$

<답> ①

15.

출제의도 : 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

(i) 주머니 A에서 꺼낸 공이 흰 공인 경우

$\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{5}$

(ii) 주머니 A에서 꺼낸 공이 검은 공

인 경우

$\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$

따라서, 구하고자 하는 확률은

$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$

<답> ⑤

16.

출제의도 : 조건을 만족시키는 일반항 $\{a_n\}$을 구할 수 있는가?

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은

$a_1=10$,

$(a_{n+1})^n=10(a_n)^{n+1}\ (n\geq 1)$ ……㉠

식 ㉠의 양변에 상용로그를 취하면

$n\log a_{n+1}=(n+1)\log a_n+1$

이다. 양변을 $n(n+1)$로 나누면

$\frac{\log a_{n+1}}{n+1}=\frac{\log a_n}{n}+\boxed{\frac{1}{n(n+1)}}$

이다.

$b_n=\frac{\log a_n}{n}$이라 하면

$b_1=1$ 이고, $b_{n+1}=b_n+\boxed{\frac{1}{n(n+1)}}$이다.

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=1+1-\frac{1}{n}=\frac{2n-1}{n}$$

수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$b_n=\boxed{\frac{2n-1}{n}}$

이므로

$\log a_n=n\times\boxed{\frac{2n-1}{n}}\ \left(\because b_n=\frac{\log a_n}{n}\right)$

이므로 $a_n=10^{n\times\boxed{\frac{2n-1}{n}}}$ 이다.

따라서

$f(n)=\frac{1}{n(n+1)},\ g(n)=\frac{2n-1}{n}$

이므로

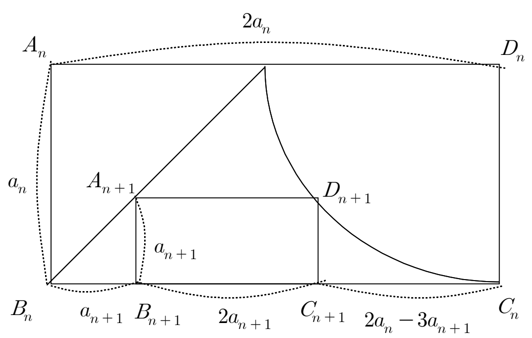
$f(4)=\frac{1}{20},\ g(10)=\frac{19}{10}$이다.

$$\therefore\ \frac{g(10)}{f(4)}=\frac{\frac{19}{10}}{\frac{1}{20}}=38$$

<답> ①

17.

출제의도 : 반복되는 도형에서 규칙을 찾아 넓이의 극한값을 구할 수 있는가?



직사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 세로의 길이를 a_n이라 하면 직사각형 $A_{n+1}B_{n+}C_{n+1}D_{n+1}$의 세로의 길이는 a_{n+1} 이고 $\overline{B_nB_{n+1}}=\overline{A_{n+1}B_{n+1}}$ 이므로

$\overline{C_{n+1}C_n} = 2a_n - 3a_{n+1}$

또한, 점 D_n을 좌표평면 위의 원점에 놓고 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 가로와 세로를 x축, y축에 평행하게 놓으면 점 $D_{n+1}(-2a_n + 3a_{n+1}, a_{n+1} - a_n)$은 원 $x^2 + y^2 = a_n^2$ 위에 놓이게 된다.

$(-2a_n + 3a_{n+1})^2 + (a_{n+1} - a_n)^2 = a_n^2$

$5a_{n+1}^2 - 7a_{n+1}a_n + 2a_n^2 = 0$

$(5a_{n+1} - 2a_n)(a_{n+1} - a_n) = 0$

$\therefore\ a_{n+1} = \frac{2}{5}a_n\ \ (\because a_{n+1} < a_n)$

따라서, 닮음비가 $\frac{2}{5}$이므로 넓이의 비는 $\frac{4}{25}$ 이고

$S_1 = 2\times\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\times 1\times 1\right) = \frac{\pi}{2} - 1$

에서

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{1 - \frac{4}{25}} = \frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

<답> ③

18.

출제의도 : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

3명의 학생에게 흰색 탁구공을 각각 1개씩, 주황색 탁구공을 각각 1개씩 나누어 주면 남은 흰색 탁구공은 5개, 주황색 탁구공은 4개이다.

따라서, 3명의 학생에게 흰색 탁구공 5개를 나누어 주는 방법의 수는

${}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$

3명의 학생에게 주황색 탁구공 4개를 나누어 주는 방법의 수는

${}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$

따라서, 구하고자 하는 경우의 수는

$21\times 15 = 315$

<답> ⑤

19.

출제의도 : 주어진 행렬의 조건을 이용하여 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

ㄱ. $AB + A^2B = (A + A^2)B = E$ 이므로

$B^{-1} = A + A^2$ (참)

ㄴ. $AB + A^2B = A(B + AB) = E$

$\therefore\ A^{-1} = B + AB$

따라서,

$A^{-1}B^{-1} = E + A,\ B^{-1}A^{-1} = E + A$

에서 $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 이므로

$(A^{-1}B^{-1})^{-1} = (B^{-1}A^{-1})^{-1}$

$BA = AB$ (참)

ㄷ. $(A - E)^2 + B^2 = O$ 에서

$B^2 = -A^2 + 2A - E$

$AB + A^2B = E$ 에서

$B = AB^2 + A^2B^2$

$= A(-A^2 + 2A - E) + A^2(-A^2 + 2A - E)$

$= -A^4 + A^3 + A^2 - A$

$= -(A^3 - A)(A - E)$

따라서, $(A + A^2)B = E$ 이므로

$(A + A^2)\{-(A^3 - A)(A - E)\} = E$

$(A^3 - A)^2 = -E$

$(A^3-A)^2+E=O$ (참)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

<답> ⑤

20.

출제의도 : 지표와 가수의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

$f(x)$는 정수, $0 \le g(x) < 1$ 이고

$f(x)=n+(n+1)g(x)$ 에서

$0 \le (n+1)g(x) < n+1$

$n \le n+(n+1)g(x) < 2n+1$

이므로

$n \le f(x) < 2n+1$

$f(x)=n$ 이면 $g(x)=0$

$f(x)=n+1$ 이면 $g(x)=\dfrac{1}{n+1}$

$f(x)=n+2$ 이면 $g(x)=\dfrac{2}{n+1}$

$\cdots$

$f(x)=2n$ 이면 $g(x)=\dfrac{n}{n+1}$

따라서,

$$a_n=10^n\times 10^{n+1+\frac{1}{n+1}}\times\cdots\times 10^{2n+\frac{n}{n+1}}$$

$$=10^{\{n+(n+1)+\cdots+2n\}+\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+1}\right)}$$

$$=10^{\frac{3n(n+1)}{2}+\frac{n}{2}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\log a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n(n+1)}{2}+\frac{n}{2}}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{2n}\right)=\frac{3}{2}$$

<답> ②

21.

출제의도 : 접선의 방정식을 구하고 함수가 미분가능할 조건을 구할 수 있는가?

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3+at^2+bt)=(3t^2+2at+b)(x-t)$

따라서, 접선이 y축과 만나는 점 P의 좌표는 $P(0,-2t^3-at^2)$ 이다.

$\therefore\ g(t)=|-2t^3-at^2|$

$\quad =t^2|2t+a|$

이때, $f(1)=1+a+b=2$ 에서

$a+b=1\cdots$㉠

이고 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능해야하므로 함수 $y=g(t)$의 그래프는 t축과 단 한점에서 만나야 한다.

따라서, $g(0)=0$ 이므로

$|2\times 0+a|=0$

$\therefore\ a=0$

㉠에 대입하면 $b=1$ 이므로

$f(3)=3^3+1\times 3=30$

<답> ④

22.

출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{2x+9}=\sqrt{9}=3$$

<답> 3

23.

출제의도 : 정적분을 구할 수 있는가?

$$\int_{-a}^{a}(3x^2+2x)dx=2\int_{0}^{a}3x^2dx$$
$$=2\left[x^3\right]_0^a$$
$$=2a^3=\frac{1}{4}$$

$a^3=\frac{1}{8}$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ 50a=25$

<답> 25

24.

출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이해하고 항을 구할 수 있는가?

주어진 수열은 조건 (나)에 의하여 공비가 -2인 등비수열이므로

$a_1=a_2+3=-2a_1+3$

$\therefore\ a_1=1$

$\therefore\ a_9=(-2)^8=256$

<답> 256

25.

출제의도 : 삼차함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

$f'(x)=6x^2-24x+a$이고 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 M을 가지므로

$f'(1)=6-24+a=0$

$\therefore\ a=18$

$\therefore\ M=f(1)=2-12+18-4=4$

$\therefore\ a+M=22$

<답> 22

26.

출제의도 : 연립일차방정식이 무수히 많은 해를 가질 조건을 구할 수 있는가?

$$\begin{pmatrix}5 & a\\ a & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+5y\\ 6x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 6 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4 & a-5\\ a-6 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\cdots ㉠$$

㉠이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지므로

$4\times2-(a-5)(a-6)=0$

$a^2-11a+22=0$

따라서, 모든 실수 a의 값의 합은 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{-11}{1}=11$

<답> 11

27.

출제의도 : 이산확률분포를 구하여 평균을 구할 수 있는가?

$$P(X=1)=\frac{4}{{}_5C_2}=\frac{4}{10}$$

$$P(X=2)=\frac{3}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$$

$$P(X=3)=\frac{2}{{}_5C_2}=\frac{2}{10}$$

$P(X=4)=\dfrac{1}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{10}$

$\therefore\ E(X)$

$=1\times\dfrac{4}{10}+2\times\dfrac{3}{10}+3\times\dfrac{2}{10}+4\times\dfrac{1}{10}$

$=2$

$\therefore\ E(10X)=10E(X)=20$

<답> 20

28.

출제의도 : 함수가 연속일 조건을 구할 수 있는가?

(i) $a=0$ 이면 $f(x)f(x-a)=\{f(x)\}^2$ 이므로 $x=0$ 에서 함수 $f(x)f(x-a)$는 연속이 아니다.

(ii) $a>0$ 일 때,

$f(a)f(0)=f(a)=-\dfrac{1}{2}a+7$

$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)f(x-a)=(-\dfrac{1}{2}a+7)\times 7$

$\lim\limits_{x\to a-0}f(x)f(x-a)=(-\dfrac{1}{2}a+7)\times 1$

$-\dfrac{1}{2}a+7=(-\dfrac{1}{2}a+7)\times 7$

$\therefore\ a=14$

(iii) $a<0$ 일 때,

$f(a)f(0)=f(a)=a+1$

$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)f(x-a)=(a+1)\times 7$

$\lim\limits_{x\to a-0}f(x)f(x-a)=(a+1)\times 1$

$a+1=(a+1)\times 7$

$\therefore\ a=-1$

따라서, 모든 실수 a의 값의 합은

$14+(-1)=13$

<답> 13

29.

출제의도 : 무한급수를 정적분으로 나타낼 수 있는가?

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\dfrac{3k}{n})$

$=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\dfrac{3k}{n})\dfrac{3}{n}$

$=\dfrac{1}{3}\int_0^3 f(x)dx$

$=\dfrac{1}{3}\int_0^3 (3x^2-ax)dx$

$=\dfrac{1}{3}\left[x^3-\dfrac{a}{2}x^2\right]_0^3$

$=9-\dfrac{3}{2}a=3-a$

$\therefore\ a=12$

<답> 12

30.

출제의도 : 지수함수의 그래프를 이해하고 주어진 영역에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구할 수 있는가?

$y=a^{-x+4}$에서 $a^{-x+4}=1$ 이면 $x=4$

이때, $y=4^x$ 에서

$x=0$ 이면 $y=1$

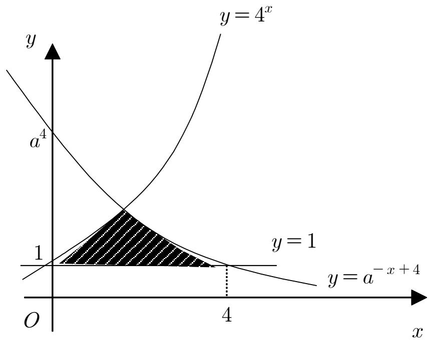
$x=1$ 이면 $y=4$

$x=2$ 이면 $y=16$

$x=3$ 이면 $y=64$

$x=4$ 이면 $y=256$

이므로 그림과 같은 영역에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 20이상 40이하가 되기 위해서는 $x=2$, $x=3$일 때, 함수 $y=a^{-x+4}$ 의 값의 범위를 정하면 된다.



즉,

$x=2$일 때, $y=a^2 \ge 13 \cdots$ ㉠

$x=3$일 때, $y=a \le 18 \cdots$ ㉡

이므로 ㉠,㉡을 만족시키는 자연수 a는 4, 5, ⋯, 18의 15개이다.

<답> 15

2013학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 A형 정답

1	②	2	③	3	①	4	④	5	②
6	⑤	7	①	8	⑤	9	④	10	①
11	⑤	12	②	13	④	14	②	15	①
16	③	17	④	18	⑤	19	③	20	③
21	②	22	26	23	6	24	12	25	61
26	5	27	4	28	64	29	400	30	11

해 설

1. [출제의도] 로그를 계산하여 값을 구한다.

$\frac{1}{2}\log_2 8-\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}\log_2 2^3-\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$

2. [출제의도] 행렬을 계산하여 성분의 합을 구한다.

$A-2B=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1&2\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1\\-5&0\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 -2이다.

3. [출제의도] 수열의 극한을 계산한다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-3}{3n^2-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}}=\frac{2+0-0}{3-0}=\frac{2}{3}$

4. [출제의도] 정적분의 값을 계산한다.

$\int_0^1(3x^2-4x+5)dx=\left[x^3-2x^2+5x\right]_0^1=4$

5. [출제의도] 그래프를 나타내는 행렬의 성질을 이해하여 값을 구한다.

그래프를 나타내는 행렬의 각 성분은 왼쪽 위에서 오른쪽 아래로 향하는 대각선에 대하여 대칭이다. 그러므로 a, b는 행렬 M의 $(4, 1)$성분, $(2, 5)$성분과 각각 같다.

$\therefore\ a=0$, $b=1$

따라서 행렬 M의 모든 성분의 합이 14이므로 그래프 G의 변의 개수는 7이다.

6. [출제의도] 이항정리를 이해하고 항의 계수를 구한다.

$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7\mathrm{C}_r(x^2)^{7-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_7\mathrm{C}_r x^{14-3r}$

$14-3r=2$에서 $r=4$

따라서 x^2의 계수는 ${}_7\mathrm{C}_4=35$이다.

7. [출제의도] 서로 배반인 두 사건의 확률의 덧셈정리를 이해하고 값을 구한다.

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$ 이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{4}$

두 사건 A, B가 서로 배반이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$이다.

따라서 $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\mathrm{P}(B)$에서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$이다.

8. [출제의도] 미분계수의 정의를 이해하고 극한값을 구한다.

$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ 이므로 $\lim\limits_{x\to 2}\{f(x)-1\}=0$

$\therefore\ f(2)=1$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=2$

$\therefore\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$

$=2f'(2)=2\times 2=4$

9. [출제의도] 로그부등식을 이해하고 그 해를 구한다.

$1<\log_4\frac{x^2-1}{2}<3$에서 $4<\frac{x^2-1}{2}<64$

$\therefore\ 9<x^2<129$

따라서 $x=\pm4$, ±5, ±6, ±7, ±8, ±9, ±10, ±11이므로 구하는 개수는 16이다.

10. [출제의도] 중복조합을 이해하고 경우의 수를 구한다.

(ⅰ) 4명의 학생 중에서 선물을 받을 2명을 택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$ 이다.

(ⅱ) (ⅰ)에서 택한 2명에게 4개의 선물을 적어도 하나씩 나누어 주는 방법의 수는 각각 하나씩 나누어 주고 남은 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_{2+2-1}\mathrm{C}_2=3$이다.

$\therefore\ {}_4\mathrm{C}_2\times 3=18$

11. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 이해하고 주어진 값을 구한다.

$f'(x)=3x^2-2x-5=(x+1)(3x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f(-1)$	↘	$f\left(\frac{5}{3}\right)$	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 가지므로

$f(-1)=-1-1+5+k=20$

$\therefore\ k=17$

12. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 실생활과 관련된 문제를 해결한다.

잡음 지수가 5이고 주파수 대역이 B_1일 때의 수신 가능한 신호의 최소 크기를 P_1이라 하면

$P_1=a+5+10\log B_1$

잡음 지수가 15이고 주파수 대역이 B_2일 때의 수신 가능한 신호의 최소 크기를 P_2라 하면

$P_2=a+15+10\log B_2$

$P_1=P_2$이므로

$a+5+10\log B_1=a+15+10\log B_2$

$\log B_2-\log B_1=-1$, $\log\frac{B_2}{B_1}=-1$

$\therefore\ \frac{B_2}{B_1}=10^{-1}=\frac{1}{10}$

13. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이해하고 주어진 값을 구한다.

$\mathrm{A}(0, 1)$, $\mathrm{B}(1, 0)$이고 선분 AB가 정사각형의 한 변이므로 $\mathrm{C}(1, 2)$, $\mathrm{D}(2, 1)$이다.

이때 직선 $y=-x+k$가 점 $\mathrm{C}(1, 2)$를 지나므로

$2=-1+k$

$\therefore\ k=3$

14. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 통해 주어진 이산확률변수의 기댓값을 구한다.

주사위의 눈의 수를 n이라 하면

$\mathrm{C}(n, 2^n)$, $\mathrm{D}(2^n, n)$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{(2^n-n)^2+(n-2^n)^2}=\sqrt{2}(2^n-n)$

1부터 6까지의 값을 가지는 n에 대하여 선분 CD의 길이 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

n	1	2	$\cdots$	6	계
X	$\sqrt{2}(2^1-1)$	$\sqrt{2}(2^2-2)$	$\cdots$	$\sqrt{2}(2^6-6)$	
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 X의 기댓값은

$\mathrm{E}(X)=\sum\limits_{n=1}^{6}\sqrt{2}(2^n-n)\times\frac{1}{6}$

$=\frac{\sqrt{2}}{6}\left\{\frac{2(2^6-1)}{2-1}-\frac{6\times 7}{2}\right\}$

$=\frac{35\sqrt{2}}{2}$

15. [출제의도] 수열의 일반항을 추론한다.

$a_{n+1}=\frac{na_n+6}{n+2}$의 양변에 $(n+2)$를 곱하면

$(n+2)a_{n+1}=na_n+6$

이다. 다시 양변에 $(n+1)$을 곱하면

$(n+1)(n+2)a_{n+1}=n(n+1)a_n+6(n+1)$

이다. $b_n=n(n+1)a_n$이라 하면

$b_{n+1}=b_n+\boxed{6(n+1)}$

이다. $b_1=2$이고 $b_{n+1}-b_n=6(n+1)$이므로

$b_n=b_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}6(k+1)$

$=2+6\left\{\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)\right\}$

$=\boxed{3n^2+3n-4}$ $(n\geq 1)$

이다. $n(n+1)a_n=3n^2+3n-4$이므로

$a_n=\boxed{\frac{3n^2+3n-4}{n(n+1)}}$ $(n\geq 1)$

$f(n)=6(n+1)$, $g(n)=3n^2+3n-4$이므로

$f(4)+g(10)=30+326=356$

16. [출제의도] 주어진 함수의 그래프에서 극한과 연속을 추측한다.

ㄱ. $\lim\limits_{x\to -1-0}f(x)+\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=1+(-1)=0$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 1-0}f(-x)=\lim\limits_{t\to -1+0}f(t)=-1$

$\lim\limits_{x\to 1+0}f(-x)=\lim\limits_{t\to -1-0}f(t)=1$

$\lim\limits_{x\to 1-0}f(-x)\neq\lim\limits_{x\to 1+0}f(-x)$이므로 함수 $f(-x)$는 $x=1$에서의 극한값이 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $f(1)f(-1)=1\times(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)f(-x)=1\times(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)f(-x)=(-1)\times 1=-1$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 1}f(x)f(-x)=-1$

따라서 $f(1)f(-1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)f(-x)$이므로 함수 $f(x)f(-x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

17. [출제의도] 실생활과 관련하여 모평균에 대한 신뢰구간을 구한다.

딸기의 무게 X가 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다고 하자. 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}=20$, 표본표준편차 $s=5$의 결과를 이용하여 모평균 m을 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간은

$\left[20-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}},\ 20+1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}\right]$

조건에서 신뢰구간이 $[19.02, a]$이므로

$20-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=19.02$, $20+1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=a$

위의 식을 풀면 $n=100$, $a=20.98$

$\therefore\ n+a=120.98$

18. [출제의도] 주어진 도형을 통해 함수의 극한값을 구한다.

삼각형 OAB의 넓이를 S, 원의 중심을 C라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{a^2+9}$, $S=\triangle\mathrm{COA}+\triangle\mathrm{CBO}+\triangle\mathrm{CAB}$ 이므로

$S=\frac{3}{2}a=r\times\frac{a+3+\sqrt{a^2+9}}{2}$

위의 식을 정리하면

$\frac{r}{a}=\frac{3}{a+3+\sqrt{a^2+9}}$

$\therefore\ \lim_{a\to+0}\frac{r}{a}=\lim_{a\to+0}\frac{3}{a+3+\sqrt{a^2+9}}=\frac{3}{3+\sqrt{9}}=\frac{1}{2}$

19. [출제의도] 주어진 도형에서 무한등비급수의 합을 추측하여 구한다.

R_1에 있는 원의 반지름의 길이는 $2-\sqrt{2}$ 이므로

$S_1=(2-\sqrt{2})^2\pi$

R_2에 있는 작은 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면

$\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{2}x+2(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

$x=2-\sqrt{2}$

R_1에 있는 원과 R_2에 있는 작은 원의 넓이의 비는

$2^2:(2-\sqrt{2})^2=1:\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

따라서 R_n과 R_{n+1}에서 각각 새로 그려지는 두 원의 넓이의 비는 $1:\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$이고 원의 개수의 비는 $1:2$ 이다.

그러므로 구하는 무한급수의 합은 첫째항이 $S_1=(2-\sqrt{2})^2\pi$ 이고, 공비가 $2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=3-2\sqrt{2}$ 인 무한등비급수의 합과 같다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{(2-\sqrt{2})^2\pi}{1-(3-2\sqrt{2})}=(\sqrt{2}-1)\pi$

20. [출제의도] 미분계수를 이용하여 접선의 방정식의 성질을 알고 주어진 값을 구한다.

$f(x)=x^3+ax$를 미분하면

$f'(x)=3x^2+a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3+a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$y=(3+a)(x+1)+(-1-a)$

이 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 구하면

$x^3+ax=(3+a)(x+1)+(-1-a)$

$x^3-3x-2=0$, $(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore\ b=2$

따라서 점 B의 좌표는 $(2,\ 8+2a)$이다.

마찬가지로 점 B에서의 접선의 방정식은

$y=(12+a)(x-2)+(8+2a)$

이 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 구하면

$x^3+ax=(12+a)(x-2)+(8+2a)$

$x^3-12x+16=0$, $(x-2)^2(x+4)=0$

$\therefore\ c=-4$

주어진 조건에서

$f(b)+f(c)=f(2)+f(-4)=8+2a-64-4a=-80$

$\therefore\ a=12$

[다른 풀이]

점 A에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하면

$f(x)-g(x)=(x+1)^2(x-b)$

$g(x)$는 일차식이므로 $f(x)-g(x)$는 이차항을 갖지 않는다. 즉, 이차항의 계수는 0이므로

$-b+2=0\ \ \therefore\ b=2$

점 B에서의 접선의 방정식을 $y=h(x)$라 하면

$f(x)-h(x)=(x-2)^2(x-c)$

마찬가지로 이차항의 계수는 0이므로

$-c-4=0\ \ \therefore\ c=-4$

따라서

$f(b)+f(c)=f(2)+f(-4)=-56-2a=-80$

$\therefore\ a=12$

21. [출제의도] 정적분을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 알고 주어진 값을 구한다.

두 점 $\mathrm{A}(2,0)$, $\mathrm{B}(0,3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-\frac{3}{2}x+3$

이 직선과 함수 $y=ax^2$의 그래프의 교점의 x좌표를 p라 하면

$-\frac{3}{2}p+3=ap^2$ …… ㉠

$S_1=\int_0^p\left\{\left(-\frac{3}{2}x+3\right)-ax^2\right\}dx$

$=\left[-\frac{3}{4}x^2+3x-\frac{1}{3}ax^3\right]_0^p$

$=-\frac{3}{4}p^2+3p-\frac{1}{3}ap^3$

$=-\frac{3}{4}p^2+3p-\frac{1}{3}p\left(-\frac{3}{2}p+3\right)$

$=-\frac{1}{4}p^2+2p$ …… ㉡

한편 $S_1+S_2=\frac{1}{2}\times2\times3=3$이고 $S_1:S_2=13:3$이므로

$S_1=3\times\frac{13}{16}=\frac{39}{16}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $-\frac{1}{4}p^2+2p=\frac{39}{16}$

$4p^2-32p+39=0$

$(2p-3)(2p-13)=0$

따라서 $p=\frac{3}{2}$ ($\because\ 0<p<2$)

그러므로 ㉠에서 $-\frac{9}{4}+3=\frac{9}{4}a$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}$

22. [출제의도] 등차수열의 일반항을 계산한다.

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_1=2$이고

$a_4+a_{10}=28$

$(a_1+3d)+(a_1+9d)=28$

$4+12d=28\ \ \therefore\ d=2$

$\therefore\ a_{13}=a_1+12d=2+12\times2=26$

23. [출제의도] 연립일차방정식의 해를 이해하고 주어진 값을 구한다.

연립방정식 $\begin{pmatrix}t & 2\\ 6 & t-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지므로 행렬 $\begin{pmatrix}t & 2\\ 6 & t-4\end{pmatrix}$이 역행렬을 갖지 않는다.

$t(t-4)-2\times6=0$

$(t+2)(t-6)=0$

$\therefore\ t=6$ ($\because\ t>0$)

24. [출제의도] 무한급수의 수렴과 발산을 이해하고 수열의 극한값을 구한다.

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-a_n}{2}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{3-a_n}{2}=0$, $\lim_{n\to\infty}a_n=3$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{4na_n+5}{n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+\frac{5}{n}}{1-\frac{3}{n}}=\frac{4\times3+0}{1-0}=12$

25. [출제의도] 확률의 정의를 이해하고 확률의 값을 구한다.

4장의 카드에서 2장을 뽑는 방법의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$이고 이 중에서 '한'과 '국'이 적힌 카드를 뽑는 경우의 수는 1이다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{6}$이다.

$\therefore\ 10p+q=60+1=61$

26. [출제의도] 삼차함수의 그래프를 이용하여 미분계수를 구한다.

조건 (가)에서 $f(a)=f(2)=f(6)=k$로 놓으면

$f(a)-k=f(2)-k=f(6)-k=0$

$g(x)=f(x)-k$라 하면

$g(a)=g(2)=g(6)=0$

$g(x)=(x-a)(x-2)(x-6)$

그러므로 $f(x)=(x-a)(x-2)(x-6)+k$

$f(x)$를 미분하면

$f'(x)=(x-2)(x-6)+(x-a)(x-6)+(x-a)(x-2)$

조건 (나)에서 $f'(2)=-4$이므로

$-4(2-a)=-4\ \ \therefore\ a=1$

$\therefore\ f'(a)=(a-2)(a-6)=(-1)\times(-5)=5$

27. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이해하고 방정식의 해의 개수를 구한다.

양수 x에 대하여 $\log x$의 가수가 $f(x)$이므로

$f(x)=\log3$에서 $\log x$의 가수는 $\log3$이다.

따라서 $\log x=n+\log3$ (n은 정수) …… ㉠

$\frac{1}{100}\le x\le100$일 때, $-2\le\log x\le2$

이것을 ㉠에 대입하면

$-2\le n+\log3\le2$

$-2-\log3\le n\le2-\log3$

$0<\log3<1$이므로 $-3<n<2$

$\therefore\ n=-2,\ -1,\ 0,\ 1$

따라서 구하는 x의 개수는 4이다.

[참고]

x의 값을 구하면 다음과 같다.

(i) $n=-2$일 때

$\log x=-2+\log3$, $\log x=\log(3\times10^{-2})$

$x=3\times10^{-2}=\frac{3}{100}$

(ii) $n=-1$일 때

$\log x=-1+\log3$, $\log x=\log(3\times10^{-1})$

$x=3\times10^{-1}=\frac{3}{10}$

(iii) $n=0$일 때

$\log x=\log3$

$x=3$

(iv) $n=1$일 때

$\log x=1+\log3$

$x=30$

따라서 구하는 x는 $\frac{3}{100}$, $\frac{3}{10}$, 3, 30이다.

28. [출제의도] 정적분을 이용하여 두 점 사이의 거리의 최댓값을 구한다.

$f(t)=2t^2-8t$, $g(t)=t^3-10t^2+24t$라 하자.

x초 후의 두 점 P, Q 사이의 거리는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$\left|\int_0^x f(t)dt-\int_0^x g(t)dt\right|=\left|\int_0^x\{f(t)-g(t)\}dt\right|$

$h(x)=\int_0^x\{f(t)-g(t)\}dt$라 하자.

$h'(x)=f(x)-g(x)$

$=(2x^2-8x)-(x^3-10x^2+24x)$

$=-x^3+12x^2-32x$

$=-x(x-4)(x-8)$

$h'(x)=0$에서 $x=0,\ 4,\ 8$

$h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	8
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$h(x)$	0	↘	$h(4)$	↗	$h(8)$

$h(x)=\int_0^x\{(2t^2-8t)-(t^3-10t^2+24t)\}dt$

$=\int_0^x(-t^3+12t^2-32t)dt$

$=-\frac{1}{4}x^4+4x^3-16x^2$

$x=4$일 때

$|h(x)| =\left[\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2\right]_0^4=64$

$x=8$일 때

$|h(x)| =\left[\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2\right]_0^8=0$

따라서 $|h(x)|$ 는 $x=4$에서 최댓값 64를 갖는다.

29. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 주어진 방정식의 해의 합을 구한다.

(i) $0\le x<2$일 때 $f(x)=5$에서

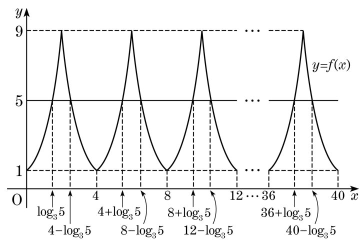
$3^x=5$ $\therefore$ $x=\log_3 5$

(ii) $2\le x<4$일 때 $f(x)=5$에서

$3^{-x+4}=5$, $-x+4=\log_3 5$ $\therefore$ $x=4-\log_3 5$

함수 $y=f(x)$는 주기가 4인 주기함수이므로 닫힌 구간 $[0, 40]$에서 $f(x)=5$인 x값들을 차례대로 구하면 다음과 같다.

$\log_3 5$, $4-\log_3 5$, $4+\log_3 5$, $8-\log_3 5$, $8+\log_3 5$, $12-\log_3 5$, $12+\log_3 5$, $\cdots$, $40-\log_3 5$



따라서 이들을 모두 더하면

$\{\log_3 5+(4-\log_3 5)\}+\{(4+\log_3 5)+(8-\log_3 5)\}$
$+\cdots+\{(36+\log_3 5)+(40-\log_3 5)\}$

$=4+12+20+\cdots+76$

$=\frac{10\times(4+76)}{2}$

$=400$

30. [출제의도] 두 수열의 일반항 사이의 관계를 추측하여 주어진 조건에 맞는 값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=6+(n-1)p$

수열 $\{b_n\}$의 일반항은 $b_n=6p^{n-1}$

수열 $\{b_n\}$의 모든 항이 수열 $\{a_n\}$의 항이 되려면 모든 자연수 n에 대하여 $6p^{n-1}=6+p(m-1)$인 자연수 m이 존재한다.

$p(m-1)=6p^{n-1}-6$

$m-1=\frac{6p^{n-1}-6}{p}=6p^{n-2}-\frac{6}{p}$

$\frac{6}{p}=6p^{n-2}-m+1$

p^{n-2} ($n\ge 2$)과 m은 모두 자연수이므로 $\frac{6}{p}$도 자연수이다. 따라서 p는 6의 약수이다.

$\therefore$ $p=2$, 3, 6 ($\because$ $p>1$)

그러므로 모든 자연수 p의 합은 $2+3+6=11$이다.

[다른 풀이]

$a_m=b_2$인 자연수 m이 존재하므로

$6+(m-1)p=6p$에서

$m-1=\frac{6(p-1)}{p}=6-\frac{6}{p}$

$\frac{6}{p}$이 자연수이어야 하므로 p는 6의 약수이다.

(i) $p=2$일 때

$a_m=4+2m$, $b_n=6\cdot 2^{n-1}$

(ii) $p=3$일 때

$a_m=3+3m$, $b_n=6\cdot 3^{n-1}$

(iii) $p=6$일 때

$a_m=6m$, $b_n=6^n$

(i), (ii), (iii)의 모든 경우 임의의 자연수 n에 대하여 $b_n=a_m$을 만족시키는 m이 존재하므로 수열 $\{b_n\}$의 모든 항은 수열 $\{a_n\}$의 항이 된다.

$\therefore$ $p=2$, 3, 6이고 모든 자연수 p의 합은 11이다.

2014학년도 대수능 9월 모의평가 수학영역 A형 정답 및 해설

1.
출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

$$4^{\frac{3}{2}}\times 8^{\frac{1}{3}}=(2^2)^{\frac{3}{2}}\times(2^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$=2^3\times 2=16$$

<답> ④

2.
출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

$$B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}-A$$
$$=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 B의 모든 성분의 합은
$3+2+1+1=7$

<답> ①

3.
출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x+1}=\frac{2}{3}$$

<답> ④

4.
출제의도 : 그래프와 행렬의 관계를 이해하는가?

그래프 G를 나타내는 행렬 M이 5차 정사각행렬이므로 그래프 G의 꼭짓점의 개수는 5이다.

$\therefore\ a=5$

행렬 M의 (i,j)성분과 (j,i)성분은 같으므로 가려진 부분 중 0인 성분은 $(1,4)$, $(3,4)$ 성분의 2개이다.

$\therefore\ b=9$

$\therefore\ a+b=5+9=14$

<답> ②

5.
출제의도 : 정적분을 구할 수 있는가?

$$\int_0^1(4x^3+a)dx=[x^4+ax]_0^1$$
$$=1+a=8$$

$\therefore\ a=7$

<답> ②

6.
출제의도 : 이항분포에서 평균을 구할 수 있는가?

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=\frac{n}{3}$$
$$\mathrm{E}(2X+5)=2\mathrm{E}(X)+5$$
$$=2\times\frac{n}{3}+5$$
$$=13$$

$\therefore\ n=12$

<답> ③

7.

출제의도 : 함수가 연속일 조건을 구할 수 있는가?

$x \le 1$ 또는 $x > 1$에서 $f(x)$는 각각 연속이므로 실수 전체의 집합에서 연속이 되기 위해서는 $x=1$에서 연속이어야 한다. 즉, $x=1$에서 극한값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} f(x)$$

$$1+2 = -1+a$$

$$\therefore\ a=4$$

<답> ⑤

8.

출제의도 : 로그의 성질과 점화식을 이해하고 있는가?

$$\log_2 a_{n+1} = 1 + \log_2 a_n$$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2 + \log_2 a_n$$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2a_n$$

$$\therefore\ a_{n+1} = 2a_n\,(n \ge 1)$$

$a_1 = 2$ 이므로 $a_n = 2^n\,(n \ge 1)$

$$\begin{aligned} a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_8 &= 2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots \times 2^8 \\ &= 2^{1+2+3+\cdots+8} \\ &= 2^k \end{aligned}$$

$$\therefore\ k = 1+2+3+\cdots+8 = \frac{8\times 9}{2} = 36$$

<답> ①

9.

출제의도 : 조건부 확률을 구할 수 있는가?

학생 50명 중에서 임의로 선택한 1명이 1학년 학생인 사건을 A, 주제 B를 고르는 사건을 B라 하면

$$p_1 = P(B|A) = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$p_2 = P(A|B) = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

$$\therefore\ \frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{5}$$

<답> ③

10.

출제의도 : 중복조합의 수를 이해하고 있는가?

구하는 순서쌍의 개수는

3부터 10까지의 8개의 자연수 중 중복을 허락하여 4개를 뽑는 조합의 수와 같으므로

$${}_{8+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_{11}\mathrm{C}_4 = \frac{11\times 10\times 9\times 8}{4\times 3\times 2\times 1} = 330$$

<답> ④

11.

출제의도 : 표본평균의 분포를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

상담 전화의 상담시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(20, 5^2)$을 따른다.

이때, 크기가 16인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$E(\overline{X})=20$

$V(\overline{X})=\frac{5^2}{16}=(\frac{5}{4})^2$

이므로 $\overline{X}$도 정규분포 $N(20,(\frac{5}{4})^2)$을 따른다.

$\therefore\ P(19\le\overline{X}\le 22)$

$=P(\frac{19-20}{\frac{5}{4}}\le Z\le\frac{22-20}{\frac{5}{4}})$

$=P(-0.8\le Z\le 1.6)$

$=P(0\le Z\le 0.8)+P(0\le Z\le 1.6)$

$=0.2881+0.4452=0.7333$

<답> ②

12.

출제의도 : 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 식을 증명할 수 있는가?

$a_k=2^k+\frac{1}{k}$이므로

$ka_{k+1}=2ka_k-\frac{k+2}{k+1}$

$=2k\left(2^k+\frac{1}{k}\right)-\frac{k+2}{k+1}$

$=\boxed{k2^{k+1}+2}-\frac{k+2}{k+1}$

$=k2^{k+1}+\boxed{\frac{k}{k+1}}$

이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식은 각각 $k2^{k+1}+2$, $\frac{k}{k+1}$이므로

$f(k)=k2^{k+1}+2,\ g(k)=\frac{k}{k+1}$

$\therefore f(3)\times g(4)=(3\times 2^4+2)\times\frac{4}{5}=40$

<답> ⑤

13.

출제의도 : 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

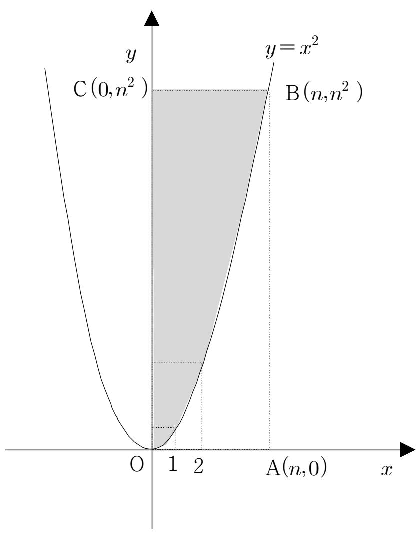
$$\int_0^4(x^2-\frac{1}{4}x^2)dx=\int_0^4(\frac{3}{4}x^2)dx$$

$$=[\frac{1}{4}x^3]_0^4=16$$

<답> ②

14.

출제의도 : 일반항 a_n을 추론하고 수열의 극한을 계산할 수 있는가?



직사각형 OABC 또는 그 내부에 있고 부등식 $y\ge x^2$을 만족하는 점의 개수를

점의 x좌표에 따라 구분하여 구하면 다음과 같다.

x좌표가 0일 때, n^2-0^2+1 개

x좌표가 1일 때, n^2-1^2+1 개

x좌표가 2일 때, n^2-2^2+1 개

$\vdots$

x좌표가 n일 때, n^2-n^2+1 개

$$\therefore\ a_n=\sum_{k=0}^{n}(n^2-k^2+1)$$

$$=n^2+1+\sum_{k=1}^{n}(n^2+1-k^2)$$

$$=n^2+1+n(n^2+1)-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{4n^3+3n^2+5n+6}{6}$$

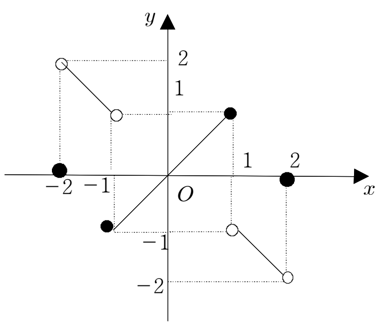
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+3n^2+5n+6}{6n^3}=\frac{2}{3}$$

<답> ③

15.

출제의도 : 함수의 그래프를 이용하여 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$$\therefore\ \lim_{x\to-1+0}f(x)+\lim_{x\to2-0}f(x)$$

$=-1+(-2)=-3$

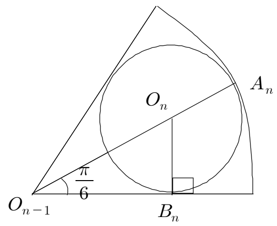
<답> ①

16.

출제의도 : 반복되는 도형에서 무한등비급수를 적용하여 그 합을 구할 수 있는가?

$$S_1=\pi-4\times\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$$

[그림 n]에서 제일 작은 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면



$$r_{n-1}=\overline{O_{n-1}A_n}=\overline{O_{n-1}O_n}+\overline{O_nA_n}$$

$$=\frac{\overline{O_nB_n}}{\sin\frac{\pi}{6}}+\overline{O_nA_n}$$

$$=2r_n+r_n$$

$$\therefore r_n=\frac{1}{3}r_{n-1}\ (n\geq2),\ \ r_1=1$$

따라서 [그림 n]에서 제일 작은 원의 개수는 4^{n-1}, 반지름의 길이는 $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 이므로

$$S_n=S_1+4\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times S_1+\cdots+4^{n-1}\times\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}^2\times S_1$$

$$=S_1+\frac{4}{9}\times S_1+\cdots+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\times S_1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{3}{5}\pi$$

<답> ③

17.
출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 식이 주어진 실생활 문제를 해결할 수 있는가?

10g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 8%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때, 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량은 4g 이므로

$$\log\frac{4}{10}=-1+k\log 8$$

$$3k\log 2=\log\frac{4}{10}+1=\log\left(\frac{4}{10}\times 10\right)$$
$$=\log 4=2\log 2$$

$\therefore\ k=\frac{2}{3}$

따라서, 20g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 27%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량을 x라 하면

$$\log\frac{x}{20}=-1+\frac{2}{3}\log 27=\log\frac{(27)^{\frac{2}{3}}}{10}=\log\frac{9}{10}$$

$$\frac{x}{20}=\frac{9}{10}$$

$\therefore\ x=18$

<답> ⑤

18.
출제의도 : 역행렬을 구하고 역행렬의 성질을 이해할 수 있는가?

ㄱ. $2A-A^2B=E$에서
$A(2E-AB)=E$
$\therefore\ A^{-1}=2E-AB$ (참)

ㄴ. $A^{-1}=2E-AB$ 에서 각 변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면
$E=2A-AAB$ …㉠
$A^{-1}=2E-AB$ 에서 각 변의 오른쪽에 행렬 A를 곱하면
$E=2A-ABA$ …㉡
㉠, ㉡에서 $AAB=ABA$ …㉢
㉢의 각 변의 왼쪽에 A의 역행렬 A^{-1}를 곱하면
$AB=BA$ (참)

ㄷ. $2A-A^2B=E$에서
$$A=\frac{1}{2}(E+A^2B)$$
$$=\frac{1}{2}(E+BA^2)(\because\ AB=BA)\ (\text{참})$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

<답> ⑤

19.
출제의도 : 정규분포를 따르는 확률변수의 확률을 구할 수 있는가?

확률변수 X는 정규분포 $N\left(\frac{3}{2},2^2\right)$을 따르므로

$$H(0)=P(0\le X\le 1)$$
$$=P\left(\frac{0-\frac{3}{2}}{2}\le Z\le\frac{1-\frac{3}{2}}{2}\right)$$
$$=P(-0.75\le Z\le -0.25)$$
$$=P(0.25\le Z\le 0.75)$$
$$=P(0\le Z\le 0.75)-P(0\le Z\le 0.25)$$
$$=0.2734-0.0987=0.1747$$

또한, $H(0)=H(2)$ 이므로
$$H(0)+H(2)=2\times H(0)=0.3494$$

<답> ①

20.

출제의도 : 지표와 가수의 성질을 이해하고 있는가?

$10^n < a < 10^{n+1}$에서

$n < \log a < n+1$

$\log a = n+\alpha \quad (0<\alpha<1)$라고 놓으면

$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\log a = \frac{1}{n}(n+\alpha) = 1+\frac{\alpha}{n}$

$\log a$와 $\log \sqrt[n]{a}$의 가수의 합이 정수이므로 $\alpha + \frac{\alpha}{n} = 1$

$\therefore \ \alpha = \frac{n}{n+1}$

또한 $(n+1)\log a = n^2+8$ 에서

$(n+1)(n+\alpha) = n^2+8$

$(n+1)\left(n+\frac{n}{n+1}\right) = n^2+8\left(\because \alpha = \frac{n}{n+1}\right)$

$2n = 8$

$\therefore \ n=4, \ \alpha = \frac{4}{5}$

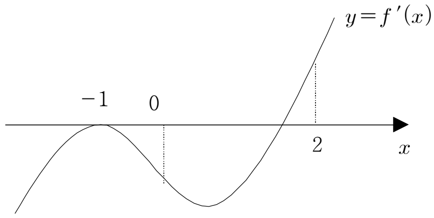
$\therefore \ \frac{\log a}{n} = \frac{4+\frac{4}{5}}{4} = \frac{6}{5}$

<답> ④

21.

출제의도 : 도함수 $f'(x)$를 이해하고 $f'(x)$를 통하여 $f(x)$의 증가와 감소를 판단할 수 있는가?

$f'(x) = (x+1)(x^2+ax+b)$이고 함수 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty, 0)$에서 감소하고 구간 $(2, \infty)$에서 증가하므로 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같아야 한다.



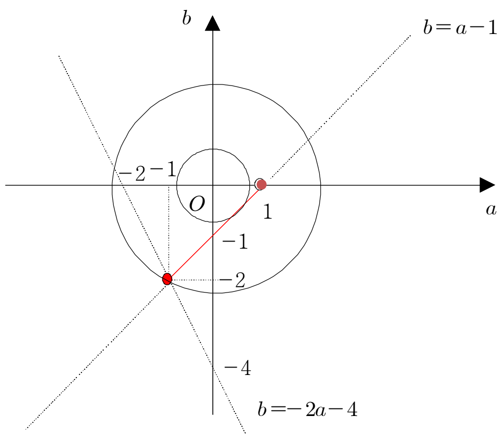
즉,

$(-1)^2-a+b=0, \ b=a-1 \cdots ㉠$

$f'(0) = b \le 0 \cdots ㉡$

$f'(2) = 3(4+2a+b) \ge 0, \ b \ge -2a-4 \cdots ㉢$

따라서, ㉠, ㉡, ㉢을 만족시키는 실수 a, b의 순서쌍을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



이때, $a^2+b^2=r^2 \cdots ㉣$라 하면 ㉣이 직선 $b=a-1$에 접할 때 r^2은 최소가 되고, ㉣이 점 $(-1,-2)$를 지날 때, r^2은 최대가 된다.

$M = (-1)^2+(-2)^2 = 5$

$m = (\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$

$\therefore \ M+m = \frac{11}{2}$

<답> ③

22.

출제의도 : 수열의 극한값을 계산할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+28n}-n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{28n}{\sqrt{n^2+28n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{28}{\sqrt{1+\frac{28}{n}}+1}$$

$$=14$$

<답> 14

23.

출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

$f'(x)=21x^2-a$ 이므로

$f'(1)=21-a=2$

$\therefore\ a=19$

<답> 19

24.

출제의도 : 행렬을 이용하여 연립일차 방정식의 해를 구할 수 있는가?

$A\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$=B\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $(\because\ AB=E)$

$=\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$

$\therefore \alpha=4$, $\beta=8$

$\therefore \alpha+\beta=4+8=12$

<답> 12

25.

출제의도 : 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

$(\log_3 x)^2-6\log_3\sqrt{x}+2=0$ 에서

$(\log_3 x)^2-3\log_3 x+2=0$

따라서, $\log_3 x=t$라 하면

$t^2-3t+2=0\cdots$㉠

이고 ㉠의 두 근은 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=\log_3\alpha\beta=3$

$\therefore\ \ \alpha\beta=3^3=27$

<답> 27

26.

출제의도 : 이항계수를 이용하여 수열의 일반항을 구하고 극한을 계산할 수 있는가?

$$a_n={}_nC_3\left(\frac{1}{n}\right)^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6n^3}=\frac{n^2-3n+2}{6n^2}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2}{n^2-3n+2}=6$$

<답> 6

27.

출제의도 : 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

$y' = 3x^2 + 2$ 이므로 접선의 방정식은

$y - 4 = 5(x+1)$, $y = 5x + 9$

따라서 곡선 $y = x^3 + 2x + 7$과 접선 $y = 5x + 9$의 교점의 x좌표는

$x^3 + 2x + 7 = 5x + 9$, $x^3 - 3x - 2 = 0$

$(x+1)^2(x-2) = 0$

$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$

즉, $a = 2$, $b = 19$ 이므로

$a + b = 21$

<답> 21

28.

출제의도 : 정적분과 미분법을 활용할 수 있는가?

$\int_0^1 f(t)dt = k$ (k는 상수)라고 하면

$\int_0^x f(t)dt = x^3 - 2x^2 - 2kx \cdots$ ㉠

㉠에 $x = 1$을 대입하면

$\int_0^1 f(t)dt = 1 - 2 - 2k = k$

$\therefore k = -\frac{1}{3}$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x) = 3x^2 - 4x - 2k$

$\quad = 3x^2 - 4x + \frac{2}{3}$

$\therefore f(0) = a = \frac{2}{3}$

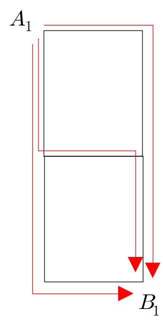
$\therefore 60a = 60 \times \frac{2}{3} = 40$

<답> 40

29.

출제의도 : 최단경로의 수를 구하여 규칙을 찾을 수 있는가?

[그림1]에서 최단거리로 가는 경로는 그림과 같다.



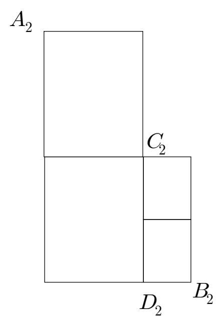
$\therefore\ a_1 = 3 = 2^2 - 1$

[그림2]에서 C_2, D_2 의 지점을 표시하면 최단거리로 가는 경로는

$A_2 \to C_2 \to B_2$

또는

$A_2 \to D_2 \to B_2$ (단, C_2를 지나지 않는다)



$\therefore\ a_2 = 2 \times 3 + 1 \times 1 = 7 = 2^3 - 1$

[그림3]에서 C_3, D_3, E_3 의 지점을 표시하면 최단거리로 가는 경로는

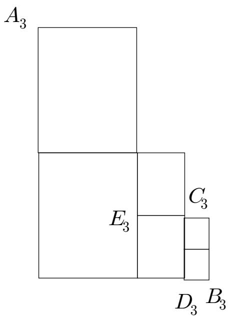
$A_3 \to C_3 \to B_3$

또는

$A_3 \to E_3 \to D_3$ (단, C_3을 지나지 않는다.)

또는

$A_3 \to D_3 \to B_3$ (단, C_3, E_3을 지나지 않는다.)



$\therefore\ a_3 = 2\times2\times3 + 2\times1 + 1\times1$

$= 15 = 2^4 - 1$

같은 방법으로 계속해서 나타내면

$a_n = 2^{n+1} - 1$

이므로 $a_7 = 2^8 - 1 = 255$

<답> 255

30.

출제의도 : 부등식의 성질을 이용하여 일반항을 구하고 분수꼴의 수열의 합을 구할 수 있는가?

$4^k - (2^n + 4^n)2^k + 8^n \le 1 \quad \cdots ㉠$

$(2^k - 2^n)(2^k - 2^{2n}) \le 1$

$f(k) = 2^k - 2^n$, $g(k) = 2^k - 2^{2n}$라고 하자.

i) $k < n$ 일 때

$f(k) < -1$, $g(k) < -1$ 이므로

$f(k)g(k) > 1$

ii) $n \le k \le 2n$ 일 때

$f(k) \ge 0$, $g(k) \le 0$ 이므로 $f(k)g(k) \le 1$

iii) $k > 2n$ 일 때

$f(k) > 1$, $g(k) > 1$ 이므로 $f(k)g(k) > 1$

따라서 부등식 ㉠을 만족하는 자연수 k는 $n, n+1, n+2, \cdots, 2n$이고 그 합은 첫째항이 n, 끝항이 $2n$, 항의 개수가 $n+1$인 등차수열의 합이므로

$$a_n = \frac{(n+1)(n+2n)}{2} = \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{20} \frac{2}{3n(n+1)}$$

$$= \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{21}\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{21}\right)$$

$$= \frac{40}{63}$$

$\therefore p = 63$, $q = 40$

$\therefore p + q = 63 + 40 = 103$

<답> 103

2013학년도 7월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

수학 영역

A형 정답

1	③	2	④	3	②	4	①	5	④
6	②	7	①	8	①	9	④	10	⑤
11	②	12	①	13	②	14	③	15	③
16	③	17	⑤	18	⑤	19	②	20	③
21	⑤	22	12	23	14	24	36	25	60
26	24	27	616	28	32	29	42	30	9

A형 해설

1. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_2\frac{4}{3}+\log_2 6=\log_2\left(\frac{4}{3}\cdot 6\right)=\log_2 8=3$

2. [출제의도] 행렬 계산하기

$2A+B=2\begin{pmatrix}5&0\\1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&2\\1&6\end{pmatrix}$

$\therefore$ 행렬의 모든 성분의 합은 20

3. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{5}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2}{n^2}}=2$$

4. [출제의도] 확률의 기본 성질 이해하기

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{12}$

5. [출제의도] 정적분 계산하기

$$\int_{-1}^{1}(3x^2+6x+7)dx$$
$$=2\int_0^1(3x^2+7)dx=2(1+7)=16$$

6. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$\frac{a_n}{n+1}=b_n$이라 하면 $a_n=(n+1)b_n$이고

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n+1)b_n}{3n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n+1)}{3n^2}\times\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=\frac{2}{3}\times 3=2$$

7. [출제의도] 접선의 방정식 이해하기

$f(x)=x^3+6x^2-11x+7$이라 하면

$f'(x)=3x^2+12x-11$ 이므로 $f'(1)=4$

접선의 방정식은 $y-3=4(x-1)$

$y=4x-1$

$\therefore m-n=4-(-1)=5$

8. [출제의도] 함수의 연속성 추론하기

ㄱ. $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to1-0}g(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)g(x)=2$ (참)

ㄴ. $f(3)g(3)=1\times2=2$,

$\lim\limits_{x\to3-0}f(x)g(x)=3,\ \lim\limits_{x\to3+0}f(x)g(x)=3$에서

$\lim\limits_{x\to3}f(x)g(x)=3$

$\lim\limits_{x\to3}f(x)g(x)\neq f(3)g(3)$ (거짓)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)g(x)=4$

ㄱ에 의하여 $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)g(x)=2$

$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)g(x)\neq\lim\limits_{x\to1+0}f(x)g(x)$이므로

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 극한값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

ㄴ에 의해 $x=3$에서도 불연속이므로

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1,\ x=3$에서 불연속이다. (거짓)

9. [출제의도] 무한급수와 정적분의 관계 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=6\int_1^2 f(x)dx=14$$

10. [출제의도] 무한급수와 나머지 정리를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$f(x)=a_nx^2+a_nx+2$ 라고 하면 $f(x)$를 $x-n$으로 나눈 나머지는

$f(n)=a_nn^2+a_nn+2=20$

$$a_n=\frac{18}{n(n+1)}=18\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}18\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=18\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=18$$

11. [출제의도] 도함수를 이용하여 속도와 위치 관계 이해하기

시각 t에서의 점 P의 속도는

$P'(t)=3t^2-18t+34$ 이므로,

$3t^2-18t+34=10$

$t^2-6t+8=(t-2)(t-4)=0$

$t=2$ 또는 $t=4$

$\therefore t=2$ 일 때 위치는 $P(2)=40$

12. [출제의도] 정적분 이해하기

$\int_0^1 tf(t)dt=k$라 하면, $f(x)=x^2-2x+k$

$\int_0^1 t(t^2-2t+k)dt=k$를 계산하면

$k=-\frac{5}{6}$

$f(x)=x^2-2x-\frac{5}{6}$

$\therefore f(3)=\frac{13}{6}$

13. [출제의도] 등차수열과 조합을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

1위 팀의 승리한 경기 수를 x라 하면

총 경기 수가 ${}_5\mathrm{C}_2\times9$ 이므로

$${}_5\mathrm{C}_2\times9=\frac{5(x+10)}{2}$$

$\therefore x=26$

14. [출제의도] 중복 조합을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

총 경기 수는 ${}_5\mathrm{C}_2\times9=90$,

주어진 두 팀(A와 B)가 승리할 것으로 예상되는 경기 수의 합은 60이고 나머지 3개의 팀의 승리할 것으로 예상되는 경기 수의 합은 30이므로 $x+y+z=30$

$x,\ y,\ z$가 모두 5이상 이므로

$x=x'+5,\ y=y'+5,\ z=z'+5$라 하면

$x'+y'+z'=15\,(x'\geq0, y'\geq0, z'\geq0)$

$\therefore {}_{3+15-1}\mathrm{C}_{15}={}_{17}\mathrm{C}_{15}={}_{17}\mathrm{C}_2=136$

15. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 증명과정 추론하기

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\leq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdots(\bigstar)$$

(i) $n=1$일 때

$\frac{1}{2}\leq\frac{1}{\sqrt{4}}$ 이므로 ($\bigstar$)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 ($\bigstar$)이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2k-1}{2k}\times\frac{2k+1}{2k+2}$$
$$\leq\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{1}{1+\boxed{\frac{1}{2k+1}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1+\boxed{\frac{1}{2k+1}}\right)^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1)\cdot\left(\boxed{\frac{1}{2k+1}}\right)+(3k+1)\cdot\left(\boxed{\frac{1}{2k+1}}\right)^2}}$$
$$<\frac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1)\cdot\left(\boxed{\frac{1}{2k+1}}\right)+\left(\boxed{2k+1}\right)\cdot\left(\boxed{\frac{1}{2k+1}}\right)^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ($\bigstar$)이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ($\bigstar$)이 성립한다.

$f(k)=\frac{1}{2k+1},\ g(k)=2k+1$

$\therefore f(4)\times g(13)=\frac{1}{9}\cdot27=3$

16. [출제의도] 수열의 규칙성 추론하기

$\{a_n\}$: 0, 1, 3, 7, $\cdots$ 이므로

$a_{n+1}=a_n+2^{n-1}$

$$a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}=2^{n-1}-1\ (n\geq2)$$
$$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(2^{n-1}-1)=\frac{2^{10}-1}{2-1}-10=1013$$

(별해) $a_n=(2^n-1)-2^{n-1}=2^{n-1}-1$

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(2^{n-1}-1)=\frac{2^{10}-1}{2-1}-10=1013$$

17. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$f'(x)=3x^2-4x-4$이므로

$f(x)=x^3-2x^2-4x+C$

$f(2)=0$ 이므로

$f(2)=-8+C=0\ \therefore C=8$

$f(x)=(x+2)(x-2)^2$이므로

구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^{2}(x^3-2x^2-4x+8)dx=\frac{64}{3}$$

18. [출제의도] 행렬의 성질 추론하기

$B=\frac{1}{2}(A-E)$이므로

ㄱ. $AB=\frac{1}{2}A(A-E)=\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{2}A$

$BA = \frac{1}{2}(A-E)A = \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A$

$\therefore AB = BA$ (참)

ㄴ. $A^2 - 2A = E$ 이므로

$A^2 - 2A + E = (A-E)^2 = 2E$

$\frac{1}{2}(A-E)(A-E) = B(A-E) = E$

$\therefore B^{-1} = A - E$ (참)

ㄷ. $A^{-1} = A - 2E$ 이므로

$B(A - A^{-1})B^{-1} = B(2E)B^{-1} = 2E$ (참)

19. [출제의도] 조건부 확률을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

임의로 선택한 상자에서 공을 하나 꺼낼 때, 상자 A에서 공을 꺼낼 사건을 X, 상자 B에서 공을 꺼낼 사건을 Y, 꺼낸 공이 검은 공일 사건을 Z라 하면, 구하는 값은

$$\mathrm{P}(Y|Z) = \frac{\mathrm{P}(Y\cap Z)}{\mathrm{P}(Z)} = \frac{\mathrm{P}(Y\cap Z)}{\mathrm{P}(X\cap Z)+\mathrm{P}(Y\cap Z)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{5}$$

20. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$b = \left(\frac{1+0.32}{\log_2 l^3}\right)\times R$ …… ㉠

$4b = \left(\frac{1+k}{\log_2 l}\right)\times R$ …… ㉡

㉠과 ㉡에 의하여

$4 = \frac{3(1+k)}{1.32}$ $\therefore k = 0.76$

21. [출제의도] 부정적분을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$f(x) = x(x-\alpha)^2$이고,

$g'(x) = (xf(x))'$이므로

$g(x) = xf(x) + C$

$g(x) = x^2(x-\alpha)^2 + C$

$g'(x) = 2x(x-\alpha)^2 + 2x^2(x-\alpha)$

$= 2x(x-\alpha)(2x-\alpha)$

$y = g(x)$는 $x=0$, $x=\alpha$에서 극솟값,

$x = \frac{\alpha}{2}$에서 극댓값을 갖는다.

$g\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 81$, $g(0) = g(\alpha) = 0$

이를 이용하여 α와 $g(x)$를 구하면

$\alpha = 6$, $g(x) = x^2(x-6)^2$

$\therefore g\left(\frac{\alpha}{3}\right) = g(2) = 64$

(별해) 함수 $f(x)$를 구하면

$f(x) = x(x-\alpha)^2$이므로,

$f'(x) = (x-\alpha)^2 + 2x(x-\alpha)$

$g'(x) = f(x) + xf'(x)$이므로

$g'(x) = 4x^3 - 6\alpha x^2 + 2\alpha^2 x$

$= 2x(x-\alpha)(2x-\alpha)$

$y = g(x)$는 $x=0$, $x=\alpha$에서 극솟값,

$x = \frac{\alpha}{2}$에서 극댓값을 갖는다.

$g\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 81$, $g(0) = g(\alpha) = 0$

이를 이용하여 α와 $g(x)$를 구하면

$\alpha = 6$, $g(x) = x^2(x-6)^2$

$\therefore g\left(\frac{\alpha}{3}\right) = g(2) = 64$

22. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x\to2}\frac{6x^2-24}{x^2-2x} = \lim_{x\to2}\frac{6(x+2)(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x\to2}\frac{6(x+2)}{x} = 12$$

23. [출제의도] 그래프와 행렬의 성질 이해하기

그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은 그래프에서 변의 개수의 2배이므로 행렬의 모든 성분의 합은 14

24. [출제의도] 함수의 미분가능성 이해하기

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 연속이므로

$-4 + 2a + 2 = 4 + b$ $\therefore b = 2a - 6$

$f'(x) = \begin{cases} -2x+a & (x>2) \\ 2 & (x<2) \end{cases}$ 이고

$f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로 $-4+a=2$

따라서 $a=6$, $b=6$

$\therefore ab = 36$

25. [출제의도] 이항계수의 성질 이해하기

$(x-2)^6$의 전개식의 일반항

${}_6\mathrm{C}_r\, x^{6-r}(-2)^r$에서

x^4의 계수는 $r=2$인 경우이므로

${}_6\mathrm{C}_2(-2)^2 = 60$

26. [출제의도] 수열의 성질 이해하기

$x^{\frac{1}{\alpha}} = y^{-\frac{1}{\beta}} = z^{\frac{2}{\gamma}} = k$라고 하면,

$x = k^\alpha$, $y^{-1} = k^\beta$, $z^2 = k^\gamma$ 이고

α, β, γ가 등차수열이면

k^α, k^β, k^γ가 등비수열이므로

$(k^\beta)^2 = k^\alpha k^\gamma$

$\therefore (y^{-1})^2 = xz^2$

$\frac{1}{y^2} = xz^2$

$\therefore 16xz^2 + 9y^2 = \frac{16}{y^2} + 9y^2$

$\geq 2\sqrt{\frac{16}{y^2}\cdot 9y^2} = 24$

(단, 등호는 $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $xz^2 = \frac{3}{4}$일 때 성립한다.)

$\therefore 16xz^2 + 9y^2$의 최솟값은 24

27. [출제의도] 수열의 성질을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$a_1 = 22$

$a_{n+1} = a_n + 2(n+2) + 4(n+2)^2 - 4(n+1)^2$

$a_{n+1} = a_n + 10n + 16$

$a_n = 22 + \sum_{k=1}^{n-1}(10k+16) = 5n^2 + 11n + 6$ $(n \geq 2)$

$\therefore a_{10} = 616$

(별해) 도형 T_n에서

위와 아래에서 바라본 넓이는 각각

$1+2+\cdots+n+(n+1)$,

정면과 뒷면에서 바라본 넓이는 각각

$2(n+1)^2$ 이므로

$a_n = 2\{1+2+\cdots+(n+1)\} + 4(n+1)^2$

$= (n+1)(n+2) + 4(n+1)^2$

$= 5n^2 + 11n + 6$

$\therefore a_{10} = 616$

28. [출제의도] 함수의 연속성 이해하기

함수 $f(x)g(x)$가 모든 실수에서 연속이 되기 위해서는 $x=2$에서 연속이 되어야 하므로

$\lim_{x\to2} f(x)g(x) = f(2)g(2)$를 만족하여야 한다.

$\lim_{x\to2} f(x)g(x) = \lim_{x\to2}\frac{2g(x)}{x-2} = f(2)g(2)$이므로

$g(2) = 0$

$g(x) = a(x-2)(x-\alpha)$라고 하면,

$\lim_{x\to2} f(x)g(x) = \lim_{x\to2} 2a(x-\alpha) = f(2)g(2) = 0$

$\therefore \alpha = 2$

$g(x) = a(x-2)^2$ 이고 $g(0) = 8$

$\therefore a = 2$

$g(x) = 2(x-2)^2$

$\therefore g(6) = 2(6-2)^2 = 32$

29. [출제의도] 상용로그의 성질 이해하기

$\log x$의 지표를 n이라 하면

$\log 10x = 1 + \log x$이므로

$\log 2x$, $\log 4x$, $\log 6x$, $\log 8x$, $\log 10x$의 지표는 각각 n 또는 $n+1$

지표가 $n+1$인 것이 m개라고 하면

$(5-m)n + m(n+1) = 5n + m = 12$,

$\therefore n = 2, m = 2$

$2 \leq \log 6x < 3$, $3 \leq \log 8x < 4$이므로

$100 \leq 6x < 1000$, $1000 \leq 8x < 10000$

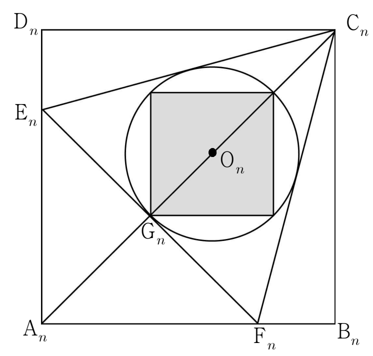
$\frac{1000}{8} \leq x < \frac{1000}{6}$

이를 만족하는 자연수 x의 개수는

$166 - 125 + 1 = 42$

30. [출제의도] 무한급수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

그림과 같이 정사각형 R_n의 꼭짓점을 각각 A_n, B_n, C_n, D_n이라 하고, 문제의 조건에 따라 그린 정삼각형의 꼭짓점을 각각 C_n, E_n, F_n이라 하자.



정사각형 R_n의 한 변의 길이를 a_n, 정삼각형 $\mathrm{C}_n\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n$의 한 변의 길이를 b_n이라 하자.

$\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{G}_n} + \overline{\mathrm{G}_n\mathrm{A}_n} = \sqrt{2}\,a_n$

$\frac{\sqrt{3}}{2}b_n + \frac{1}{2}b_n = \sqrt{2}\,a_n$

$b_n = (\sqrt{6} - \sqrt{2})a_n$

원 O_n의 반지름의 길이 r_n은

$r_n = \frac{\sqrt{3}}{2}b_n \times \frac{1}{3}$

정사각형 R_{n+1}의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}\,r_n$이므로

$a_{n+1} = \sqrt{2}\,r_n = \frac{\sqrt{6}}{6}b_n = \frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{6} - \sqrt{2})a_n$

$\therefore a_{n+1} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}a_n$

수열$\{S_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$인 등비수열이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+6\sqrt{3}}{11}$

$\therefore a + b = 9$

2014학년도 대수능 6월 모의평가 수학영역 A형 정답 및 해설

1.
출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

$$4^{\frac{1}{2}} \times 27^{\frac{1}{3}}$$
$$= (2^2)^{\frac{1}{2}} \times (3^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$= 2 \times 3 = 6$$

<답> ③

2.
출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

$$2A - B = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

이므로 모든 성분의 합은 9이다.

<답> ④

3.
출제의도 : 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5 \times 7^{n+1} + 3}{7^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ 5 \times 7 + 3\left(\frac{1}{7}\right)^n \right\}$$
$$= 5 \times 7 + 3 \times 0 = 35$$

<답> ⑤

4.
출제의도 : 그래프와 행렬의 관계를 이해하는가?

행의 모든 성분의 합은 행에 해당하는 꼭짓점에 연결된 변의 개수이다.
그러므로 변의 개수가 3개인 꼭짓점은 2개이다.

<답> ②

5.
출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 로그값을 구할 수 있는가?

$$\log_5(6-\sqrt{11}) + \log_5(6+\sqrt{11})$$
$$= \log_5(6-\sqrt{11})(6+\sqrt{11})$$
$$= \log_5\{6^2 - (\sqrt{11})^2\}$$
$$= \log_5(36-11)$$
$$= \log_5 25$$
$$= \log_5 5^2$$
$$= 2\log_5 5 = 2$$

<답> ②

6.
출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{2h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(1+3h) - f(1)}{3h} \times \frac{3}{2} \right\}$$
$$= \frac{3}{2} f'(1)$$

이때, $f'(x) = 3x^2 - 1$이므로

$$\frac{3}{2} f'(1) = \frac{3}{2} \times 2 = 3$$

<답> ③

7.

출제의도 : 등비중항을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

a_1, a_5, a_9는 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_1a_9 = a_5^2 = 4$

a_2, a_5, a_8은 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_5^2 = a_2a_8 = 4$

a_4, a_5, a_6은 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_5^2 = a_4a_6$

$\therefore\ a_2a_8 + a_4a_6 = 4+4 = 8$

<답> ①

8.

출제의도 : 연립일차방정식을 행렬을 이용하여 풀 수 있는가?

$x=0$, $y=0$이외의 해를 가져야 하므로 행렬 $\begin{pmatrix} t & -2 \\ 3 & t-7 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는다. 즉,

$t(t-7) - 3\cdot(-2) = 0$

$t^2 - 7t + 6 = 0$

$(t-1)(t-6) = 0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=6$

따라서, 모든 실수 t의 값의 합은

$1+6=7$

<답> ④

9.

출제의도 : 함수의 극한의 성질을 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-3}{x-2} = 5$ 에서

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to2}\{f(x)-3\}=0$ 에서 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=3$

$$\therefore\ \lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)-3)\}\{f(x)+3\}}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\dfrac{f(x)-3}{x-2}\times\{f(x)+3\}}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}}\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to2}\{f(x)+3\}}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}}\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to2}f(x)+3}$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3+3}$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$$

<답> ⑤

10.

출제의도 : 함수의 연속성을 이해하고 있는가?

$x>1$일 때, $x^n>1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{n+1}+3x^n}{x^n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2x+3}{1+\dfrac{1}{x^n}}$$

$$=2x+3$$

그러므로

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x \le 1) \\ 2x+3 & (x>1) \end{cases}$$

따라서 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \to 1-0} (x+a) = \lim_{x \to 1+0} (2x+3) = 1+a$$

$$1+a=5=1+a$$

$$\therefore\ a=4$$

<답> ②

11.

출제의도 : 함수의 그래프를 이해하여 극한값과 함수의 연속성을 판단할 수 있는가?

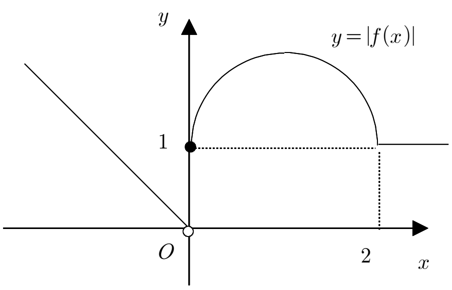
ㄱ. $x \to +0$일 때 $f(x) \to 1$ 이므로

$\lim_{x \to +0} f(x)=1$ (참)

ㄴ. $x \to 2-0$일 때 $f(x) \to 1$ 이므로

$\lim_{x \to 2-0} f(x)=1$ (거짓)

ㄷ. 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음과 같다.



$\therefore\ \lim_{x \to 2} |f(x)| = |f(2)| = 1$

따라서, 함수 $|f(x)|$는 $x=2$에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

<답> ③

12.

출제의도 : 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 알고 있는가?

$n=1$일 때,

$$a_1 = S_1 = -9$$

$n \ge 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2-10n) - \{(n-1)^2 - 10(n-1)\} \\ &= 2n-11 \end{aligned}$$

그러므로

$$a_n = 2n-11$$

이때, $a_n < 0$에서

$$2n-11<0$$

$$n < \frac{11}{2} = 5.5$$

따라서, 자연수 n은 1, 2, 3, 4, 5로 5개이다.

<답> ①

13.

출제의도 : 함수의 그래프를 이해하여 주어진 함수가 연속이 될 조건을 구할 수 있는가?

(i) $g(0)=f(0)\{f(0)+k\}$

$=2(2+k)=2k+4$

(ii) $\lim_{x \to +0} g(x)$

$=\lim_{x \to +0} f(x)\{f(x)+k\}$

$=\lim_{x \to +0} f(x) \times \lim_{x \to +0} \{f(x)+k\}$

$=0 \times k = 0$

(iii) $\lim_{x \to -0} g(x)$

$= \lim_{x \to -0} f(x)\{f(x)+k\}$

$= \lim_{x \to -0} f(x) \times \lim_{x \to -0} \{f(x)+k\}$

$= 2 \times (2+k) = 2k+4$

(i), (ii), (iii)에 의하여 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되어야 하므로

$2k+4=0$

$\therefore\ k=-2$

<답> ①

14.

출제의도 : 합성함수를 이용하여 무한등비급수에 관련된 문제를 풀 수 있는가?

$a_1=1$

$a_2 = f(f(a_1)) = f(f(1)) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}+2$

$a_3 = f(f(a_2)) = f\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

$\quad = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 2$

$\cdots$

$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \cdots + 2$

$\quad = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

따라서,

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}$

$\quad = \frac{2}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3}$

<답> ④

15.

출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식이 주어진 실생활 문제를 해결할 수 있는가?

A지역에서 지면으로부터 12m와 36m인 높이에서 풍속이 각각 2(m/초)와 8(m/초)이므로

$8 = 2 \times \left(\frac{36}{12}\right)^{\frac{2}{2-k}}$

$4 = 3^{\frac{2}{2-k}} \cdots$ ㉠

B지역에서 지면으로부터 10m와 90m인 높이에서 풍속이 각각 a(m/초)와 b(m/초)이므로

$b = a \times \left(\frac{90}{10}\right)^{\frac{2}{2-k}}$

$\quad = a \times 9^{\frac{2}{2-k}}$

$= a \times (3^2)^{\frac{2}{2-k}}$

$= a \times \left(3^{\frac{2}{2-k}}\right)^2$

$= a \times 4^2 = 16a$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ \frac{b}{a} = 16$

<답> ③

16.

출제의도 : 좌표평면위의 점의 움직임을 수열을 이용하여 구할 수 있는가?

점 O를 P_0라 하면 선분 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$에 포함된 길이가 $\sqrt{2}$인 대각선의 개수는 n개다.

그러므로 점 Q가 점 P_n까지 움직일 때, 대각선의 개수는

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

이때, 대각선의 개수가 55개이므로

$$\frac{n(n+1)}{2}=55$$

$\therefore\ n=10$

그러므로 점 Q는 점 P_{10}에 있다.

한편, 점 P_{2n}의 y좌표는 $-n$이므로 점 P_{10}의 y좌표는 -5이다.

<답> ①

17.

출제의도 : 두 개의 접선이 서로 평행할 조건을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

$f(x)=x^3-3x^2+x+1$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x+1$

이때, 점 A의 x좌표가 3이므로 점 B의 x좌표를 $k(k\neq3)$라 하면 두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하므로

$f'(k)=f'(3)$

즉, $3k^2-6k+1=3\times3^2-6\times3+1$에서

$k^2-2k-3=0$

$(k-3)(k+1)=0$

$\therefore\ k=-1\ (\because k\neq3)$

따라서, 점 B의 좌표는 $(-1,-4)$이므로 점 B에서의 접선의 방정식은

$y-(-4)=10\{x-(-1)\}$

$y=10x+6$

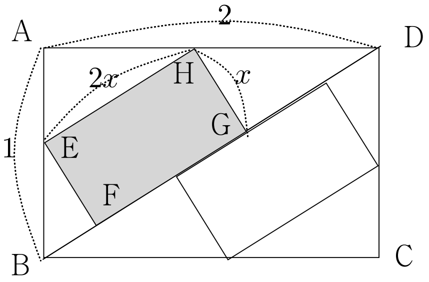
그러므로 y절편은 6이다.

<답> ②

18.

출제의도 : 도형의 넓이를 무한등비급수를 이용하여 구할 수 있는가?

아래 그림과 같이 R_1에서 사각형의 각 꼭짓점을 E, F, G, H라 하고 긴 변의 길이를 $2x$라 하자.



$\overline{BD}=\sqrt{5}$이므로 직각삼각형 ABD에서

$\cos\angle ADB=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\angle ADB=\frac{1}{\sqrt{5}}$

한편, 직각삼각형 HGD에서

$$\sin\angle ADB=\frac{\overline{HG}}{\overline{HD}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{x}{\overline{HD}}$$

$\therefore\ \overline{HD}=\sqrt{5}x\quad\cdots$㉠

또, 직각삼각형 AEH에서

$$\cos\angle AHE=\frac{\overline{AH}}{\overline{EH}}$$

이때, $\angle AHE=\angle ADB$이므로

$$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{\overline{AH}}{2x}$$

$\therefore\ \overline{AH}=\frac{4}{\sqrt{5}}x\quad\cdots$㉡

㉠과 ㉡에서

$\overline{AD}=\overline{AH}+\overline{HD}$

$$2=\sqrt{5}x+\frac{4}{\sqrt{5}}x$$

$2=\frac{9}{\sqrt{5}}x$

$\therefore\ x=\frac{2\sqrt{5}}{9}$

그러므로 R_1의 색칠된 사각형의 넓이는

$x\cdot 2x=2x^2=\frac{40}{81}$

또, 사각형 ABCD와 사각형 EFGH의 길이의 비는 $1:x$ 즉, $1:\frac{2\sqrt{5}}{9}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{20}{81}$이다.

마찬가지로 색칠된 사각형의 넓이의 비는 같으므로 구하는 극한값은

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{40}{81}}{1-\frac{20}{81}}=\frac{40}{61}$$

<답> ④

19.

출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구할 수 있는가?

$b_n=\frac{n-1}{n}a_n$이므로

$b_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_{n+1}$

따라서,

$a_{n+1}=\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}a_n+\frac{n+1}{n}2^n$에서

$\frac{n}{n+1}a_{n+1}=\frac{n-1}{n}a_n+2^n$

이므로

$b_{n+1}=b_n+\boxed{2^n}$

이때, $b_{n+1}-b_n=2^n$ 이므로

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k$

$=0+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-2\ (n\geq 2)\cdots$㉠

그런데, ㉠에 $n=1$을 대입하면 $b_1=0$이므로

$b_n=\boxed{2^n-2}\ (n\geq 1)$

그러므로

$$a=\begin{cases}2 & (n=1)\\ \frac{n}{n-1}\times\left(\boxed{2^n-2}\right) & (n\geq 2)\end{cases}$$

따라서 $f(n)=2^n$, $g(n)=2^n-2$ 이므로

$f(5)+g(10)$

$=2^5+(2^{10}-2)$

$=32+1022=1054$

<답> ⑤

20.

출제의도 : 함수의 그래프에 관련된 문제를 지수방정식과 로그 부등식을 이용하여 풀 수 있는가?

점 $\mathrm{A}(a,2^a)$와 점 B의 y좌표가 같으므로

$15\cdot 2^{-x}=2^a$

양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 15+(-x)=a$

$\therefore\ x=\log_2 15-a$

그러므로

$\overline{\mathrm{AB}}=a-\left(\log_2 15-a\right)$

$=2a-\log_2 15$

$1<\overline{\mathrm{AB}}<100$에서

$1<2a-\log_2 15<100$

$1+\log_2 15<2a<100+\log_2 15$

한편 $\log_2 2^3<\log_2 15<\log_2 2^4$이므로

4. ×××$< 2a < 103.$×××

따라서, 자연수 a는 3이상 51이하이므로 구하는 개수는 49개다.

<답> ④

21.

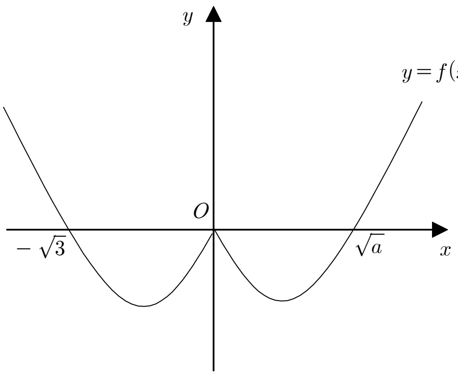
출제의도 : 극댓값을 가질 조건을 이용하여 함수를 정하고 함숫값을 구할 수 있는가?

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0)\end{cases}$$ 에서

(i) $a>0$ 인 경우

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0)\end{cases}$$
$$=\begin{cases} ax(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x) & (x<0) \\ x(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a}) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

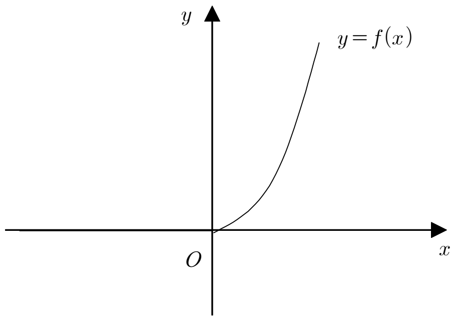


따라서, 함수 $f(x)$의 극댓값은 $x=0$에서 존재하지만 극댓값은 5가 아니다.

(ii) $a=0$ 인 경우

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0)\end{cases}$$
$$=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ x^3 & (x\geq 0)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

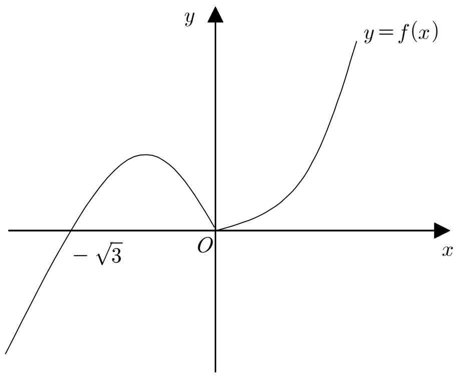


따라서, 함수 $f(x)$의 극댓값은 존재하지 않는다.

(iii) $a<0$ 인 경우

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0)\end{cases}$$
$$=\begin{cases} -ax(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) & (x<0) \\ x(x^2-a) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서, $x<0$에서 함수 $f(x)$의 극댓값이 존재하므로 $x<0$일 때,

$f'(x)=a(3-3x^2)=3a(1-x)(1+x)$

이고 $f'(x)=0$ 에서

$x=-1$ ($\because$ $x<0$)

즉, $x=-1$에서 극대이므로

$$f(-1)=a\{3(-1)-(-1)^3\}$$
$$=-2a=5$$

$\therefore$ $a=-\dfrac{5}{2}$

$\therefore$ $f(2)=2^3-(-\dfrac{5}{2})\times 2=13$

<답> ⑤

22.

출제의도 : 등차수열에 관련된 문제를 해결할 수 있는가?

등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$a_3=8$에서

$a+2d=8 \quad \cdots$㉠

또, $a_6-a_4=12$에서

$(a+5d)-(a+3d)=12$

$2d=12$

$\therefore \ d=6 \quad \cdots$㉡

㉠과 ㉡에서 $a=-4$, $d=6$이므로

$a_6=(-4)+(6-1)\times 6$

$=26$

<답> 26

23.

출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

$f(x)=5x^2+3x-1$ 에서 $f'(x)=10x+3$ 이므로

$f'(1)=13$

<답> 13

24.

출제의도 : 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

$3n^2+2n<a_n<3n^2+3n$

에서 각 변을 n^2으로 나누면

$$3+\frac{2}{n}<\frac{a_n}{n^2}<3+\frac{3}{n}$$

이때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{3}{n}\right)=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=3$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\times\frac{a_n}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}=5\times 3=15$$

<답> 15

25.

출제의도 : 함수의 극한의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+a}-2}{x-2}=b$에서

$x\to 2$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to 2}(\sqrt{x+a}-2)=\sqrt{2+a}-2=0$

$\sqrt{a+2}=2$, $a+2=4$

$\therefore \ a=2$

$$\therefore \ b=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

$\therefore\ 10a+4b=10\times2+4\times\frac{1}{4}=21$

<답> 21

26.

출제의도 : 미분계수의 기하학적 의미를 알고 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

곡선 $y=f(x)$위에 점 $(2,1)$이 있으므로

$f(2)=1$

또, 접선의 기울기가 2이므로

$f'(2)=2$

한편, $g(x)=x^3f(x)$에서

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

이므로

$g'(2)=12f(2)+8f'(2)$

$\quad=12\cdot1+8\cdot2=28$

<답> 28

27.

출제의도 : 로그방정식을 풀 수 있는가?

$x^{\log_2 x}=8x^2\cdots$㉠에서

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 8x^2$

$(\log_2 x)(\log_2 x)=\log_2 8+\log_2 x^2$

$(\log_2 x)^2=\log_2 2^3+2\log_2 x$

$(\log_2 x)^2-2\log_2 x-3=0$

이때, $\log_2 x=t$라 하면

$t^2-2t-3=0\cdots$㉡

따라서, ㉠의 두 실근이 α, β이므로 ㉡의 두 실근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta$

$=\log_2\alpha\beta=2$

$\therefore\ \alpha\beta=2^2=4$

<답> 4

28.

출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열을 이해하고 활용할 수 있는가?

(가)에서 $a_{n+2}=a_n-4$이므로 $a_2=p$라 놓으면

$a_1=7$

$a_2=p$

$a_3=a_1-4=7-4=3$

$a_4=a_2-4=p-4$

$a_5=a_3-4=-1$

$a_6=a_4-4=p-8$

(나)에서 $a_{n+6}=a_n$이므로

$\sum_{k=1}^{50}a_k=8\sum_{k=1}^{6}a_k+a_1+a_2$

$=8\{7+p+3+(p-4)+(-1)+(p-8)\}$

$\quad+7+p$

$=8(3p-3)+7+p$

$=25p-17=258$

$25p=275$

$\therefore\ p=11$

<답> 11

29.

출제의도 : 역행렬이 존재할 조건을 이

용하여 행렬에 대한 관계식을 간단히 한 후 행렬의 성분의 합을 구할 수 있는가?

조건 (가)에서

$A^3-E=(A-E)(A^2+A+E)=O$

이고 조건 (나)에서 $A-E$의 역행렬이 존재하므로

$(A-E)^{-1}(A-E)(A^2+A+E)=O$

$A^2+A+E=O$

$\therefore\ A^2=-A-E$

따라서,

$(A-E)^2$

$=A^2-2A+E$

$=(-A-E)-2A+E$

$=-3A$

이므로

$(A-E)^6=(-3A)^3$

$=-27A^3$

$=-27E$

$\therefore\ (A-E)^{60}=(-27E)^{10}$

$=27^{10}E$

$=27^{10}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}27^{10}&0\\0&27^{10}\end{pmatrix}$

따라서, 행렬 $(A-E)^{60}$의 모든 성분의 합은

$27^{10}+27^{10}=2\times27^{10}$

$=2\times(3^3)^{10}$

$=2\times3^{30}$

$\therefore\ a=1,\ b=30$

$\therefore\ a+b=31$

<답> 31

30.

출제의도 : 지표와 가수를 이해하고 활용할 수 있는가?

자연수 m의 지표와 가수를 각각 $n_1,\ \alpha_1$, 자연수 n의 지표와 가수를 각각 $n_2,\ \alpha_2$라 하면

$\mathrm{P}_m(n_1,\ \alpha_1),\ \mathrm{P}_n(n_2,\ \alpha_2)$

(나)에서 $\overline{\mathrm{P}_m\mathrm{P}_n}=\sqrt{1+(\log2)^2}$이므로

$\overline{\mathrm{P}_m\mathrm{P}_n}^2=1+(\log2)^2$

$(n_2-n_1)^2+(\alpha_2-\alpha_1)^2=1+(\log2)^2$

이때, n_1, n_2은 정수이고 $0\le\alpha_1<1$ $0\le\alpha_2<1$이므로

$|n_2-n_1|=1,\ |\alpha_2-\alpha_1|=\log2$

한편, $m<n$이므로

$n_2=n_1+1$

(i) $\alpha_2>\alpha_1$일 때,

$\alpha_2=\alpha_1+\log2$이므로

$\log m=n_1+\alpha_1$ …㉠

$\log n=n_1+1+\alpha_1+\log2$ …㉡

㉡에서 ㉠을 변변 빼면

$\log\dfrac{n}{m}=1+\log2$

$\log\dfrac{n}{m}=\log20$

$\therefore\ \dfrac{n}{m}=20$

$\therefore\ n=20m$

이 조건을 만족하는 순서쌍 $(m,\ n)$은

$(1,\ 20)$, $(2, 40)$, $(3,\ 60)$, $(4,\ 80)$

로 4개이다.

(ii) $\alpha_2 < \alpha_1$일 때,

$\alpha_2 = \alpha_1 - \log 2$이므로

$\log m = n_1 + \alpha_1$ …ⓒ

$\log n = n_1 + 1 + \alpha_1 - \log 2$ …ⓓ

ⓓ에서 ⓒ을 변변 빼면

$$\log \frac{n}{m} = 1 - \log 2$$

$$\log \frac{n}{m} = \log 5$$

$$\therefore\ \frac{n}{m} = 5$$

$\therefore\ n = 5m$

이 조건을 만족하는 순서쌍 $(m,\ n)$은

$(2,\ 10)$, $(3, 15)$, $(4, 20)$, $(5,\ 25)$, $(6,\ 30)$, $(7,\ 35)$, $(8,\ 40)$, $(9,\ 45)$

로 8개이다.

따라서, 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 12개다.

<답> 12

2013학년도 4월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[A 형]

1	①	**2**	③	**3**	②	**4**	①	**5**	⑤
6	⑤	**7**	①	**8**	⑤	**9**	③	**10**	④
11	④	**12**	③	**13**	③	**14**	②	**15**	①
16	⑤	**17**	④	**18**	④	**19**	④	**20**	③
21	②	**22**	99	**23**	4	**24**	23	**25**	14
26	15	**27**	13	**28**	3	**29**	150	**30**	252

1. [출제의도] 지수법칙을 알고 계산하기

$2\times 4^{-\frac{3}{2}}=2\times 2^{-3}=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$

2. [출제의도] 행렬의 실수배의 뜻을 알고 계산하기

$\dfrac{1}{2}A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\ \frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $\dfrac{1}{2}A$의 모든 성분의 합은 3

3. [출제의도] 무한등비수열의 극한 이해하기

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n-2}{3^{n+1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}-\frac{2}{3^{n+1}}}{1+\frac{1}{3^{n+1}}}=\frac{2}{3}$

4. [출제의도] 함수의 연속의 뜻 이해하기

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 한다.

$f(2)=\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+1)=3$

따라서 $a=3$

5. [출제의도] 등차수열의 일반항 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 이 수열의 일반항

$a_n=3+(n-1)d$

$a_5=a_3+4$에서 $3+4d=(3+2d)+4$이므로 $d=2$

$\therefore\ a_n=2n+1$

$a_n=2n+1>100$이므로 $n>\dfrac{99}{2}=49.5$

따라서 자연수 n의 최솟값은 50

6. [출제의도] 무한등비수열의 수렴 이해하기

수열 $\left\{\left(\dfrac{2x-1}{5}\right)^n\right\}$이 수렴하므로 $-1<\dfrac{2x-1}{5}\le 1$

$-5<2x-1\le 5,\ -2<x\le 3$

따라서 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$이므로 x의 값의 합은 5

7. [출제의도] 지수부등식 이해하기

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2+1}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2(x+2)}$에서 $x^2+1<2(x+2)$

$x^2-2x-3<0,\ (x+1)(x-3)<0$

$\therefore\ -1<x<3$

따라서 $\alpha=-1,\ \beta=3$이므로 $\beta-\alpha=4$

8. [출제의도] 로그의 뜻을 알고 이해하기

$a=\log_3\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\log_3(2+\sqrt{3})$이므로

$3^a=2+\sqrt{3},\ 3^{-a}=2-\sqrt{3}$

$\dfrac{3^a-3^{-a}}{3^a+3^{-a}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

9. [출제의도] 로그부등식 이해하기

$x>4,\ x>1$이므로 $x>4$ …… ㉠

$\log_2(x-4)^2\le\log_2 4(x-1)$

$(x-4)^2\le 4(x-1)$

$x^2-12x+20\le 0,\ (x-2)(x-10)\le 0$

$2\le x\le 10$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $4<x\le 10$

따라서 자연수 x는 5, 6, 7, 8, 9, 10이므로 x의 개수는 6

10. [출제의도] 수열의 극한의 성질 이해하기

(가)에서 $\dfrac{6(2n^3+3)}{n(n+1)(2n+1)}<a_n<2b_n$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6(2n^3+3)}{n(n+1)(2n+1)}=6$이고,

(나)에서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=3,\ \lim_{n\to\infty}2b_n=6$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=6$

11. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$x-1=t$라 하면

$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}f(x-1)=\lim_{t\to+0}f(t)=0$

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to -1}f(x)+\lim_{x\to 1+0}f(x-1)=1+0=1$

12. [출제의도] 등비중항 이해하기

$\mathrm{A}(k,3\sqrt{k}),\ \mathrm{B}(k,\sqrt{k}),\ \mathrm{C}(k,0)$에서

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{k},\ \overline{\mathrm{OC}}=k,\ \overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{k}$

$\sqrt{k},\ k,\ 3\sqrt{k}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$k^2=\sqrt{k}\cdot 3\sqrt{k},\ k^2=3k,\ k(k-3)=0$

따라서 $k=3(\because\ k>0)$

13. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\displaystyle\lim_{k\to+0}\frac{\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{BC}}}=\lim_{k\to+0}\frac{\sqrt{k^2+9k}-3\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}-\sqrt{k}}$

$\displaystyle=\lim_{k\to+0}\frac{\sqrt{k+9}-3}{\sqrt{k+1}-1}=\lim_{k\to+0}\frac{k(\sqrt{k+1}+1)}{k(\sqrt{k+9}+3)}$

$\displaystyle=\lim_{k\to+0}\frac{\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+9}+3}=\frac{1}{3}$

14. [출제의도] 등비수열의 합을 이용하여 문제해결하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1a_2=a_{10}$에서 $a\cdot ar=ar^9$

$a>0,\ r>0$이므로 $a=r^8$ …… ㉠

$a_1+a_9=20$에서 $a+ar^8=20$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a+a^2=20,\ a^2+a-20=0$

$(a+5)(a-4)=0$이므로 $a=4(\because\ a>0)$

㉠에 $a=4$를 대입하면 $r^8=4,\ r^4=2$이고

$r^{20}=(r^8)^2r^4=4^2\times 2=32$

$(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)(a_1-a_3+a_5-a_7+a_9)$

$=\dfrac{a\{1-(r^2)^5\}}{1-r^2}\cdot\dfrac{a\{1-(-r^2)^5\}}{1-(-r^2)}$

$=\dfrac{a(1-r^{10})}{1-r^2}\cdot\dfrac{a(1+r^{10})}{1+r^2}=\dfrac{a^2(1-r^{20})}{1-r^4}$

$=\dfrac{4^2(1-32)}{1-2}=16\times 31=496$

15. [출제의도] 로그방정식을 이용하여 문제해결하기

어느 맥동변광성의 반지름의 길이가 $5.88\times 10^6(\mathrm{km})$, 표면온도가 $5000(\mathrm{K})$일 때의 절대등급이 0.7이었고, 이 맥동변광성이 수축하여 반지름의 길이가 $R(\mathrm{km})$, 표면온도가 $7000(\mathrm{K})$일 때의 절대등급이 -0.3이었으므로

$-0.3-0.7=5\log\dfrac{5.88\times 10^6}{R}+10\log\dfrac{5000}{7000}$

$-1=5\log\dfrac{5.88\times 10^6}{R}+10\log\dfrac{5}{7}$

$-0.2=\log\dfrac{5.88\times 10^6}{R}+2\log\dfrac{5}{7}$

$=\log\dfrac{\frac{588}{100}\times 10^6\times 25}{49R}$

$=\log\dfrac{3\times 10^6}{R}$

$10^{-0.2}=\dfrac{3\times 10^6}{R}$

따라서 $R=3\times 10^{6.2}$

16. [출제의도] 행렬의 연산을 활용하여 추론하기

ㄱ. $B^2=B-E$에서 $B-B^2=E$

$B(E-B)=(E-B)B=E$이므로 $B^{-1}=E-B$

$\therefore$ 행렬 B가 역행렬을 갖는다. (참)

ㄴ. $A^2+B=E$에서 $B=E-A^2$이므로

$AB=A-A^3$이고 $BA=A-A^3$이다.

$\therefore\ AB=BA$ (참)

ㄷ. $A^2=E-B,\ B^2=B-E$에서

$A^4=(E-B)^2=E-2B+B^2$

$=E-2B+B-E=-B$

$A^6=A^4A^2=B^2-B=-E$

$\therefore\ A^{12}=(A^6)^2=E$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. [출제의도] 행렬을 이용하여 문제해결하기

문제의 조건을 만족시키는

연립일차방정식 $\begin{cases}x+y=500\\7x+2y=2500\end{cases}$을 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix}1&1\\7&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}500\\2500\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}2&-1\\-7&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}500\\2500\end{pmatrix}$

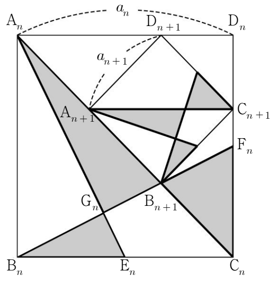
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=100\begin{pmatrix}-2&1\\7&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

$\therefore\ a=1,\ b=7$

따라서 $a+b=8$

18. [출제의도] 무한급수를 활용하여 추론하기

그림과 같이 n번째 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 하자.



$3a_{n+1}=\sqrt{2}a_n,\ a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}a_n$이므로 $S_{n+1}=\dfrac{2}{9}S_n$

$\triangle A_1B_1E_1 \backsim \triangle B_1G_1E_1$에서 $\overline{A_1E_1}:\overline{B_1E_1}=\sqrt{5}:1$이므로

$\triangle A_1B_1E_1 : \triangle B_1G_1E_1 = 5:1$

$\therefore\ \triangle B_1G_1E_1 = \frac{1}{5}$

점 B_2는 $\triangle B_1C_1D_1$의 무게중심이므로

$\triangle C_1F_1B_2 = \frac{1}{6}\triangle B_1C_1D_1 = \frac{1}{3}$

$\triangle A_1E_1C_1$과 $\triangle B_1C_1F_1$의 공통부분이 $\square E_1C_1B_2G_1$이고, $\triangle A_1E_1C_1 = \triangle B_1C_1F_1$이므로

$\triangle A_1G_1B_2 = \triangle B_1E_1G_1 + \triangle C_1F_1B_2 = \frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{8}{15}$

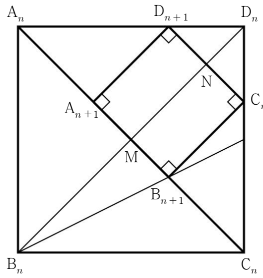
$S_1 = \triangle A_1G_1B_2 + \triangle B_1E_1G_1 + \triangle C_1F_1B_2$

$\quad = 2\triangle A_1G_1B_2 = \frac{16}{15}$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{16}{15}$이고 공비가 $\frac{2}{9}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{16}{15}}{1-\frac{2}{9}} = \frac{48}{35}$$ 이다.

[참고] $\square A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$은 정사각형이다.



정사각형 $A_nB_nC_nD_n$에서 두 선분 A_nC_n, $C_{n+1}D_{n+1}$이 선분 B_nD_n과 만나는 점을 각각 M, N이라 하자.

$\triangle B_{n+1}C_nC_{n+1}$이 직각이등변삼각형이므로

$\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = \overline{C_nB_{n+1}}$이고

점 B_{n+1}은 $\triangle B_nC_nD_n$의 무게중심이므로

$\overline{C_nB_{n+1}} = 2\,\overline{B_{n+1}M}$

$\therefore\ \overline{B_{n+1}C_{n+1}} = 2\,\overline{B_{n+1}M}$ ...... ㉠

$\angle B_{n+1} = \angle C_{n+1} = 90^\circ$, $\overline{A_nC_n} \perp \overline{B_nD_n}$로

$\square MB_{n+1}C_{n+1}N$이 직사각형이므로

$\overline{B_{n+1}M} = \overline{C_{n+1}N}$,

$\triangle NC_{n+1}D_n$과 $\triangle ND_nD_{n+1}$이 직각이등변삼각형이므로

$\overline{C_{n+1}N} = \overline{ND_{n+1}}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = \overline{C_{n+1}D_{n+1}}$

따라서 $\square A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$은 정사각형

19. [출제의도] 지수함수의 그래프의 대칭이동과 평행이동을 활용하여 문제해결하기

함수 $y=2^{x-2}$의 역함수는 $y=\log_2 x+2$이고,

함수 $y=\log_2 x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동시키면

함수 $y=\log_2(x+2)+a+2$의 그래프가 된다.

두 함수 $f(x)=2^{x-2}$, $g(x)=\log_2(x+2)+a+2$의 그래프가 직선 $y=1$과 만나는 점은

각각 $A(2,1)$, $B(2^{-a-1}-2,\ 1)$이다.

선분 AB의 중점의 좌표가 $(8,1)$이므로

$\frac{2+2^{-a-1}-2}{2}=8$, $2^{-a-1}=16=2^4$, $-a-1=4$

따라서 $a=-5$

20. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하여 추론하기

$p=-10$, $f(n)=2^{n-1}$, $g(n)=2^n-1$

따라서

$\frac{2\times p\times g(10)}{5\times f(3)}=\frac{2\times(-10)\times(2^{10}-1)}{5\times 2^2}=-1023$

21. [출제의도] 함수의 연속의 뜻을 이해하여 추론하기

$f(x)=\begin{cases}1 & (x\neq 0)\\ 2 & (x=0)\end{cases}$, $g(t)=\begin{cases}0 & (t\le -1)\\ 1 & (-1<t<1)\\ 0 & (t\ge 1)\end{cases}$

ㄱ. $g(0)=1$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 1-0} g(x)+\lim\limits_{x\to -1+0} g(x)=1+1=2$ (참)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to -0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to +0}\frac{g(x)}{f(x)}=1$, $\frac{g(0)}{f(0)}=\frac{1}{2}$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}\neq\frac{g(0)}{f(0)}$

$\therefore$ 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

22. [출제의도] 여러 가지 수열 이해하기

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

이므로 $n+1=100$

따라서 $n=99$

23. [출제의도] 연립방정식과 행렬 이해하기

연립일차방정식 $\begin{pmatrix}1-k & 2\\ 4 & 3-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$가

$x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지므로

$(1-k)(3-k)-8=0$, $k^2-4k-5=0$

$\therefore$ 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실근의 합은 4

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 4

24. [출제의도] 로그함수의 그래프의 성질 이해하기

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+a)$는 밑이 $\frac{1}{3}$이므로

x가 증가할 때 y가 감소한다.

$\therefore$ $x=4$일 때 최댓값 -3을 갖는다.

$-3=\log_{\frac{1}{3}}(4+a)$, $4+a=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=27$

따라서 $a=23$

25. [출제의도] 함수의 극한의 성질을 활용하여 문제해결하기

(가), (나)에서 함수 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는 일차함수 또는 이차함수이므로

$f(x)=(ax+b)(x-1)$이라 하면

(나)에서 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(ax+b)(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(ax+b)=1$

$a+b=1$ ...... ㉠

(다)에서 $f(2)=4$이므로 $2a+b=4$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $a=3$, $b=-2$

$\therefore$ $f(x)=(3x-2)(x-1)$

따라서 $f(3)=14$

26. [출제의도] 지수방정식과 로그방정식을 활용하여 문제해결하기

$\log_2(x-2)-\log_2 y=1$에서 $\log_2\frac{x-2}{y}=1$

$\frac{x-2}{y}=2$, $2y=x-2$ ...... ㉠

$2^x-2\cdot 4^{-y}=7$에서 $2^x-2\cdot 2^{-2y}=7$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $(2^x)^2-7\cdot 2^x-8=0$

$2^x=t\,(t>0)$라 하면 $t^2-7t-8=0$

$(t+1)(t-8)=0$, $t=8\ (\because\ t>0)$

$2^x=8$이므로 $x=3$, ㉠에 대입하면 $y=\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로 $10\alpha\beta=15$

27. [출제의도] 알고리즘과 순서도를 이해하여 추론하기

n	S
1	$3 = 3$
3	$3+3 = 6$
5	$3+3+5 = 11$
7	$3+3+5+7 = 18$
9	$3+3+5+7+9 = 27$
11	$3+3+5+7+9+11 = 38$
13	$3+3+5+7+9+11+13 = 51$

따라서 인쇄되는 n의 값은 13

28. [출제의도] 행렬의 정의를 이해하여 문제해결하기

$a_{ij}+a_{ji}=0$에서 $a_{ij}=-a_{ji}$이므로

$a_{11}=0$, $a_{12}=-a_{21}$, $a_{22}=0$

$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a_{12}\\ -a_{12} & 0\end{pmatrix}$

$b_{ij}-b_{ji}=0$에서 $b_{ij}=b_{ji}$이므로 $b_{12}=b_{21}$

$B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{12} & b_{22}\end{pmatrix}$

$2A-B=2\begin{pmatrix}0 & a_{12}\\ -a_{12} & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{12} & b_{22}\end{pmatrix}$

$\quad=\begin{pmatrix}-b_{11} & 2a_{12}-b_{12}\\ -2a_{12}-b_{12} & -b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$

$-b_{11}=1$에서 $b_{11}=-1$, $-b_{22}=4$에서 $b_{22}=-4$

$2a_{12}-b_{12}=2$ ...... ㉠, $-2a_{12}-b_{12}=-2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $a_{12}=1$, $b_{12}=0$

$\therefore$ $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$

$A^2-B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^2-B의 $(2,2)$성분은 3

29. [출제의도] 지표와 가수의 성질을 이해하여 문제해결하기

(가)에서 (x의 자릿수) < (y의 자릿수) < (z의 자릿수)

(나)에서 자연수 x, y, z의 숫자 배열은 모두 같다.

(다)에서 자연수 x는 두 자릿수 또는 세 자릿수이다.

ⅰ) x가 두 자릿수인 경우

① $y=10x$, $z=10^2x$일 때,

$x+y+z=x+10x+10^2x=111x$

$111x=15873$인 두 자릿수 자연수 x는 존재하지 않는다.

② $y=10x$, $z=10^3x$일 때,

$x+y+z=x+10x+10^3x=1011x$

$1011x=15873$인 자연수 x는 존재하지 않는다.

③ $y=10^2x$, $z=10^3x$일 때,

$x+y+z=x+10^2x+10^3x=1101x$

$1101x=15873$인 자연수 x는 존재하지 않는다.

ⅱ) x가 세 자릿수인 경우

$y=10x$, $z=10^2x$일 때,

$x+y+z=x+10x+10^2x=111x=15873$

$\therefore$ $x=143$, $y=1430$, $z=14300$

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $x=143$, $y=1430$, $z=14300$

따라서 $x+f(y)+f(z)=143+3+4=150$

30. [출제의도] 여러 가지 수열을 이해하여 추론하기

자연수 n에 대하여 $2n$행의 첫 번째 원 안에 써넣은 수를 차례로 나열하여 만든 수열 2, 6, 12, 20, ⋯ 을

$\{a_n\}$이라 하면 이 수열의 일반항

$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+2) = n^2 + n$이므로

20행의 첫 번째 원 안에 써 넣은 수 $a_{10} = 110$

20행에 나열된 원 안에 써 넣은 수는

110부터 연속되는 21개의 자연수이므로 그 합

$S = \frac{21(2 \times 110 + 20)}{2} = 2520$

따라서 $\frac{1}{10}S = 252$

2014학년도 대학수학능력시험 대비

2013학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 A형 정답

1	①	2	④	3	⑤	4	③	5	③
6	②	7	④	8	⑤	9	①	10	③
11	④	12	①	13	⑤	14	⑤	15	②
16	②	17	①	18	④	19	②	20	③
21	①	22	7	23	17	24	11	25	10
26	125	27	540	28	65	29	31	30	61

해 설

1. [출제의도] 로그의 성질을 알고, 로그의 값을 계산한다.

$6\log_3\sqrt{3}=6\log_3 3^{\frac{1}{2}}$

$=6\times\frac{1}{2}\log_3 3$

$=6\times\frac{1}{2}$

$=3$

2. [출제의도] 행렬의 곱셈과 뺄셈의 뜻을 알고, 이를 계산한다.

$AB-A$ 를 계산하면 다음과 같다.

$AB-A$

$=\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4&4\\2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&3\\1&1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $AB-A$ 의 모든 성분의 합은 6 이다.

[다른 풀이]

행렬에 대한 분배법칙을 이용하여 계산하면 다음과 같다.

$AB-A$

$=A(B-E)$

$=\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&3\\1&1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $AB-A$ 의 모든 성분의 합은 6 이다.

3. [출제의도] 수렴하는 수열의 극한에 관한 성질을 알고, 이를 계산한다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n}{(2n+1)(2n-1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n}{4n^2-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{4-\frac{1}{n^2}}$

$=\frac{5}{4}\quad\left(\because \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0\right)$

4. [출제의도] 등비수열의 일반항을 이해하고, 항의 값을 구한다.

주어진 수열의 첫째항을 a 라 하면

$a_3=a\cdot 2^2=4a$

$a_4=a\cdot 2^3=8a$

이므로 주어진 조건에서

$36=a_3+a_4=4a+8a=12a$

$\therefore\ a=3$

$\therefore\ a_6=3\times 2^5=96$

5. [출제의도] 지수의 성질을 이해하고, 지수방정식의 해를 구한다.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}=\sqrt[3]{4}$

이때 $\sqrt[3]{4}=4^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$ 이므로 주어진 방정식을 고쳐 쓰면 다음과 같다.

$2^{-(x-1)}=2^{\frac{2}{3}}$

지수함수는 일대일함수이므로

$-(x-1)=\frac{2}{3}$

$\therefore\ x=\frac{1}{3}$

6. [출제의도] 무한등비급수를 이해하고, 무한급수의 합을 구한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{3^n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{4}$

[다른 풀이]

주어진 무한급수의 합을 S 라 하고, 이를 덧셈으로 연결하여 나타내면

$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{3^n}$

$=0+\frac{2}{3^2}+0+\frac{2}{3^4}+0+\frac{2}{3^6}+0+\cdots$

$=\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{3^6}+\frac{2}{3^8}+\cdots$

이므로 이 무한급수는 첫째항이 $\frac{2}{9}$ 이고 공비가 $\frac{1}{9}$ 인 무한등비급수의 합과 같다.

$\therefore\ S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{3^n}=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4}$

7. [출제의도] 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬을 이해한다.

주어진 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬을 A 라고 하자. 주어진 그래프의 꼭짓점의 개수가 6 이므로 행렬 A 는 6 차 정사각행렬이고, 그 성분은 0 과 1 로 구성되어 있다. 즉, 0 과 1 의 개수의 합은 36 이다. 그런데 행렬 A 의 성분의 총합은 그래프의 변의 개수의 두 배이고 변의 개수가 7 이므로 행렬 A 의 성분 중 1 의 개수는 14 이다.

따라서 $n=14,\ m=36-14=22$ 이므로 $m-n=8$ 이다.

[다른 풀이]

주어진 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 한 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&1\\0&1&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0&1\\0&1&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

위 행렬의 성분 중에서 1 의 개수는 14 이고, 0 의 개수는 22 이다.

$\therefore\ n=14,\ m=22$

$\therefore\ m-n=8$

8. [출제의도] 등차수열과 계차수열을 이해하고, 항의 값을 구한다.

$b_n=a_{n+1}-a_n$ 이라 하면

수열 $\{b_n\}$ 은 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열이고, 조건 (나)에서 $\{b_n\}$ 은 등차수열이다.

조건 (가)에서

$b_1=a_2-a_1=2$

$b_2=a_3-a_2=4$

이므로 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 2 이고 공차가 2 인 등차수열이다.

$\therefore\ b_n=2n$

따라서 a_n 은 다음과 같다.

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

$=1+\sum_{k=1}^{n-1}2k$

$=1+2\times\frac{(n-1)n}{2}$

$=n^2-n+1\ \ (n\ge 2)$

$\therefore\ a_8=57$

[다른 풀이]

$a_{n+1}-a_n$ 은 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열의 제n 항이다.

주어진 조건에서

$a_2-a_1=2$

$a_3-a_2=4$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열은 공차가 2 인 등차수열이므로 이를 이용하면

$a_4-a_3=6$ 에서 $a_4=13$

$a_5-a_4=8$ 에서 $a_5=21$

$a_6-a_5=10$ 에서 $a_6=31$

$a_7-a_6=12$ 에서 $a_7=43$

$a_8-a_7=14$ 에서 $a_8=57$

9. [출제의도] 행렬을 이용하여 전력량 요금에 대한 실생활 문제를 해결한다.

전력량 요금은 다음과 같다.

$(100\times 59)+\{(a-100)\times 122\}$

주어진 행렬에서

$\begin{pmatrix}100&a\\0&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}59\\122\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}100\times 59+a\times 122\\0\times 59+x\times 122\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}100\times 59+a\times 122\\x\times 122\end{pmatrix}$

성분의 합과 전력량 요금이 같으므로

$x=-100$

10. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이해하고, 직선의 기울기를 구한다.

$n=3$ 일 때,

점 A_3 이 함수 $f(x)=2^x$ 위에 있으므로

$A_3(\log_2 3,\ 3)$

점 B_3 의 좌표를 $(b,\ 3)$ 이라고 하면 $y=2^{x-1}$ 위에 있으므로

$2^{b-1}=3$

$b-1=\log_2 3$ 이므로

$b=\log_2 3+1=\log_2(3\times 2)=\log_2 6$

즉, $B_3(\log_2 6,\ 3)$ 이다.

그리고 점 C_3 의 좌표를 $(\log_2 6,\ c)$ 라고 하면

점 $C_3(\log_2 6,\ c)$ 이 곡선 $y=2^x$ 위에 있으므로

$c=2^{\log_2 6}=6$

따라서 $C_3(\log_2 6,\ 6)$ 이므로 직선 A_3C_3 의 기울기는

$\frac{6-3}{\log_2 6-\log_2 3}$

$= \dfrac{3}{\log_2 \dfrac{6}{3}}$

$= \dfrac{3}{\log_2 2}$

$= 3$

[다른 풀이]

곡선 $y=2^{x-1}$은 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것이므로

$\overline{A_3B_3}=1$

점 B_3의 x좌표와 점 C_3의 y좌표를 각각 a, b라 하면 $2^{a-1}=3$이므로

$b=2^a=2\cdot 2^{a-1}=2\times 3=6$

따라서 $\overline{B_3C_3}=6-3=3$이므로

직선 A_3C_3의 기울기는 $\dfrac{3}{1}=3$이다.

11. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.

점 A_n이 곡선 $y=2^x$ 위에 있으므로 $A_n(\log_2 n, n)$이다. 점 B_n의 좌표를 (b_n, n)이라 하면 점 B_n이 곡선 $y=2^{x-1}$위의 점이므로 $2^{b_n-1}=n$이다.

$b_n-1=\log_2 n$, $b_n=1+\log_2 n=\log_2 2n$

$\therefore$ $B_n(\log_2 2n, n)$

또, 점 C_n이 곡선 $y=2^x$ 위에 있으므로

$C_n(\log_2 2n, 2n)$

따라서 $\overline{A_nB_n}=1$, $\overline{B_nC_n}=2n-n=n$이므로

$\overline{A_nC_n}=\sqrt{n^2+1}$이다.

$\therefore$ $f(n)=\sqrt{n^2+1}$, $g(n)=n$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty} n\{f(n)-g(n)\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1}$

$=\dfrac{1}{2}$

12. [출제의도] 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 주어진 값을 구한다.

$75=5^{-\frac{1}{x}}$, $3=5^{\frac{2}{y}}$이므로 $5^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{75}$, $5^{\frac{2}{y}}=3$이다.

$5^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}}=5^{\frac{1}{x}}\times 5^{\frac{2}{y}}=3\times\dfrac{1}{75}=\dfrac{1}{25}=5^{-2}$

$\therefore$ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=-2$

13. [출제의도] 무한급수의 수렴과 일반항의 극한의 관계를 이해하고, 극한값을 구한다.

무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n-n}{n}$이 수렴하므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n-n}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{n}-1\right)=0$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=1$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+a_n}{5n-a_n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+\dfrac{a_n}{n}}{5-\dfrac{a_n}{n}}$

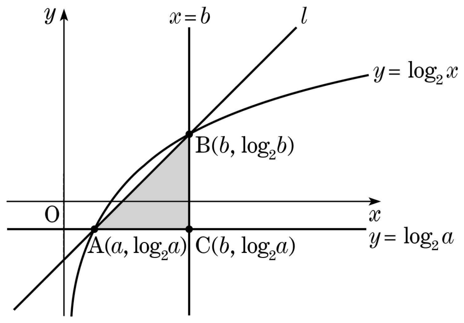
$=\dfrac{5+1}{5-1}$

$=\dfrac{3}{2}$

[참고]

무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$이다.

14. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이에 대한 문제를 해결한다.



두 점 $A(a, \log_2 a)$, $B(b, \log_2 b)$가 기울기가 1인 직선 위에 있으므로 $\dfrac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}=1$이다.

즉, $\log_2 b-\log_2 a=b-a$ ⋯ ㉠

직선 l과 두 직선 $x=b$, $y=\log_2 a$로 둘러싸인 부분은 밑변의 길이가 $b-a$이고, 높이는 $\log_2 b-\log_2 a$인 직각삼각형이다.

$\dfrac{1}{2}(b-a)(\log_2 b-\log_2 a)=2$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{1}{2}(b-a)\times(b-a)=2$

$(b-a)^2=4$, 즉, $b-a=2$ ($\because$ $a<b$) ⋯ ㉢

또, $\log_2 b-\log_2 a=2$에서 $\log_2\dfrac{b}{a}=2$이므로

$b=4a$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣에서 $a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{8}{3}$

$\therefore$ $a+b=\dfrac{10}{3}$

15. [출제의도] 계차수열의 성질을 이용하여 일반항을 구할 수 있음을 증명한다.

$b_n=a_{n+1}-a_n$이라 하면

$b_1=b_2=1$이고 $b_{n+2}=b_n+1$ $(n\ge 1)$이다.

따라서 수열 $\{b_{2n-1}\}$, $\{b_{2n}\}$은 모두 첫째항이 1이고, 공차가 1인 등차수열이다. 즉,

$b_{2n-1}=b_{2n}=n$ $(n\ge 1)$

이다.

그러므로 $n\ge 2$일 때 a_n은 다음과 같다.

i) n이 홀수일 때, $n=2m-1$이라 하면

$$\begin{aligned} a_{2m-1} &= a_1+\sum_{k=1}^{2m-2}b_k \\ &= a_1+\sum_{k=1}^{m-1}(b_{2k-1}+b_{2k}) \\ &= 0+\sum_{k=1}^{m-1}k+\sum_{k=1}^{m-1}k \\ &= 2\times\frac{(m-1)m}{2} \\ &= m^2-m \end{aligned}$$

ii) n이 짝수일 때, $n=2m$이라 하면

$$\begin{aligned} a_{2m} &= a_1+\sum_{k=1}^{2m-1}b_k \\ &= a_1+\sum_{k=1}^{m-1}(b_{2k-1}+b_{2k})+b_{2m-1} \\ &= 0+\sum_{k=1}^{m-1}2k+m \\ &= 2\times\frac{(m-1)m}{2}+m \\ &= m^2 \end{aligned}$$

따라서 $f(n)=n$, $g(m)=m^2$이다.

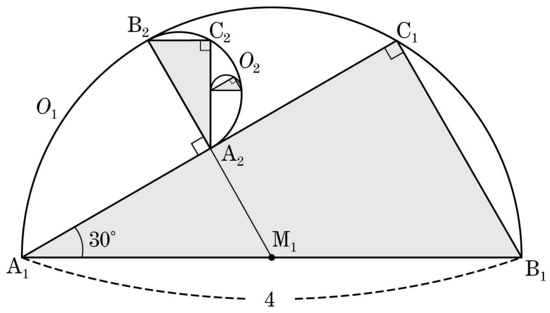
$\therefore$ $f(10)+g(10)=110$

16. [출제의도] 도형의 닮음비를 이용하여 무한등비급수 문제를 해결한다.

점 C_1이 반원 O_1 위에 있으므로 삼각형 $A_1B_1C_1$은 선분 A_1B_1이 빗변인 직각삼각형이다.

따라서 $\overline{A_1C_1}=4\cos 30°=2\sqrt{3}$, $\overline{B_1C_1}=4\sin 30°=2$이다.

$\therefore$ $S_1=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}$



이때 반원 O_1의 지름의 중점을 M_1이라 하면 선분 A_2B_2는 선분 A_1C_1의 수직이등분선이고 현의 수직이등분선은 원의 중심을 지나므로 선분 A_2B_2의 연장선은 반원 O_1의 지름의 중점 M_1을 지난다.

$\overline{M_1A_2}=2\sin 30°=1$이므로

$\overline{A_2B_2}=2-1=1$

$S_2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

마찬가지로, 삼각형 $A_nB_nC_n$은 $\overline{A_nB_n}$이 빗변인 직각삼각형이고, 삼각형 $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$의 빗변은

$\overline{A_{n-1}B_{n-1}}=\dfrac{1}{4}\times\overline{A_nB_n}$

두 닮은 삼각형의 길이의 비는 $4:1$이므로 넓이의 비는 $16:1$이다.

따라서 $\{S_n\}$은 첫째항이 $2\sqrt{3}$이고 공비가 $\dfrac{1}{16}$인 등비수열이다.

$\therefore$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{2\sqrt{3}}{1-\dfrac{1}{16}}$

$=\dfrac{32\sqrt{3}}{15}$

17. [출제의도] 수열의 합과 일반항과의 관계를 이해하고, 수열의 합을 구한다.

$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{k+1}=n^2+n$을 전개하면

$\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\dfrac{a_3}{4}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=n^2+n$ ⋯ ㉠

㉠에 의해 2이상의 자연수 n에 대하여

$\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\dfrac{a_3}{4}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{n}=(n-1)^2+(n-1)$ ⋯ ㉡

㉠-㉡에서

$\dfrac{a_n}{n+1}$

$=n^2+n-\{(n-1)^2+(n-1)\}$

$=2n$

$\therefore$ $a_n=2n(n+1)$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$

한편 ㉠에서 $\dfrac{a_1}{2}=1^2+1$, $a_1=4$

$\therefore$ $a_n=2n(n+1)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

$\sum\limits_{n=1}^{10}\dfrac{1}{a_n}$

$=\sum\limits_{n=1}^{10}\dfrac{1}{2n(n+1)}$

$=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{10}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{11}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{11}\right)$

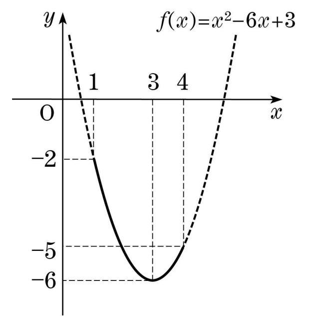
$=\dfrac{5}{11}$

18. [출제의도] 이차함수와 지수함수의 합성함수의 최

대・최소를 이해한다.

$f(x)=x^2-6x+3=(x-3)^2-6$이므로

$1\le x\le 4$에서 $-6\le f(x)\le -2$이다.



ⅰ) $0<a<1$일 때

$g(x)=a^x$는 감소함수이므로

$(g\circ f)(x)$는 $f(x)=-6$일 때 최댓값을 갖고,

$f(x)=-2$일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $a^{-6}=27$이므로

$a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

∴ $m=a^{-2}=3$

ⅱ) $a>1$일 때

$g(x)=a^x$는 증가함수이므로

$(g\circ f)(x)$는 $f(x)=-2$일 때 최댓값을 갖고,

$f(x)=-6$일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $a^{-2}=27$이므로

$a=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

그런데 $a>1$을 만족시키지 않으므로 이 경우는 불가능하다.

ⅰ), ⅱ)에서 $(g\circ f)(x)$의 최솟값은 3이다.

19. [출제의도] 주어진 수열의 규칙성을 추론하여 두 항의 차를 구한다.

$a_2-a_1=98-1$

$a_3-a_2=95-2\times 2$

$a_4-a_3=91-3\times 3$

⋮

이므로 X를 제13행에 적힌 수 중 오른쪽 끝에 적힌 수라고 하면

$a_{13}-a_{12}=X-12^2$임을 추론할 수 있다.

이때,

$$X=100-(2+3+\cdots+13)$$
$$=101-(1+2+3+\cdots+13)$$
$$=101-\frac{13\cdot 14}{2}$$
$$=10$$

∴ $a_{13}-a_{12}=10-12^2=-134$

[다른 풀이]

제n행의 수 중 왼쪽 끝에 적힌 수를 l_n이라 하면

$$l_n=100-1-2-\cdots-(n-1)$$
$$=100-\frac{n(n-1)}{2}$$

따라서 제n행에 적힌 수의 합 a_n은

$$a_n=\frac{n\{200-n(n-1)+(n-1)\cdot(-1)\}}{2}$$
$$=\frac{n(201-n^2)}{2}$$

따라서 $a_{13}=208$, $a_{12}=342$이므로 구하는 값은

$$a_{13}-a_{12}=208-342$$
$$=-134$$

20. [출제의도] 행렬의 연산을 이해하고, 주어진 조건에 맞는 행렬의 성질을 추론한다.

ㄱ. $(A+B)^2=O$에서

$(A+B)(A+B)=O$

$A^2+AB+BA+B^2=O$

이때 $A^2+B^2=O$이므로 $AB+BA=O$

∴ $AB=-BA$

ㄴ. $AB=-BA$, $A^2=-B^2$이고, 행렬의 곱셈에 대한 결합법칙이 성립하므로

$$A^3B^3=(A^2A)(BB^2)$$
$$=(-B^2)(AB)(-A^2)$$
$$=(-B^2)(-BA)(-A^2)$$
$$=-B^3A^3$$

ㄷ. 행렬 $A+B+E$에 행렬 $A+B-E$를 곱하면

$(A+B+E)(A+B-E)=(A+B)^2-E^2=O-E=-E$

즉, $(A+B+E)(E-A-B)=E$

따라서 $A+B+E$의 역행렬은 $E-A-B$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

[참고]

주어진 조건을 만족시키는 행렬의 예

$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

21. [출제의도] 이차함수와 원의 접선을 이용하여 수열의 극한값을 구한다.

원 C_n의 중심이 $\mathrm{P}_n(n, n^2)$이고 y축에 접하므로, 반지름의 길이는 n이다. 또 원점을 지나고 기울기가 a_n인 직선의 방정식은 $y=a_nx$ 즉, $a_nx-y=0$이다.

원 C_n과 직선 $a_nx-y=0$이 접하므로 원의 중심 $\mathrm{P}_n(n,\ n^2)$에서 직선 $a_nx-y=0$에 이르는 거리가 n이다.

∴ $\dfrac{|na_n-n^2|}{\sqrt{a_n^2+1}}=n$

$\dfrac{|a_n-n|}{\sqrt{a_n^2+1}}=1$

양변을 제곱하여 정리하면

$a_n^2-2na_n+n^2=a_n^2+1$

∴ $a_n=\dfrac{n^2-1}{2n}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

[다른 풀이]

원의 방정식은

$(x-n)^2+(y-n^2)^2=n^2$

$y=a_nx$를 대입하면

$(x-n)^2+(a_nx-n^2)^2=n^2$

$x^2-2nx+n^2+a_n^2x^2-2n^2a_nx+n^4=n^2$

$(1+a_n^2)x^2-2(n+n^2a_n)x+n^4=0$

직선과 원이 접하므로 판별식

$\dfrac{D}{4}=\left(n+n^2a_n\right)^2-n^4(1+a_n^2)=0$이다.

$2n^3a_n=n^4-n^2$

∴ $a_n=\dfrac{n^2-1}{2n}$

∴ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2}$

22. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그방정식의 해를 구한다.

$\log_2(2x-5)=2\log_2 3$

$\log_2(2x-5)=\log_2 3^2=\log_2 9$

로그함수는 일대일함수이므로 $2x-5=9$

∴ $x=7$

23. [출제의도] 이차정사각행렬의 역행렬을 알고, 이를 계산한다.

A의 역행렬을 구하면

$$A^{-1}=\frac{1}{3\times a-(-3)\times(1-a)}\begin{pmatrix}a&3\\-1+a&3\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}a&3\\-1+a&3\end{pmatrix}$$

따라서 A^{-1}의 모든 성분의 합은

$\dfrac{1}{3}(2a+5)=13$

∴ $a=17$

24. [출제의도] 합의 기호 $\sum$의 성질을 이해한다.

$$\sum_{k=1}^{n+1}k^2-\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)^2-\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right)$$
$$=(n+1)^2+\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right)$$
$$=(n+1)^2+\sum_{k=1}^{n}\left\{k^2-\left(k^2+k\right)\right\}$$
$$=(n+1)^2-\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=(n+1)^2-\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

따라서 $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}=78$, $n^2+3n-154=0$

$(n-11)(n+14)=0$

∴ $n=11$ (∵ n은 자연수)

25. [출제의도] 무한등비수열의 수렴조건을 이해한다.

무한등비수열 $\left\{\left(\dfrac{2x-3}{5}\right)^n\right\}$이 수렴하려면 공비가 -1보다 크고 1보다 작거나 같아야 하므로

$-1<\dfrac{2x-3}{5}\le 1$, $-5<2x-3\le 5$, $-2<2x\le 8$

∴ $-1<x\le 4$

따라서 구하는 정수 x는

$x=0$, 1, 2, 3, 4이고 그 합은 10이다.

[참고]

주어진 무한등비수열은 $-1<x<4$일 때 0으로 수렴하고, $x=4$일 때 1로 수렴한다.

26. [출제의도] 로그방정식으로 표현된 관계식을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

$C=40$일 때 $I=5$이므로

$5=k\log 40+a$ ⋯ ㉠

$C=10$일 때 $I=4$이므로

$4=k\log 10+a$ ⋯ ㉡

㉠-㉡에서

$1=k(\log 40-1)=k\log 4$

∴ $k=\dfrac{1}{\log 4}=\log_4 10$

㉡에 대입하면

$a=4-\log_4 10$

∴ $I=(\log_4 10)\log C+4-\log_4 10$

$C=p$일 때 $I=2.5$이므로

$2.5=\log_4 10\times\log p+4-\log_4 10$

$-1.5=(\log p-1)\log_4 10$

∴ $\log\dfrac{p}{10}=-1.5\log 4=\log 4^{-\frac{3}{2}}=\log\dfrac{1}{8}$

따라서 $\dfrac{p}{10}=\dfrac{1}{8}$이므로 $p=1.25$

∴ $100p=125$

27. [출제의도] 상용로그의 지표를 이해하고, 주어진 식을 만족시키는 자연수를 구한다.

$f(m)$은 $\log m$의 지표이므로 정수이고

$1\le m\le 1000$에서 $0\le f(m)\le 3$,

$2\le 2m\le 2000$에서 $0\le f(2m)\le 3$이다.

따라서 주어진 조건 $2f(m)-f(2m)=1$을 만족시키는 순서쌍 $(f(m), f(2m))$은 $(1, 1)$, $(2, 3)$이다.

ⅰ) $(f(m), f(2m))=(1, 1)$일 때

$f(m)=1$에서 $10\le m<100$

$f(2m)=1$ 에서 $10 \le 2m < 100$

따라서 $10 \le m < 50$ 이므로 m 은 40 개다.

ii) $(f(m),\ f(2m))=(2,\ 3)$ 일 때

$f(m)=2$ 에서 $100 \le m < 1000$

$f(2m)=3$ 에서 $1000 \le 2m < 10000$

따라서 $500 \le m < 1000$ 이므로 m 은 500 개다.

i), ii)에서 구하는 m 의 개수는 540 이다.

28. [출제의도] 행렬로 표현된 연립일차방정식과 직선의 방정식을 이용하여 해를 구한다.

조건 (나)에서 점 $(0,\ 0)$ 은 직선 $2x-y+1=0$ 위의 점이 아니므로 $\alpha \ne 0,\ \beta \ne 0$ 이다.

따라서 조건 (가)의 방정식

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 즉 $\begin{pmatrix} 1-k & -1 \\ -4 & 1-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

은 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가져야 한다.

따라서 행렬 $\begin{pmatrix} 1-k & -1 \\ -4 & 1-k \end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않아야 하므로 $(1-k)^2-4=0$이다.

$\therefore\ k=-1$ 또는 3

i) $k=-1$ 일 때

방정식의 해 $(x,\ y)$ 에 대해 $2x-y=0$ 이므로 $2x-y+1=0$ 을 만족시키는 해는 없다.

ii) $k=3$ 일 때

방정식의 해 $(x,\ y)$ 에 대해 $2x+y=0$ 이다. 즉, $2\alpha+\beta=0$ 이고, 이를 $2\alpha-\beta+1=0$ 과 연립하여 풀면 $\alpha=-\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{2}$

$\therefore\ 20(k+\alpha+\beta)=20\left(3-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=65$

29. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 주어진 문제를 해결한다.

함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}-64$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 5 만큼, y 축의 방향으로 -64 만큼 평행이동시킨 것이다.

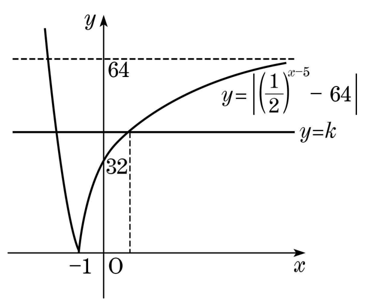
따라서 이 그래프가 y 축과 만나는 점의 y 좌표는

$f(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}-64=2^5-64=-32$

점근선의 방정식은 $y=-64$ 이므로

$$y=|f(x)|=\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}-64 & (x < -1) \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}+64 & (x \ge -1) \end{cases}$$

의 그래프는 그림과 같다.



이때, 곡선 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=k$가 제1 사분면에서 만나기 위해서는 $32<k<64$ 이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 k의 개수는

$64-32-1=31$

30. [출제의도] 등차수열의 합에 대한 성질을 이용하여 조건에 맞는 자연수를 추측한다.

수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$T_n=\left|\frac{n\{120+(n-1)d\}}{2}\right|$

$T_{20}=T_{21}$ 이므로

$\left|\frac{20(120+19d)}{2}\right|=\left|\frac{21(120+20d)}{2}\right|$

i) $\frac{20(120+19d)}{2}=\frac{21(120+20d)}{2}$ 일 때

$d=-3$

이때 조건 $T_{19}<T_{20}$ 이 성립한다.

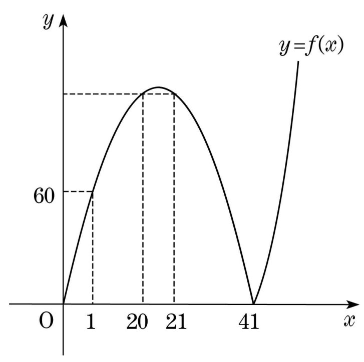
ii) $\frac{20(120+19d)}{2}=-\frac{21(120+20d)}{2}$ 일 때

$d=-\frac{123}{20}$

이때 조건 $T_{19}<T_{20}$ 이 성립하지 않는다.

따라서 $T_n=\left|\frac{-3n^2+123n}{2}\right|$ 이다.

$f(x)=\left|\frac{-3x^2+123x}{2}\right|$ 라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위 그래프에서 $f(41)=0$ 이므로 $T_{41}=0$

그러므로 $T_{21}>T_{22}>T_{23}>\cdots>T_{41}=0$, $T_{41}<T_{42}$

따라서 $T_n>T_{n+1}$ 을 만족시키는 n 의 값은

21, 22, 23, ⋯, 40 이다.

그러므로 최솟값과 최댓값의 합은

$21+40=61$

2013학년도 대학수학능력시험 수리영역 나형 정답 및 해설(홀수형)

1.

출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

$$2A+B=2\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\3&3\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $2A+B$의 모든 성분의 합은 7이다.

<답> ④

2.

출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 계산할 수 있는가?

$$\log_2 40-\log_2 5=\log_2\frac{40}{5}$$
$$=\log_2 8$$
$$=\log_2 2^3$$
$$=3\log_2 2$$
$$=3$$

<답> ③

3.

출제의도 : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

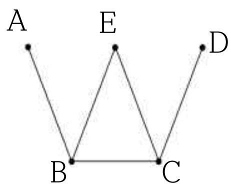
$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+1}{3n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}}$$
$$=\frac{5+0}{3-0}$$
$$=\frac{5}{3}$$

<답> ⑤

4.

출제의도 : 그래프의 연결 관계를 행렬로 나타낼 수 있는가?

주어진 그래프의 꼭짓점에 A, B, C, D, E를 그림과 같이 정하고 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 행렬로 나타내면 다음과 같다.



$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc}A&B&C&D&E\end{array}\\ \begin{array}{c}A\\B\\C\\D\\E\end{array} & \begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&1&0&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&0\\0&1&1&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

따라서 행렬의 모든 성분의 합은 10이다.

<답> ③

[다른 풀이]

그래프의 변의 개수가 5개이므로 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은

$2\times5=10$

5.

출제의도 : 함수의 극한에 대한 개념을 이해하고 그래프를 통해 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$\lim_{x \to -1-0} f(x) = 1,\ \lim_{x \to +0} f(x) = 1$

$\therefore \lim_{x \to -1-0} f(x) + \lim_{x \to +0} f(x) = 1 + 1 = 2$

<답> ⑤

6.
출제의도 : 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r 라 하면
모든 항이 양수이므로 $a > 0, r > 0$

$\frac{a_1 a_2}{a_3} = \frac{a^2 r}{ar^2} = \frac{a}{r} = 2$

$\therefore a = 2r$

$\frac{2a_2}{a_1} + \frac{a_4}{a_2} = \frac{2ar}{a} + \frac{ar^3}{ar} = 2r + r^2 = 8$

$r^2 + 2r - 8 = 0,\ (r-2)(r+4) = 0$

$\therefore r = 2\ (\because r > 0)$

따라서 $a = 4, r = 2$이므로

$a_3 = 4 \cdot 2^2 = 16$

<답> ①

7.
출제의도 : 지수와 로그를 활용할 수 있는가?

$T = T_0 + k\log(8t+1)$에서

$T_0 = 20, t = \frac{9}{8}$일 때 $T = 365$이므로

$365 = 20 + k\log\left(8 \cdot \frac{9}{8} + 1\right)$

$365 = 20 + k$

$\therefore k = 365 - 20 = 345$

$T_0 = 20, t = a$일 때 $T = 710$이므로

$710 = 20 + 345\log(8a+1)$

$345\log(8a+1) = 690$

$\log(8a+1) = 2$

$8a + 1 = 100$

$\therefore a = \frac{99}{8}$

<답> ①

8.
출제의도 : 조건부확률에 관한 문제를 해결할 수 있는가?

$P(B^C | A) = 2P(B|A)$에서

$\frac{P(A \cap B^C)}{P(A)} = 2 \times \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$P(A \cap B^C) = 2 \times P(A \cap B)$

$= 2 \times \frac{1}{8}\ (\because P(A \cap B) = \frac{1}{8})$

$= \frac{1}{4}$

$\therefore P(A) = P(A \cap B^C) + P(A \cap B)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

$= \frac{3}{8}$

<답> ②

9.
출제의도 : 연립일차방정식을 행렬을 이용하여 풀 수 있는가?

$\begin{pmatrix} a+1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -1 & a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -4-a \\ a+5 \end{pmatrix}$

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=-4-a$, $y=a+5$이고, 이 해가 방정식 $x+2y-4a=0$을 만족시키므로

$(-4-a)+2(a+5)-4a=0$

$3a-6=0$

$\therefore a=2$

<답> ②

10.

출제의도 : 이항분포를 따르는 확률변수에서 평균과 표준편차를 구할 수 있는가?

확률변수 X가 이항분포 $B(n,p)$를 따르므로

평균 $E(X)=np$

표준편차 $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

이때, 확률변수 $2X-5$의 평균과 표준편차가 각각 175, 12이므로

$E(2X-5)=2E(X)-5=175$에서

$E(X)=90$

$\therefore np=90$ …㉠

$\sigma(2X-5)=2\sigma(X)=12$에서

$\sigma(X)=6$

$\therefore \sqrt{np(1-p)}=6$ …㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\sqrt{90(1-p)}=6$, $90(1-p)=36$

$1-p=\dfrac{6}{15}$

$\therefore p=\dfrac{9}{15}$

㉠에서 $n\cdot\dfrac{9}{15}=90$

$\therefore n=150$

<답> ⑤

11.

출제의도 : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(x^2+1)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$
$$=2\left(\frac{1}{3}+1\right)$$
$$=\frac{8}{3}$$

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(x+1)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}1dx$$
$$=2[x]_0^1$$
$$=2$$

$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=k\left(\int_{-1}^{1}f(x)dx\right)^2$에서

$\dfrac{8}{3}=4k \qquad \therefore k=\dfrac{2}{3}$

<답> ④

12.

출제의도 : 중복조합을 이용하여 경우

의 수를 구할 수 있는가?

주스 4병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$$_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

생수 2병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$$_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

우유 1병을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는 3이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$15 \cdot 6 \cdot 3 = 270$$

<답> ⑤

13.

정규분포를 표준화하여 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

이 학교 학생 1명의 시험 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(500, 25^2)$을 따른다.

$P(475 \le X \le 550)$

$= P\left(\frac{475-500}{25} \le Z \le \frac{550-500}{25}\right)$

$= P(-1 \le Z \le 2)$

$= P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le 2)$

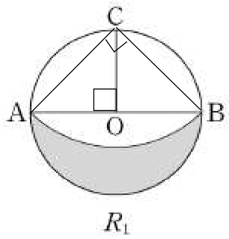
$= 0.3413 + 0.4772$

$= 0.8185$

<답> ②

14.

출제의도 : 무한등비급수에 관련된 내적문제를 해결할 수 있는가?



위 그림의 직각삼각형 AOC에서

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2}$

$= \sqrt{1^2 + 1^2}$

$= \sqrt{2}$

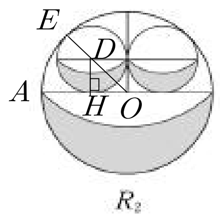
부채꼴 CAB의 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

부채꼴 CAB에서 직각삼각형 CAB를 제외한 부분의 넓이는

$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{2} - 1$

$\therefore S_1 = \frac{1}{2}\pi - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1$



위 그림에서 새로 생긴 한 원의 중심을 D, 점 D에서 선분 OA 위에 내린 수선의 발을 H, 원 D의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{OD} = \overline{OE} - \overline{DE} = 1 - r$

$\overline{OH} = \overline{DH} = r$

이므로 직각삼각형 ODH에서

$(1-r)^2 = r^2 + r^2$

$r^2 + 2r - 1 = 0$

$\therefore r=-1+\sqrt{2}\ (\because r>0)$

이때, 원 O와 원 D의 닮음비가

$1:(-1+\sqrt{2})$이므로 넓이의 비는

$1^2:(-1+\sqrt{2})^2=1:(3-2\sqrt{2})$

이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=1+2(3-2\sqrt{2})+2^2(3-2\sqrt{2})^2+2^3(3-2\sqrt{2})^3+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-2(3-2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}-5}$$

$$=\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$$

<답> ③

15.

출제의도 : 미분계수를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

$f(x)=x^3+ax^2+9x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+9$

$f'(1)=3+2a+9=2a+12$

이때, 접선의 기울기가 2이므로

$2a+12=2$

$\therefore a=-5$

$f(1)=1+a+9+3$

$=a+13$

$=-5+13\ (\because a=-5)$

$=8$

따라서 기울기가 2이고 점 $(1,8)$을 지나는 접선의 방정식은

$y-8=2(x-1)$

$y=2x+6$

따라서 $b=6$이므로

$a+b=-5+6=1$

<답> ①

16.

출제의도 : 행렬의 연산의 성질을 이해하고 역행렬의 정의를 이해하는가?

ㄱ. $2A^2+AB=E$ 에서

$A(2A+B)=E$

$\therefore\ A^{-1}=2A+B$ (참)

ㄴ. $2A^2+AB=E$ 에서

$AB=E-2A^2$

$AB+BA=2A+E$ 에서

$AB=2A+E-BA$

이므로

$E-2A^2=2A+E-BA$

$-2A^2=2A-BA$

$BA=2A^2+2A$

$\therefore\ B=(2A^2+2A)A^{-1}$

$=2A+2E$ (참)

ㄷ. $2A^2+AB=E$ 에서

$2A^2+A(2A+2E)=E$

$\therefore\ 4A^2=-2A+E$

따라서,

$(B-E)^2=(2A+E)^2$

$=4A^2+4A+E$

$=2A+2E=B$

그런데, $B=O$ 이면 주어진 조건에서

$2A^2=E,\ 2A=-E$

이므로 모순이다.

즉, $B\neq O$ 이므로 $(B-E)^2\neq O$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

<답> ③

17.

출제의도 : 수열에 관련된 증명을 이해하고 있는가?

$a_{n+1}-a_n$

$=n\cdot 2^n+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}-(n-1)\cdot 2^{n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k}$

$=\{n\cdot 2^n-(n-1)\cdot 2^{n-1}\}+(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k})$

$=(n+1)\cdot 2^{n-1}+\frac{a_n}{n}$

이므로

$a_{n+1}=\frac{(n+1)a_n}{n}+(n+1)\cdot 2^{n-1}$

$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+(n+1)\cdot 2^{n-1}$

이다. $b_n=\frac{a_n}{n}$이라 하면

$b_{n+1}=b_n+\frac{(n+1)\cdot 2^{n-1}}{n+1}$

이고, $b_2=3$ 이므로

$b_n=b_2+\sum_{k=1}^{n-2}2^k$

$=3+\frac{2(2^{n-2}-1)}{2-1}=2^{n-1}+1$

따라서

$f(n)=(n+1)\cdot 2^{n-1}$, $g(n)=2^{n-1}+1$

이므로

$f(4)+g(7)=40+65=105$

<답> ④

18.

출제의도 : 구간이 나뉘어진 함수의 미분가능할 조건을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to 1-0}(x^3+ax)=\lim_{x\to 1+0}(bx^2+x+1)$

$1+a=b+2$

$\therefore\ a-b=1\cdots$㉠

또한,

$\lim_{h\to +0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to +0}\frac{b(1+h)^2+(1+h)+1-(b+2)}{h}$

$=\lim_{h\to +0}\frac{bh^2+(2b+1)h}{h}$

$=2b+1$

$\lim_{h\to -0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to -0}\frac{(1+h)^3+a(1+h)-(b+2)}{h}$

$=\lim_{h\to -0}\frac{h^3+3h^2+(a+3)h+1+a-(b+2)}{h}$

$=\lim_{h\to -0}\frac{h^3+3h^2+(a+3)h}{h}=a+3$

이므로

$2b+1=a+3$, $a-2b=-2\cdots$㉡

㉠,㉡에서 $a=4$, $b=3$ 이므로

$a+b=7$

<답> ③

19.

출제의도 : 무한급수가 수렴할 때 일반항의 극한값을 구할 수 있는가?

$\sum_{n=1}^{\infty}(na_n-\frac{n^2+1}{2n+1})=3$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}(na_n-\frac{n^2+1}{2n+1})=0$

따라서, $b_n = na_n - \frac{n^2+1}{2n+1}$ 라 하면

$a_n = \frac{b_n}{n} + \frac{n^2+1}{2n^2+n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{n} + \frac{n^2+1}{2n^2+n}\right) = \frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n^2 + 2a_n + 2)$

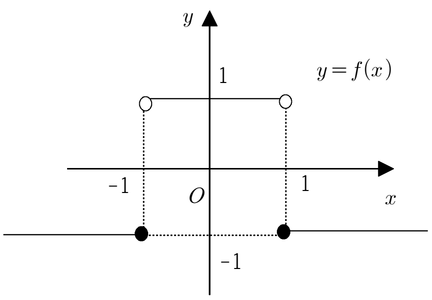
$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{13}{4}$

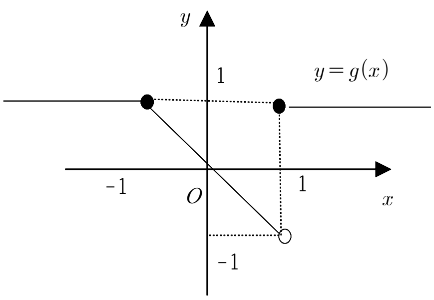
<답> ①

20.

출제의도 : 함수의 연속성을 판단할 수 있는가?

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 각각 다음과 같다.





ㄱ. $\lim_{x\to 1+0} f(x)g(x) = (-1)\times 1 = -1$

$\lim_{x\to 1-0} f(x)g(x) = 1\times(-1) = -1$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)g(x) = -1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to +0} g(x+1) = 1$

$\lim_{x\to -0} g(x+1) = -1$

이므로 $g(x+1)$은 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to -1+0} f(x)g(x+1) = 1\times 0 = 0$

$\lim_{x\to -1-0} f(x)g(x+1) = (-1)\times 0 = 0$

$f(-1)g(0) = (-1)\times 0 = 0$

$\therefore \lim_{x\to -1} f(x)g(x+1) = f(-1)g(0)$

따라서, 함수 $f(x)g(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이다. (참)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

<답> ④

21.

출제의도 : 사차함수가 극값을 오직 하나 갖을 조건을 구할 수 있는가?

$F'(x) = f(x) = x^3 - 3x + a$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

이므로 사차함수 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 갖기 위해서는 $F(x)$의 도함수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

(극댓값)×(극솟값) ≥ 0

이어야 한다.

즉, $f(1)f(-1) \geq 0$ 이므로

$(-2+a)(2+a) \geq 0$, $(a-2)(a+2) \geq 0$

$\therefore a \leq -2$ 또는 $a \geq 2$

따라서, 양수 a의 최솟값은 2이다.

<답> ②

22.

출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+3)=5$$

<답> 5

23.
출제의도 : 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_5=a_2+3d=16+3d=10$

$\therefore\ d=-2$

따라서

$a_1=a_2-d=16-(-2)=18$

이므로

$a_n=18+(n-1)\times(-2)=-2n+20$

즉, $a_k=-2k+20=0$ 이므로

$k=10$

<답> 10

24.
출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

$f'(x)=3x^2+9$ 이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=12$$

<답> 12

25.
출제의도 : 신뢰구간을 추정할 수 있는가?

$n=100$, $s=500$ 이므로 신뢰도 95%로 모평균을 추정하면

$$\left[\overline{x}-1.96\times\frac{500}{\sqrt{100}},\ \overline{x}+1.96\times\frac{500}{\sqrt{100}}\right]$$

$[\overline{x}-98,\ \overline{x}+98]$

$\therefore\ c=98$

<답> 98

26.
출제의도 : 지수법칙의 성질과 거듭제곱근의 정의를 이해하는가?

$$(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}=(3^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{6}}$$

따라서, $3^{\frac{5}{6}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이므로

$(3^{\frac{5}{6}})^n=3^{\frac{5n}{6}}$

은 자연수가 되어야 한다.

이때, $2\le n\le 100$ 이므로 n은 6의 배수이어야 하므로

$n=6,12,\cdots,96$

즉, n의 개수는 16 이다.

<답> 16

27.
출제의도 : 반복되는 점의 좌표의 규칙성을 찾을 수 있는가?

주어진 규칙에 따라 점 P_n의 좌표를 나열해 보면

$P_1(-1,0)$, $P_2(1,0)$

$P_3(-1,2)$, $P_4(1,-2)$

$P_5(-1,4)$, $P_6(1,-4)$

$P_7(-1,6)$, $P_8(1,-6)$

$\cdots$

이므로 자연수 k에 대하여

$P_{2k-1}(-1,\ 2(k-1))$, $P_{2k}(1,\ 2(1-k))$

따라서, 점 P_{25}의 좌표는

$P_{25}(-1,\ 24)$

이므로 $a+b=23$

<답> 23

28.

출제의도 : 정적분의 성질을 이해하고 넓이를 구할 수 있는가?

$$\int_{0}^{2013} f(x)dx - \int_{3}^{2013} f(x)dx$$

$$= \int_{0}^{2013} f(x)dx + \int_{2013}^{3} f(x)dx$$

$$= \int_{0}^{3} f(x)dx = 0$$

따라서 $f(x)=x^2+ax+b$라 하면

$$\int_{0}^{3} (x^2+ax+b)dx$$

$$= [\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + bx]_0^3 = 9 + \frac{9}{2}a + 3b = 0$$

$\therefore\ 3a+2b=-6 \cdots$ ㉠

또한, $f(3)=9+3a+b=0$ 이므로

$3a+b=-9 \cdots$ ㉡

㉠,㉡에서 $a=-4$, $b=3$ 이므로

$f(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

$$\therefore\ S=\int_{1}^{3} |x^2-4x+3|dx$$

$$= \int_{1}^{3} (-x^2+4x-3)dx$$

$$= [-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x]_1^3 = \frac{4}{3}$$

$\therefore\ 30S=40$

<답> 40

29.

출제의도 : 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하는 사건의 여사건은 어느 남학생도 이웃하지 않는 경우이다.

즉, 그림과 같이 남학생 4명을

(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)

또는

(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)

에 배정하고 나머지 자리에 여학생 4명을 배정하면 된다.

남	여	남
여		여
남	여	남

여	남	여
남		남
여	남	여

$$\therefore\ p = 1 - \frac{4! \times 4!}{8!} \times 2 = \frac{34}{35}$$

$\therefore\ 70p=68$

<답> 68

30.

출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그래프의 특징을 이용하여 조건을 만족시키는 점의 개수를 구할 수 있는가?

$y=2^x-n$의 역함수를 구해보면

$2^x=y+n$ 에서 $x=\log_2(y+n)$

이므로 x와 y를 서로 바꾸면

$y=\log_2(x+n)$

즉, $y=2^x-n$와 $y=\log_2(x+n)$은 서로 역함수의 관계이므로 두 곡선은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서, 주어진 조건을 만족하는 점의

좌표를 (m, m) (m은 정수)라고 하면

$2^m - n \le m \le \log_2(m+n)$

$\therefore\ 2^m - m \le n\ \cdots ㉠$

또한,

$2^{-30}-(-30)=\frac{1}{2^{30}}+30,\ 2^{-29}-(-29)=\frac{1}{2^{29}}+29$

$\cdots$

$2^{-3}-(-3)=\frac{1}{8}+3,\ 2^{-2}-(-2)=\frac{1}{4}+2$

$2^{-1}-(-1)=\frac{1}{2}+1,\ 2^0-0=1$

$2^1-1=1,\ 2^2-2=2$

$2^3-3=5,\ 2^4-4=12$

$2^5-5=27,\ 2^6-6=58$

$\cdots$

이므로 자연수 n에 대하여 ㉠을 만족시키는 정수 m의 값은 다음과 같다.

$n=1$ 일 때 $m=0,1$

$n=2$ 일 때, $m=0,1,2,-1$

$n=3$ 일 때, $m=0,1,2,-1,-2$

$n=4$ 일 때, $m=0,1,2,-1,-2,-3$

$n=5$ 일 때, $m=0,1,2,3,-1,-2,-3,-4$

$\cdots$

$n=30$일 때, $m=0,1,\cdots,5,-1,-2,\cdots,-29$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{30} a_n$

$=2\times1+3\times3+4\times7+5\times15+6\times4$
$\qquad+(1+2+\cdots+29)$

$=2+9+28+75+24+\frac{29\times30}{2}$

$=138+435=573$

<답> 573

2012학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

수리 나형 정답

1	③	2	⑤	3	③	4	⑤	5	③
6	①	7	②	8	③	9	④	10	①
11	②	12	②	13	④	14	①	15	②
16	①	17	④	18	③	19	④	20	⑤
21	⑤	22	21	23	12	24	19	25	16
26	2	27	56	28	3	29	4	30	420

해 설

1~2. '가'형과 동일

3. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=3$$

4. [출제의도] 정적분의 값을 계산한다.

$$\int_0^2(x^2+1)\,dx-\int_0^2 x^2\,dx=\int_0^2 1\,dx=2$$

5. [출제의도] 로그부등식의 성질을 이해한다.

로그의 정의에 의하여 $x-1>0$이고, 로그부등식의 밑을 같게 하면 $x-1\le 8$ $\therefore$ $1<x\le 9$
따라서 구하는 정수의 개수는 8이다.

6. [출제의도] 이항정리를 이용하여 이항계수를 계산한다.

$(x^2+1)^5$의 전개식에서 ${}_5\mathrm{C}_r(x^2)^{5-r}1^r={}_5\mathrm{C}_r x^{10-2r}$이므로 x^2의 계수는 $r=4$일 때 ${}_5\mathrm{C}_4=5$

7. [출제의도] 독립사건의 성질과 조건부 확률을 이해한다.

두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$이다.
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$ $\therefore$ $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

8. [출제의도] 연속확률변수의 확률을 계산한다.

$$\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\int_0^1\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{4}$$

9. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 로그의 계산 문제를 해결한다.

$$\log_a b+\log_b a=\frac{\log b}{\log a}+\frac{\log a}{\log b}$$
$$=\frac{(\log a+\log b)^2-2\log a\cdot\log b}{\log a\cdot\log b}$$
$$=\frac{16-2\times 2}{2}=6$$

10. [출제의도] 정적분의 기본 정리를 이용하여 도함수의 정적분 문제를 해결한다.

$$\int_0^2 f'(x)\,dx=[f(x)]_0^2=f(2)-f(0)=0-2=-2$$

11. [출제의도] 미분가능성을 이해한다.

함수 $f(x)$가 연속이므로 $f(0)=a+b=1$ ⋯ ㉠
$f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로
$$f'(0)=\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
그런데 $\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=-1$,
$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=2a(0-1)=-2a$이므로
$-1=-2a$ ⋯ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하여 $b=\frac{1}{2}$ $\therefore$ $f(1)=b=\frac{1}{2}$이다.

12. '가'형과 동일

13. [출제의도] 조건부 확률을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

	A역	B역	
	승차	하차	승차
남자	90	18	60
여자	60	12	60

B역에서 C역으로 가는 도중 기차에 타고 있는 승객의 수는 남자 $90-18+60=132$, 여자 $60-12+60=108$이므로 전체 승객은 240이다.
여자 승객이 선택될 확률은 $\frac{108}{240}$이고, A역에서 승차한 여자 승객이 선택될 확률은 $\frac{60-12}{240}=\frac{48}{240}$이므로
구하는 확률은 $\dfrac{\frac{48}{240}}{\frac{108}{240}}=\frac{4}{9}$

14. '가'형과 동일

15. [출제의도] 접선의 기울기를 이해한다.

$f'(x)=2x^2+a$에서 $f'(0)=a$, $f'(1)=2+a$
그러므로 $a(2+a)=-1$, $(a+1)^2=0$
따라서 $a=-1$

16~17. '가'형과 동일

18. [출제의도] 함수의 극한을 이해한다.

ㄱ. $\lim_{x\to-1-0}f(x)=1$이고 $f(-1)=1$이므로 (참)
ㄴ. $\lim_{x\to1+0}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+0}f(x)\lim_{x\to1+0}g(x)=1\cdot 0=0$
$\lim_{x\to1-0}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-0}f(x)\lim_{x\to1-0}g(x)=0$ (참)
ㄷ. ㄴ에서 $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=0$, $f(1)g(1)=1\cdot1=1$ (거짓)

19. [출제의도] 정적분을 이용하여 넓이를 추론한다.

S_1, S_2, S_3이 등차수열을 이루므로 $2\mathrm{S}_2=\mathrm{S}_1+\mathrm{S}_3$이다.
$$3\mathrm{S}_2=\mathrm{S}_1+\mathrm{S}_2+\mathrm{S}_3=\int_{-1}^2 f(x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2$$
$$=\frac{9}{2}\qquad\therefore\ \mathrm{S}_2=\frac{3}{2}$$

20. [출제의도] 도형에서 함수의 극한을 이해한다.

기울기가 -2인 직선 l의 y절편을 b라 하면
직선 l의 방정식은 $2x+y-b=0$
점 C(2, 0)에서 직선 l : $2x+y-b=0$에 이르는 거리
$r=\frac{|2\cdot2-b|}{\sqrt5}=\frac{|4-b|}{\sqrt5}$에서 $b=4\pm\sqrt5 r$ ⋯ ㉠
점 C′(3,3)에서 직선 l : $2x+y-b=0$에 이르는 거리
$f(r)=\frac{|9-b|}{\sqrt5}$에 ㉠을 대입하여 극한을 취하면
$$\lim_{r\to+0}f(r)=\lim_{r\to+0}\frac{|5\pm\sqrt5 r|}{\sqrt5}=\sqrt5$$

21~22. '가'형과 동일

23. [출제의도] 그래프와 행렬의 관계를 이해한다.

그래프의 연결관계를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은 변의 개수의 두 배와 같으므로 $6\cdot2=12$

24. [출제의도] 이산확률분포를 이해한다.

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{5}=\frac{19}{10}$이므로
$\mathrm{E}(10X)=10\mathrm{E}(X)=10\cdot\frac{19}{10}=19$

25. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수열의 합에 관한 문제를 해결한다.

$64=2^6$이므로 $[\log_2 64]=6$
$3^3=27<64<3^4=81$이므로 $[\log_3 64]=3$
$4^3=64$이므로 $[\log_4 64]=3$
$5^2=25<64<5^3=125$이므로 $[\log_5 64]=2$
$6^2=36<64<6^3=216$이므로 $[\log_6 64]=2$
그러므로 $\sum_{n=2}^{6}[\log_n 64]=16$

26. [출제의도] 정적분의 성질을 이해한다.

$F(x)=\int_2^x(t^2+3t-2)\,dt$라 하면 $F'(x)=x^2+3x-2$
$$(\text{준식})=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}\cdot\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$
$$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}(2^2+3\cdot2-2)=2$$

27. [출제의도] 중복조합을 이용하여 규칙을 추론한다.

쌓는 순서가 정해져 있으므로 세 개의 원판을 택하면 쌓는 방법은 한가지로 정해진다. 그러므로 구하는 방법의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 중복조합의 수이므로 ${}_{6+3-1}\mathrm{C}_3={}_8\mathrm{C}_3=56$

28. [출제의도] 극한의 성질을 이용하여 도형에 응용된 극한 문제를 해결한다.

선분 CP_0의 길이를 $a\,(0<a<1)$이라 하면
$\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}=\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}=\overline{\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5}=\cdots=a$
$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}=\overline{\mathrm{P}_5\mathrm{P}_6}=\cdots=1-a$
이므로 $l_{2n}=n$이다.
$\lim_{n\to\infty}\frac{l_{2n}}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$ $\therefore$ $a+b=3$

29. [출제의도] 도함수의 성질을 이용하여 극값을 구하는 문제를 해결한다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
조건 (가)에 의하여 $y=f'(x)$의 그래프는 y축에 대칭이므로 $a=0$
따라서 $f'(x)=3x^2+b$이고, 조건 (나)에서 $f'(1)=0$이고 $f(1)=0$이므로 $b=-3$, $c=2$
따라서 $f(x)$의 극댓값 $f(-1)=4$

30. [출제의도] 수열의 규칙성을 이용하여 여러 가지 수열 문제를 해결한다.

a_n의 경우, 마지막 상태에서는 $4n$개의 동전 중 $2n$개의 동전이 500이므로 적어도 $2n$번의 시행을 해야 한다. 그런데 $4n$개 동전을 4개씩 n개의 묶음으로 나누면 각 묶음마다 2회씩을 시행하여 총 $2n$회의 시행 후 마지막 상태를 만들 수 있다. 즉,

와 같이 $2n$번의 시행으로 마지막 상태를 만들 수 있으므로 $a_n=2n$이다.
따라서 $\sum_{n=1}^{20}a_n=\sum_{n=1}^{20}2n=2\sum_{n=1}^{20}n=2\times\frac{20\cdot21}{2}=420$

2013학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

1.

출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$에서

$2A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & -2\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 8이다.

<답>④

2.

출제의도 : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2}{8n^3+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^3}}{8+\frac{5}{n^3}}$$

$$=\frac{1+0}{8+0}$$

$$=\frac{1}{8}$$

<답> ①

3.

출제의도 : 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_4=a_1+3d$

$=1+3d=7$

$\therefore\ d=2$

$\therefore\ a_n=a_1+(n-1)d$

$=1+(n-1)\times 2$

$=2n-1$

$\therefore\ a_2+a_3=3+5=8$

<다른 풀이>

등차수열 $\{a_n\}$의 성질에 의해

$a_2+a_3=a_1+a_4$

$=1+7=8$

<답> ④

4.

출제의도 : 연립일차방정식을 행렬을 이용하여 풀 수 있는가?

행렬 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & a\end{pmatrix}$ 에 대하여

$1\cdot a-2\cdot 3=0$

$\therefore\ a=6$

<답> ⑤

5.

출제의도 : 함수의 극한에 대한 개념을 이해하고 그래프를 통해 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x\to -1}f(x)+\lim_{x\to 1+0}f(x)=1+(-1)=0$$

<답> ③

6.

출제의도 : 거듭제곱근의 성질을 이해하고 있는가?

$$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3 = \left(\sqrt{2\cdot 2^{\frac{2}{3}}}\right)^3 = \left(\sqrt{2^{\frac{5}{3}}}\right)^3 = \left(2^{\frac{5}{6}}\right)^3 = 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32}$$

이때, $5=\sqrt{25}<\sqrt{32}<\sqrt{36}=6$이므로 $\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은 6이다.

<답> ②

7.

출제의도 : 지수와 로그를 활용할 수 있는가?

$\log T = -kld$에서

$T = 10^{-kld}$

이때, 투과길이가 l_0이고 용액의 농도가 $3d_0$일 때의 투과도가 T_1이므로

$T_1 = 10^{-k\cdot l_0\cdot 3d_0} = 10^{-3kl_0d_0}$ ------㉠

또, 투과길이가 $2l_0$이고 용액의 농도가 $4d_0$일 때의 투과도가 T_2이므로

$T_2 = 10^{-k\cdot 2l_0\cdot 4d_0} = 10^{-8kl_0d_0}$ -----㉡

㉠, ㉡에서

$T_2 = T_1^{\frac{8}{3}}$

이므로

$n = \dfrac{8}{3}$

<답> ⑤

8.

출제의도 : 실생활과 관련된 조건부확률에 관한 문제를 해결할 수 있는가?

5명 중 임의로 뽑힌 한 학생이 만두를 선택한 학생일 사건을 M, 쫄면을 선택한 학생일 사건을 N이라 하면 구하는 확률은

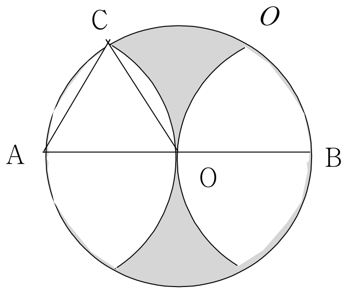
$$\mathrm{P}(N\mid M) = \frac{\mathrm{P}(M\cap N)}{\mathrm{P}(M)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}$$

<답> ③

9.

출제의도 : 무한등비급수에 관련된 내적문제를 해결할 수 있는가?

아래 그림과 같이 원 O의 중심을 O, 원 O와 중심이 A인 원이 만나는 점을 C라 하자.



이때, 삼각형 AOC는 정삼각형이므로

$S_1 = 1^2 \times \pi - 4 \times \{2 \times (\text{부채꼴 OAC}) - \triangle\text{AOC}\}$

$= 1^2 \times \pi - 4 \times \left\{2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2\right\}$

$= \pi - \left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$

$= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

한편, 도형 R_n에서 가장 작은 원은 개수가 2^{n-1}, 반지름의 길이가 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$S_n = S_1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times S_1 + \cdots + 2^{n-1} \times \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{n-1} S_1$

$= S_1 + \frac{1}{2} S_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 S_1 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} S_1$

따라서

$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{S_1}{1 - \frac{1}{2}}$

$= \frac{\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}}{1 - \frac{1}{2}}$

$= 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$

<답> ②

10.

출제의도 : 이항분포를 따르는 확률변수에서 분산의 성질을 이용하여 분산을 구할 수 있는가?

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(6, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하면

$\mathrm{V}(X) = 6 \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$

$\therefore\ \mathrm{V}(-3X+2) = (-3)^2 \mathrm{V}(X)$

$= 9 \times \frac{4}{3}$

$= 12$

<답> ⑤

11.

출제의도 : 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

$a_1 a_5 = 9$에서 $a_3^2 = 9$이므로

$a_3 = 3\ (\because a_3 > 0)$

또, $a_2 a_6 = 36$에서 $a_4^2 = 36$

$a_4 = 6\ (\because a_4 > 0)$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$r = \frac{a_4}{a_3} = \frac{6}{3} = 2$

$a_3 = a_1 \times 2^2 = 3$에서

$a_1 = \frac{3}{4}$

$\therefore\ 8(a_1 a_2 + a_3 a_4) = 8a_1^2(r + r^2 \times r^3)$

$= 8 \times \frac{9}{16} \times (2 + 2^2 \times 2^3)$

$= \frac{9}{2} \times 34 = 153$

<다른 풀이>

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1 a_5 = a_1 \times a_1 r^4$

$= a_1^2 r^4 = 9 \cdots$ ㉠

$a_2 a_6 = a_1 r \times a_1 r^5$

$= a_1^2 r^6 = 36 \cdots$ ㉡

㉡÷㉠에서 $r^2=4$

$\therefore\ r=2\ (\because r>0)$

㉠에서 $a_1^2=\dfrac{9}{16}$

$$\therefore\ 8(a_1a_2+a_3a_4)=8a_1^2(r+r^2\times r^3)$$

$$=8\times\frac{9}{16}\times(2+2^2\times 2^3)$$

$$=\frac{9}{2}\times 34=153$$

<답> ①

12.

출제의도 : 경우의 수를 구하여 확률을 계산할 수 있는가?

나올 수 있는 모든 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1=12$(가지)

을이 뽑은 1장의 카드에 적힌 수를 a라 하고

갑이 뽑은 2장의 카드에 적힌 두 수의 곱을 b라 할 때

가능한 경우의 수는 다음과 같다.

(i) $a=3$일 때, $b=2(=1\times2)$

$\therefore$ 1가지

(ii) $a=4$일 때, $b=2(=1\times2)$

$b=3(=1\times3)$

$\therefore$ 2가지

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1+2}{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

<답> ③

13.

출제의도 : 함수의 연속성과 연속함수의 성질을 이해하고 있는가?

ㄱ. $x>1$에서 $f(x)=-x+2$이므로

$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to1+0}(-x+2)=1$ (참)

ㄴ. $x\le1$에서 $f(x)=a$이므로

$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to1-0}a=\lim\limits_{x\to1-0}0=0$

이므로 ㄱ에서 $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1-0}f(x)$

즉,

$\lim\limits_{x\to1}f(x)$의 극한값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $g(x)=(x-1)f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to1+0}g(x)=\lim_{x\to1+0}(x-1)f(x)$$

$$=\lim_{x\to1+0}(x-1)(-x+2)=0$$

$$\lim_{x\to1-0}g(x)=\lim_{x\to1-0}(x-1)f(x)$$

$$=\lim_{x\to1-0}a(x-1)=0$$

이므로 $\lim\limits_{x\to1}g(x)=0$이고

$g(1)=(1-1)f(x)=0$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to1}g(x)=g(1)$

즉, 함수 $y=(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

한편, $x>1$, $x\le1$에서 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 연속함수의 성질에 의해 함수 $y=(x-1)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

<답> ③

14.
출제의도 : 수열의 규칙성을 찾아 합을 구할 수 있는가?

[단계1]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{6} k = \frac{6\times 7}{2} = 21$$

[단계2]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{7} k = \frac{7\times 8}{2} = 28$$

[단계3]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{9} k = \frac{9\times 10}{2} = 45$$

[단계4]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{11} k = \frac{11\times 12}{2} = 66$$

[단계5]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{13} k = \frac{13\times 14}{2} = 91$$

[단계6]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{15} k = \frac{15\times 16}{2} = 120$$

따라서 <그림6>에 적혀 있는 모든 수의 합은

$21+28+45+66+91+120=371$

<답> ④

15.
출제의도 : 로그방정식을 풀 수 있고 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

A_n의 x좌표가 $\frac{1}{n}$이므로

$$\mathrm{A}_n\left(\frac{1}{n}, \log_3 \frac{1}{n}\right)$$

한편, B_n의 좌표를 $(b_n, \log_3 b_n)$이라 하면
점 C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$을 1 : 2로 내분하는 점이므로

$$\mathrm{C}_n\left(\frac{b_n + 2\times\frac{1}{n}}{1+2}, \frac{\log_3 b_n + 2\log_3 \frac{1}{n}}{1+2}\right)$$

즉,

$$\mathrm{C}_n\left(\frac{b_n + \frac{2}{n}}{3}, \frac{\log_3 b_n + 2\log_3 \frac{1}{n}}{3}\right)$$

이때, 점 C_n의 y좌표가 0이므로

$$\log_3 b_n + 2\log_3 \frac{1}{n} = 0$$

$$\log_3 b_n = \log_3 n^2$$

$$\therefore\ b_n = n^2$$

따라서,

$$x_n = \frac{b_n + \frac{2}{n}}{3} = \frac{n^2 + \frac{2}{n}}{3} = \frac{n^3+2}{3n}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2}{3n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n^3}}{3} = \frac{1}{3}$$

<답> ①

16.
출제의도 : 역행렬에 관련된 성질을 이해하고 있는가?

ㄱ. $(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=4E$에서

$$(A+B)\frac{1}{4}(A^{-1}+B^{-1}) = E$$

이므로

$$(A+B)^{-1} = \frac{1}{4}(A^{-1}+B^{-1})$$

즉, $A+B$의 역행렬이 존재한다. <참>

ㄴ. $A=E$이면 $A^{-1}=E$이므로 주어진 식에서

$(E+B)(E+B^{-1})=4E$

$E+B+B^{-1}+E=4E$

$B+B^{-1}=2E$

양변에 B를 곱하면

$B^2+E=2B$

$(B-E)^2=O$

이때, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$으로 놓으면

$(B-E)^2=O$이지만 $B\neq E$이다.

<거짓>

ㄷ. $AB=\frac{1}{2}E$에서 $2AB=2BA=E$이므로

$A^{-1}=2B,\ B^{-1}=2A$

주어진 식에 대입하면

$(A+B)(2A+2B)=4E$

$(A+B)^2=2E$

$A^2+2AB+B^2=2E$

$A^2+B^2=E$ <참>

<답> ③

17.

출제의도 : 수열에 관련된 증명을 이해하고 있는가?

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k+1}}=\frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k}}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k}}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\cdots+\frac{n-1}{4^{n-1}}\right)-\left(\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\cdots+\frac{n-1}{4^n}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}-\frac{n-1}{4^n}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4^k}-\frac{\boxed{n-1}}{4^n}\right)$$

이때, $\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k+1}}$의 양변에 2^n을 곱하면

$$a_n=2^{n-1}a_1+2^n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k+1}}$$

$$=2^{n-1}a_1+\frac{2^{n+1}}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4^k}-\frac{\boxed{n-1}}{4^n}\right)$$

$$=2^{n-1}\left(-\frac{4}{9}\right)+\frac{2^{n+1}}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4^k}-\frac{\boxed{n-1}}{4^n}\right)$$

$$=\boxed{-\frac{2^{n+1}}{9}}+\frac{2^{n+1}}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4^k}-\frac{\boxed{n-1}}{4^n}\right)$$

따라서, $f(n)=n-1$, $g(n)=-\frac{2^{n+1}}{9}$이므로

$$f(10)\times g(5)=9\times\left(-\frac{2^6}{9}\right)$$

$$=-64$$

<답> ①

18.

출제의도 : 부정적분과 미분의 관계를 이해하고 있는가?

함수 $f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$라 하자.

$$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$$

$$=\int\{x^2+ax^2+bx+c\}dx$$

$$=\int\{(1+a)x^2+bx+c\}dx$$

$$=\frac{1}{3}(1+a)x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C\ \cdots ㉠$$

(C는 적분상수)

한편, $f(x)g(x)=(ax^2+bx+c)g(x)$

$=-2x^4+8x^3\ \cdots ㉡$

이므로 $g(x)$는 이차함수이다.

$\therefore \ a=-1$

㉠, ㉡에서

$$(-x^2+bx+c)\left(\frac{b}{2}x^2+cx+C\right)=-2x^4+8x^3$$

$$-\frac{b}{2}x^4+\left(\frac{b^2}{2}-c\right)x^3+\left(-C+bc+\frac{bc}{2}\right)x^2$$
$$+(bC+c^2)x+cC=-2x^4+8x^3$$

에서

$$-\frac{b}{2}=-2,\ \frac{b^2}{2}-c=8,$$

$$-C+bc+\frac{bc}{2}=0,\ cC=0$$

$\therefore b=4,\ c=0,\ C=0$

$\therefore g(x)=2x^2$

$\therefore \ g(1)=2$

<답> ②

19.

출제의도 : 도형의 넓이 미분법을 이용하여 접선의 접점을 구할 수 있는가?

삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되려면 점 P에서 직선 $y=x$까지의 거리가 최대이어야 한다.

이때, 점 P에서 접선은 직선 $y=x$와 평행이므로 $f'(x)=1$에서

$$a\{(x-2)^2+2x(x-2)\}=1$$

$$3ax^2-8ax+4a-1=0$$

이 이차방정식의 한 근이 $x=\frac{1}{2}$이므로

$$3a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-8a\cdot\frac{1}{2}+4a-1=0$$

$$\frac{3}{4}a-1=0$$

$$\therefore \ a=\frac{4}{3}$$

<답> ②

20.

출제의도 : 정규분포를 따르는 모집단에서 모평균에 대한 신뢰구간을 구할 수 있는가?

정규분포 $N\left(m,\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 $n=25$인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\left[\overline{X}-c\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{25}},\ \overline{X}+c\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{25}}\right]$$

(단, $\mathrm{P}(|Z|\le c)=0.95$)

즉, $\left[\overline{X}-\frac{c}{10},\ \overline{X}+\frac{c}{10}\right]$

$\therefore \ a=\overline{X}-\frac{c}{10},\ b=\overline{X}+\frac{c}{10}$

$$b-a=2\times\frac{c}{10}=\frac{c}{5}$$

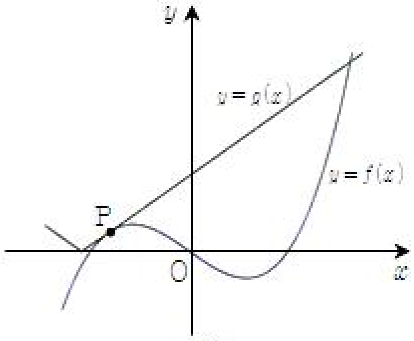
$\therefore \ c=5(b-a)$

<답> ⑤

21.

출제의도 : 미분법을 이용하여 두 곡선의 위치 관계를 이해하고 있는가?

두 함수 $f(x)=6x^3-x$와 $g(x)=|x-a|$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같다.



< 그림1 >

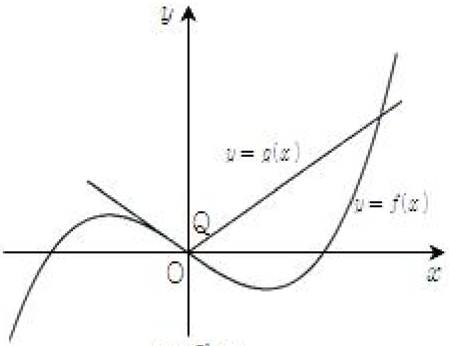
< 그림1 >에서 직선 $g(x)=x-a$가 곡선 $f(x)=6x^3-x$ 위의 점 P에서 접하므로

$f'(x)=1$에서 $18x^2-1=1$, $x^2=\frac{1}{9}$

$\therefore\ x=-\frac{1}{3}\ (x<0)$

이때, 접점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right)$이므로

$\frac{1}{9}=-\frac{1}{3}-a \quad \therefore\ a=-\frac{4}{9}$



< 그림2 >

< 그림2 >에서 직선 $g(x)=-x+a$가 곡선 $f(x)=6x^3-x$ 위의 점 Q에서 접하므로 $f'(x)=-1$에서

$18x^2-1=-1$, $18x^2=0 \quad \therefore\ x=0$

이때, 접점 Q의 좌표는 $(0, 0)$이므로

$0=0+a \quad \therefore\ a=0$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$-\frac{4}{9}+0=-\frac{4}{9}$

<답> ④

22.

출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x}{x+1}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to 2}x=2$$

<답> 2

23.

출제의도 : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$$\int_{-2}^{2} x(3x+1)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(3x^2+x)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}3x^2dx$$
$$=2\int_{0}^{2}3x^2dx$$
$$=2\left[x^3\right]_0^2$$
$$=2(8-0)$$
$$=16$$

<답> 16

2013학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

24.

출제의도 : 이항정리를 활용하여 항의 계수를 구할 수 있는가?

$(1+ax)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r\, 1^{5-r}(ax)^r = {}_5C_r\, a^r x^r$

이때, x^2항은 $r=2$일 때이므로 x^2의 계수는

$${}_5C_2\, a^2 = \frac{5\times4}{2\times1}\times a^2$$

$$=10a^2=1440$$

$a^2=144$

$a>0$이므로 $a=12$

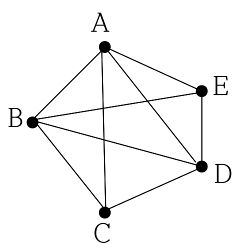
<답> 12

25.

출제의도 : 그래프를 나타내는 행렬을 통해 그래프의 특성을 파악할 수 있는가?

그래프 G를 나타내는 행렬 M에 대하여 그림과 같이 그래프 G를 그리면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{E} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



$\therefore\ a=5,\ b=9$

$\therefore\ a+b=5+9=14$

<답> 14

26.

미분계수의 정의를 이해하고 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot3$$

$$=3f'(1)$$

$f(x)=x^3+4x-2$에서 $f'(x)=3x^2+4$

$\therefore 3f'(1)=3\times(3+4)=21$

<답> 21

27.

출제의도 : 정규분포에서 표준화를 통해 두 확률이 같을 조건을 구할 수 있는가?

A과수원에서 생산하는 귤의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(86,\ 15^2)$을 따른다.

또, B과수원에서 생산하는 귤의 무게를 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(88,\ 10^2)$을 따른다.

A과수원에서 임의로 선택한 귤의 무게가 98이하일 확률과 B과수원에서 임의로 선택한 귤의 무게가 a이하일 확률이 같으므로 $\mathrm{P}(X\le98)=\mathrm{P}(Y\le a)$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{98-86}{15}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-88}{10}\right)$$

$\therefore\ a=96$

<답> 96

28.

출제의도 : 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하고 수열의 극한을 구할 수 있는가?

$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$에서

$$(a_{n+1}-a_n)^2 = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2 - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)^2$$
$$= 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right) - 2\left(1-\frac{1}{9^{n-1}}\right)$$
$$= \frac{16}{9^n}\ (n \geq 2)$$

이때, $n=1$이면

$$(a_2-a_1)^2 = 2(1-\frac{1}{9}) = \frac{16}{9}$$

이므로

$$(a_{n+1}-a_n)^2 = \frac{16}{9^n}\quad (n \geq 1)$$

한편, $a_{n+1} > a_n$이므로

$$a_{n+1}-a_n = \frac{4}{3^n}$$

$$\therefore\ a_{n+1} = a_n + \frac{4}{3^n}$$

이때, $a_1 = 10$이므로

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{4}{3^k}$$
$$= 10 + \frac{\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$
$$= 10 + 2\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}(n \geq 2)$$

따라서,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 12$$

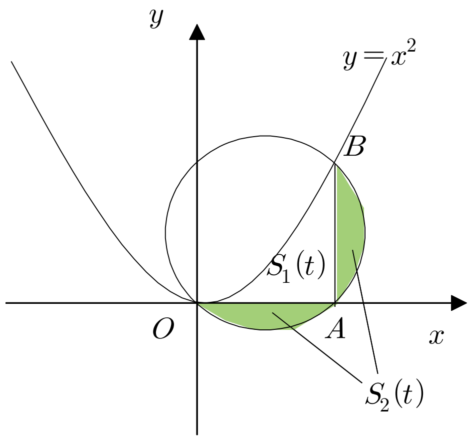
<답> 12

29.

출제의도 : 정적분을 활용하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

세 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(t, 0)$, $\mathrm{B}(t, t^2)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB는 직각삼각형이므로 원 C의 반지름의 길이 r는

$$r = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{OB}} = \frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}$$



위의 그림에서 $S_2(t)$의 넓이는

$S_2(t) =$ (반원의 넓이)

−(직각삼각형 OAB의 넓이)

$$= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}\right)^2 - \frac{1}{2}\times t\times t^2$$
$$= \frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi - \frac{1}{2}t^3$$

위의 그림에서 $S_1(t)$의 넓이는

$$S_1(t) = \int_0^t x^2 dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^t = \frac{1}{3}t^3$$

따라서 구하는 넓이 $S(t)$는

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t)$$

$$=\frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi-\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{3}t^3$$

$$=\frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi-\frac{1}{6}t^3$$

$$S'(t)=\frac{1}{8}(2t+4t^3)\pi-\frac{1}{2}t^2$$

$$\therefore\ S'(1)=\frac{1}{8}(2+4)\pi-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3\pi-2}{4}$$

$\therefore\ p=3,\ q=-2$

$\therefore\ p^2+q^2=9+4=13$

<답> 13

30.

출제의도 : 로그부등식을 활용하여 정사각형의 개수를 구할 수 있는가?

두 자연수 n, k에 대하여 아래 그림과 같이 네 꼭짓점 $A_1(n, k)$, $A_2(n+1, k)$, $A_3(n+1, k+1)$, $A_4(n, k+1)$으로 하는 정사각형이 두 함수 $y=\log 7x$, $y=\log 3x$와 모두 만나기 위해서는

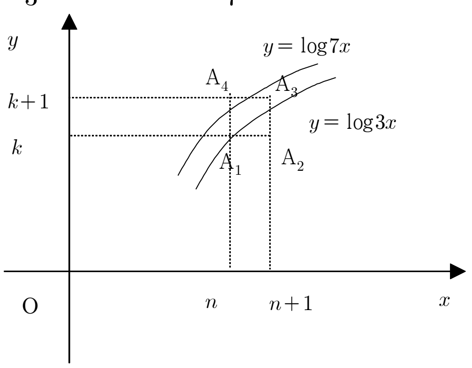
$\log 7n \le k+1$ 이고 $\log 3(n+1) \ge k$

이어야 한다.

즉,

$$n \le \frac{10^{k+1}}{7} \text{ 이고 } n \ge \frac{10^k}{3}-1$$

$$\therefore\ \frac{10^k}{3}-1 \le n \le \frac{10^{k+1}}{7}$$



(ⅰ) $k=1$일 때,

$$\frac{10}{3}-1 \le n \le \frac{100}{7}$$

그러므로 자연수 n은 3, 4, ⋯, 14로 12개다.

(ⅱ) $k=2$일 때,

$$\frac{100}{3}-1 \le n \le \frac{1000}{7}$$

그리고 꼭지점의 x좌표는 모두 100이하이므로 $n+1 \le 100$이다.

그러므로 99이하의 자연수 n은 33, 34, ⋯, 99로 67개다.

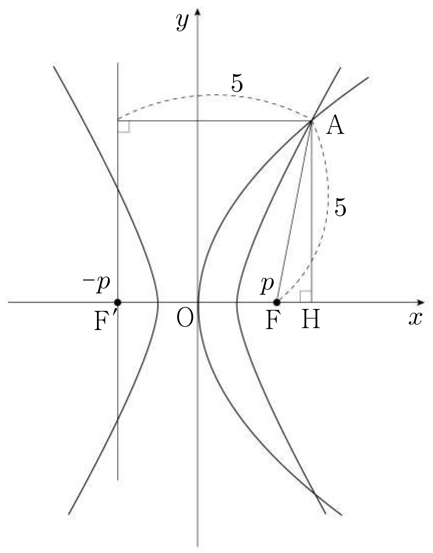
따라서 모든 정사각형의 개수는

$12+67=79$

<답> 79

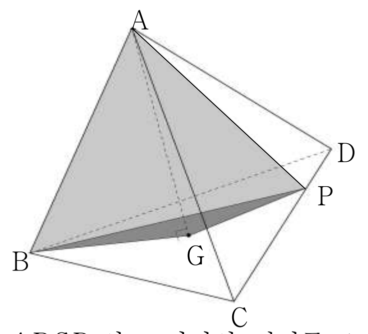
원 O의 중심이 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$을 지나는 순간은 $t=\frac{1}{2}$이다.
$t=\frac{1}{2}$일 때, $\theta=\frac{\pi}{3}$이다.
$\therefore$ 원 O의 중심이 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$을 지나는 순간 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

20. [출제의도] 포물선과 쌍곡선의 성질 이해하기



점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면,
$\cos(\angle \mathrm{AFH})=\frac{1}{5}$이므로 $\overline{\mathrm{FH}}=1$
포물선의 정의에 의하여
$2p+1=5 \quad \therefore p=2$
$\mathrm{A}(3, 2\sqrt{6})$이므로
$\overline{\mathrm{AF'}}=7$
쌍곡선의 정의에 의하여 $|\overline{\mathrm{AF'}}-\overline{\mathrm{AF}}|=2a=2$
$a=1, b=\sqrt{3}$
$\therefore ab=\sqrt{3}$

21. [출제의도] 정사영의 성질 이해하기

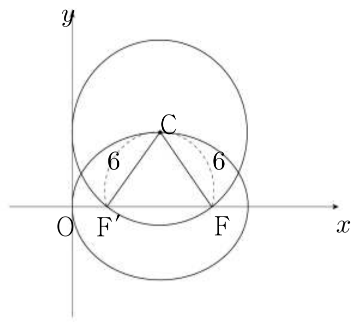


정사면체 ABCD의 모서리의 길이를 $4a$라 하면,
코사인법칙에 의하여
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{(4a)^2+a^2-4a^2}=\sqrt{13}\,a$
삼각형 ABP의 넓이는 $6a^2$ 이다.
점 A에서 삼각형 BCD에 내린 수선의 발을 G라 하면, 점 G는 삼각형 BCD의 무게중심이다.
삼각형 BGP의 넓이는 삼각형 BCD의 넓이의 $\frac{1}{6}$이므로 삼각형 BGP의 넓이는 $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^2$
$6a^2\cos\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}a^2$
$\therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{9}$

22. [출제의도] 이항계수 계산하기

${}_6\mathrm{C}_r\, x^{6-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r\, 2^r x^{6-2r}$
$6-2r=2 \quad \therefore r=2$
x^2의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_2\, 2^2=60$

23. [출제의도] 타원의 성질 이해하기



원 $(x-6)^2+(y-5)^2=36$의 중심을 C, 타원의 초점을 각각 F, F′이라 하면
장축의 길이는 $\overline{\mathrm{F'C}}+\overline{\mathrm{CF}}=12$

24. [출제의도] 미분계수의 성질 이해하기

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\frac{1}{2}f'(1)=-1$
$f'(1)=-2$
$\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1+5h)}{h}=-7f'(1)=14$

25. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$\int_0^2 f(t)dt=a$라 하면,
$f(x)=3x^2+x+a$이다.
$\int_0^2(3t^2+t+a)dt=a \quad \therefore a=-10$
$f(x)=3x^2+x-10$
$\therefore f(2)=4$

26. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$b_n=\sqrt{a_n+n}-\sqrt{n}$이라 하면,
$\lim_{n\to\infty}b_n=5$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(b_n+\sqrt{n})^2-n}{\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n^2}{\sqrt{n}}+2\lim_{n\to\infty}b_n=10$$

27. [출제의도] 삼각방정식 이해하기

$2\sin x\cos x+2\sin^2 x=0$
$2\sin x(\sin x+\cos x)=0$
$2\sqrt{2}\sin x\,\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$
$\sin x=0$ 또는 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$
$0\le x\le\pi$ 이므로
$x=0, \frac{3}{4}\pi, \pi \quad \therefore$ 모든 실근의 합은 $\frac{7}{4}\pi$
$p+q=11$

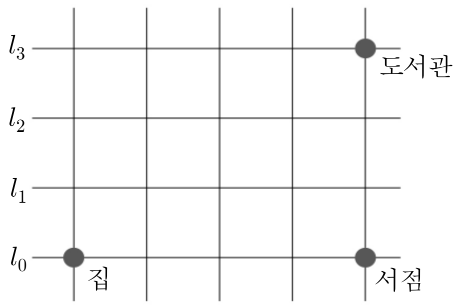
28. [출제의도] 분수방정식을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

용기 A에 넣은 소금의 양을 x라 하면
$a+b=45$이므로
$\frac{x}{200}\times100+\frac{75-x}{175-x}\times100=45$
$x=15, \ x=50$
$\therefore x=50 \quad \left(\because x>\frac{75}{2}\right)$

29. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 규칙성 추론하기

$a_{n+1}=a_n+2(n+1)+n$
$a_{n+1}=a_n+3n+2$
수열 $\{a_n\}$의 계차수열의 일반항 $b_n=3n+2$
$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}(3k+2)=\frac{n(3n+1)}{2}$
$a_{20}=610$

30. [출제의도] 경우의 수를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기



i) 연락 받은 교차로가 l_0에 있는 경우: 1
ii) 연락 받은 교차로가 l_1에 있는 경우: $\frac{6!}{4!2!}$
iii) 연락 받은 교차로가 l_2에 있는 경우: $\frac{8!}{4!4!}$
iv) 연락 받은 교차로가 l_3에 있는 경우: $\frac{10!}{4!6!}$
$\therefore 1+15+70+210=296$

“나”형 정답

1	①	2	④	3	④	4	④	5	②
6	②	7	①	8	⑤	9	⑤	10	②
11	④	12	②	13	①	14	③	15	③
16	⑤	17	③	18	③	19	②	20	②
21	③	22	70	23	36	24	35	25	12
26	10	27	5	28	27	29	610	30	11

해설

1. [출제의도] 행렬 계산하기

$A^2-AB=A(A-B)=\begin{pmatrix}9 & 2\\4 & -3\end{pmatrix}$
$\therefore$ 모든 성분의 합은 12

2. [출제의도] 로그 계산하기

$\left(\frac{3}{\log_2 2}\right)^3+8\log_2 2=35$

3. [출제의도] 지수부등식 계산하기

$3^{x^2}<3^{x+2}, \quad x^2<x+2, \quad x^2-x-2<0$
$-1<x<2$
$\therefore \alpha+\beta=1$

4. [출제의도] 함수의 연속성 이해하기

$f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=k$이다.
$k=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1}(x+2)=3$
$\therefore \ k=3$

5. [출제의도] 미분계수의 성질 이해하기

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)-\{f(2-h)-f(2)\}}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$
$\quad -\lim_{h\to0}\frac{\{f(2-h)-f(2)\}}{-h}\times(-1)$
$=2f'(2)$
$f'(x)=x^2+2x$ 이므로
$2f'(2)=2(4+4)=16$

6. [출제의도] 그래프와 행렬의 성질 이해하기

행렬 M^2의 (i, i) 성분$(i=1, 2, 3, 4, 5)$의 값의 합은 각 꼭짓점에 연결된 모든 변의 개수의 합의 2배이다. 따라서 그래프 G의 모든 변의 개수는 $\frac{4+2+2+2+2}{2}=6$

7. [출제의도] 지수의 성질을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$G_1=\frac{15}{14}(1.05)^{35}, \ G_2=\frac{5}{14}(1.05)^{20}$

$\frac{G_1}{G_2}=3(1.05)^{15}=6$

8. [출제의도] 상용로그를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$75(0.997)^n=80(0.995)^n$
$n(\log 0.997-\log 0.995)=\log 80-\log 75$
$n(-1+0.999+1-0.998)=5\log 2-\log 3-1$
$0.001\times n=0.028$
$\therefore n=28$

9. [출제의도] 확률을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

(i) $a=3$일 때, $b=1$ $\quad \frac{1}{6}\times{}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{192}$

(ii) $a=6$일 때, $b=2$ $\quad \frac{1}{6}\times{}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10}{192}$

$\therefore a=3b$일 확률은 $\frac{5}{64}$

10. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$f(x)=f(x+4)$이므로 $f(0)=f(4)$이다.
$2=16-8+a$
$a=-6$

$$\int_9^{11}f(x)\,dx=\int_1^3 f(x)\,dx$$
$$=\int_1^2(-4x+2)\,dx+\int_2^3(x^2-2x-6)dx$$
$$=-\frac{26}{3}$$

11. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$x^2-(n+1)x+n^2=nx-n$
$x^2-(2n+1)x+n(n+1)=0$
$x=n\ ,\ n+1$
$a_nb_n=n(n+1)$

$$\sum_{n=1}^{19}\frac{100}{n(n+1)}=100\sum_{n=1}^{19}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=100\left(1-\frac{1}{20}\right)$$
$$=95$$

12. [출제의도] 미분계수 계산하기

$$f'(x)=(x-2)(x-3)\cdots(x-10)$$
$$+(x-1)(x-3)\cdots(x-10)$$
$$\vdots$$
$$+(x-1)(x-2)\cdots(x-9)$$

$f'(1)=(1-2)(1-3)\cdots(1-10)$
$f'(4)=(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)\cdots(4-10)$

$$\frac{f'(1)}{f'(4)}=\frac{(-7)\times(-8)\times(-9)}{3\times2\times1}=-84$$

(별해)

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\{(x-2)(x-3)(x-4)\cdots(x-10)\}$$
$$=-9!$$
$$f'(4)=\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4}\{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)\cdots(x-10)\}$$
$$=3!\times6!$$
$$\therefore \frac{f'(1)}{f'(4)}=-84$$

13. [출제의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

극한값의 성질에 의하여

$\int_1^1 f(t)\,dt-f(1)=0$이므로 $f(1)=0$,

$$\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x f(t)\,dt-f(x)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x f(t)\,dt}{x^2-1}-\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$$
$$=\frac{f(1)}{2}-\frac{f'(1)}{2}=2$$

$\therefore\ f'(1)=-4$

14. [출제의도] 무한등비급수의 합을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

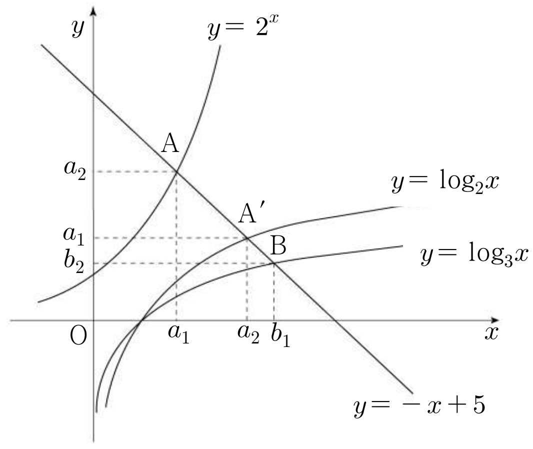
수열 $\left\{\widehat{A_nB_n}\right\}$은 첫째항이 $3\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$이고 공비가 $\cos\theta$인 등비수열이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{A_nB_n}=\frac{3\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1-\cos\theta}=9\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$\cos\theta=\frac{2}{3}$

$\overline{B_1C_1}=3\sin\theta=\sqrt{5}$

15. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 추론하기



ㄱ. $y=\log_2 x$와 $y=-x+5$가 만나는 점 $A'(a_2, a_1)$ $\therefore a_1>b_2$ (참)

ㄴ. 두 점 A, B는 $y=-x+5$ 위의 점이므로 $a_1+a_2=b_1+b_2=5$ (참)

ㄷ. 직선 OA′와 직선 OB의 기울기에 의해 $\frac{a_1}{a_2}>\frac{b_2}{b_1}$ (거짓)

16. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

	전화조사	인터넷조사	합계
대상자(명)	10000	40000	50000
참여자(명)	7000	34000	41000

조사에 참여한 대상자를 임의로 한 명 선택하였을 때, 이 사람이 인터넷조사에 참여하였을 확률 P는

$P=\frac{34000}{41000}=\frac{34}{41}$

17. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 일반항 추론하기

$b_n=\frac{a_n}{n+1}$이라 놓으면 $a_n=(n+1)b_n$이므로

$(n+3)b_{n+2}=\boxed{(n+2)}\,b_{n+1}+b_n$

$(n+3)(b_{n+2}-b_{n+1})=-(b_{n+1}-b_n)$ ⋯⋯ (★)

식 (★)에 $n=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ $(m\ge2)$를 대입하면

$$4(b_3-b_2)=-(b_2-b_1)$$
$$5(b_4-b_3)=-(b_3-b_2)$$
$$\vdots$$
$$(m+2)(b_{m+1}-b_m)=-(b_m-b_{m-1})$$

좌변과 우변을 각각 곱하여 정리하면,

$$b_{m+1}-b_m=\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(-\frac{1}{m+2}\right)(b_2-b_1)$$

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)\ \ (n\ge2)$$

$$\therefore a_n=(n+1)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\boxed{\frac{(-1)^{k-1}}{(k+2)!}}\right)\ \ (n\ge2)$$

$f(n)=n+2,\ g(k)=\frac{(-1)^{k-1}}{(k+2)!}$

$\therefore f(1)g(3)=\frac{1}{40}$

18. [출제의도] 무한급수의 성질 추론하기

$y=\log_c|x|$과 $y=n$의 교점의 x좌표를 구하면 $a_n=c^n$이고 $b_n=-c^n$이다. 즉, $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$은 공비가 c인 등비수열이다.

ㄱ. $a_n+b_n=c^n+(-c^n)=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ 이면 $0<c<1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{c}{1-c}$ (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$이 발산하면 수열 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$의 공비 $\frac{1}{c}$은 $\frac{1}{c}>1$ 이므로 수열 $\{a_n\}$의 공비 c는 $0<c<1$ 이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴한다. (거짓)

19. [출제의도] 도함수의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

조건 (가)에 의해 $y=f(x)$의 그래프는 y축 대칭이므로

$f(x)=x^4+bx^2+10$
$f'(x)=4x^3+2bx,\ \ f'(1)=4+2b$ 이므로
$-6<4+2b<-2$
$-10<2b<-6$
$-5<b<-3$ 이므로 $b=-4$
$f(x)=x^4-4x^2+10$
$f'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

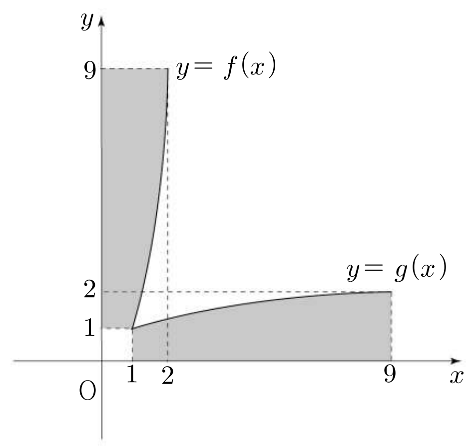
극솟값은 $f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})=6$

20. [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$S(\alpha)=\alpha\sqrt{1-\alpha^2}$ 이므로

$$\lim_{\alpha\to1-0}\frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha}}=\lim_{\alpha\to1-0}\frac{\alpha\sqrt{(1-\alpha)(1+\alpha)}}{\sqrt{1-\alpha}}$$
$$=\lim_{\alpha\to1-0}\alpha\sqrt{1+\alpha}=\sqrt{2}$$

21. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



그림에서 어두운 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_1^9 g(x)dx=18-1-\int_1^2 f(x)dx$$
$$=18-1-\int_1^2(x^3+x-1)dx$$
$$=17-\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2$$
$$=17-\frac{17}{4}=\frac{51}{4}$$

22. [출제의도] 등차수열 계산하기

$a_{100}-a_{90}=10d=34$
$a_{21}=a_1+20d=2+2\cdot34=70$

23. [출제의도] 중복조합의 성질 이해하기

$x=2l,\ y=2m,\ z=2n$ (단, l, m, n은 자연수)라 하면, $l+m+n=10$이 된다.

${}_{3+7-1}C_7={}_9C_7=36$

24. [출제의도] 함수의 극대·극소 이해하기

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f(x)=x^3-12x+C$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

극솟값은 $f(2)=8-24+C=3 \quad \therefore C=19$

극댓값은 $f(-2)=35$

25. [출제의도] 미분과 적분의 관계 이해하기

$f(x)=x^2-6x+C$

$f(x)$의 최솟값은 $f(3)=-9+C=8$

$C=17$

$f(x)=x^2-6x+17$

$\therefore f(1)=12$

26. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$b_n=\sqrt{a_n+n}-\sqrt{n}$ 이라 하면,

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=5$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(b_n+\sqrt{n})^2-n}{\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n^2}{\sqrt{n}}+2\lim_{n\to\infty}b_n=10$$

27. [출제의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 함수 추론하기

조건(가), (나)에 의하여 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이고, $f(1)=0$ 이므로

$f(x)=2(x-1)(x+a)$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)(x+a)}{x-1}=2(1+a)=3$$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

$f(x)=(x-1)(2x+1)$

$\therefore f(2)=5$

28. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log t=3+\alpha \quad (0\le\alpha<1)$

$\log t^2=2\log t=6+2\alpha$

$\log\frac{1}{t}=-3-\alpha$

i) $\alpha=0$ 일 때, $\log t=3,\ t=10^3$

ii) $0<\alpha<\frac{1}{2}$ 일 때,

$3+\alpha=\frac{1}{4}\cdot6-\frac{1}{2}\cdot(-4)=\frac{7}{2} \quad \therefore \alpha=\frac{1}{2}$

(조건에 맞지 않음)

iii) $\frac{1}{2}\le\alpha<1$ 일 때,

$3+\alpha=\frac{1}{4}\cdot7-\frac{1}{2}\cdot(-4)=\frac{15}{4} \quad \therefore \alpha=\frac{3}{4}$

$\log t=3+\frac{3}{4},\quad t=10^{\frac{15}{4}}$

$A=10^3\times10^{\frac{15}{4}}=10^{\frac{27}{4}}$

$\therefore 4\log A=27$

29. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 규칙성 추론하기

$a_{n+1}=a_n+2(n+1)+n$

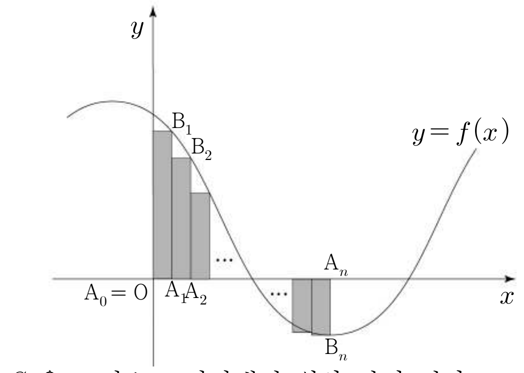
$a_{n+1}=a_n+3n+2$

수열 $\{a_n\}$의 계차수열의 일반항 $b_n=3n+2$

$$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}(3k+2)=\frac{n(3n+1)}{2}$$

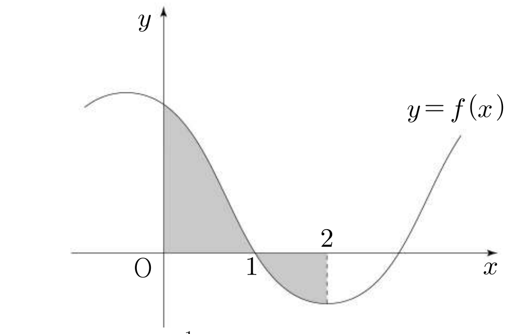
$a_{20}=610$

30. [출제의도] 정적분의 정의 이해하기



S_n을 그림으로 나타내면 위와 같이 된다.

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$의 값은 아래 그림의 어두운 부분의 넓이와 같으므로,



$$2\lim_{n\to\infty}S_n=2\int_0^1(x^3-2x^2-5x+6)dx$$

$$-2\int_1^2(x^3-2x^2-5x+6)dx=11$$

외국어(영어) 영역

정답

1	③	2	①	3	②	4	③	5	③
6	④	7	③	8	①	9	②	10	②
11	④	12	⑤	13	④	14	④	15	①
16	④	17	⑤	18	③	19	④	20	④
21	②	22	④	23	②	24	①	25	⑤
26	②	27	①	28	①	29	④	30	⑤
31	③	32	⑤	33	②	34	①	35	⑤
36	⑤	37	⑤	38	④	39	④	40	②
41	③	42	⑤	43	③	44	⑤	45	①
46	④	47	④	48	③	49	②	50	①

듣기대본 및 해설

1. [출제의도] 묘사하고 있는 그림 찾기

M: Good afternoon. May I help you?
W: Yes, please. I'm looking for a pencil holder to put on my desk.
M: Okay. We have a wide selection of pencil holders. Do you want a round-shaped one or a square-shaped one?
W: I prefer a square-shaped one.
M: Then, how about this one? It is small so it doesn't take up much space on your desk.
W: Hmm, it looks cute. But I want a holder with some separate blocks.
M: No problem. Then, this one will be right for you. It has one big section in the middle with two small sections on both sides.
W: I like it, but is there any other model with different pictures on it? I don't like the cartoon animals on it.
M: We have the same model with flowers on it.
W: It's great. I'll take it.

2. [출제의도] 남자의 심정 파악하기

W: Brandon, you seem to have something on your mind. What's up?
M: I just got a call from the head office. I'm being transferred.
W: What department are you getting transferred to?
M: They're sending me to the sales department, but I wanted to go to public relations.
W: Oh, that's why you don't look happy.
M: Yeah, recently I've been working hard to increase my qualifications by taking courses related to public relations.
W: Did you talk about it with the company?
M: I did. But they said there's nothing they can do at the moment.
W: I see. Well, I'm sure you'll get a better opportunity some day.
M: Thanks. This just isn't my time I guess.

3. [출제의도] 설명하는 내용의 주제 파악하기

M: Hello, everyone. Recently, we've been discussing how to work out safely, focusing on the importance of "warming up". But, "cooling down" after exercise is just as important as "warming up" before exercise, in order to reduce the risk of injury. "Cooling down" means gradually slowing down the level of activity. It helps the heart rate and breathing return to normal, and can prevent dizziness or pain. It also helps the body flush out toxins and release tension. When exercise is suddenly stopped, blood and waste products stay in the muscles, which can cause swelling and pain. "Cooling down" helps the blood return to the heart in adequate quantities so as to reduce the amount of waste products in the muscles.

4. [출제의도] 남자가 할 일 파악하기

M: Julie, it's 4:30. Did you find all the books you need for your science paper?
W: Yes, luckily I found two, so I don't need to go to a bookstore.
M: Good, let's go to the checkout. I found everything I need in this science magazine.
W: Wait a minute, Mike. You can't check out periodicals such as magazines.
M: Really? I didn't know that. But I need these 10 pages of articles.
W: It's okay. They allow you to make photocopies.
M: Great. Can I pay for copying with cash?
W: No, you can't. In this library, you have to use a "copy card". You can use mine if you need to.
M: Okay. Thanks.
W: It's almost closing time. While I borrow the books, you'd better get your pages copied. You have to go downstairs.
M: Okay.

5. [출제의도] 여자가 지불할 금액 고르기

M: Good morning, how may I help you?
W: I'm interested in the swimming course and the cooking course this community center is offering this summer. Are they still available?
M: Yes, there are a few spots left in both.
W: Good. How much is the registration fee?
M: The fee for each course is 50 dollars. But if you take two or more courses at a time, you get a 10% discount.
W: Great. I'd like to register for both courses. So, the total is 90 dollars, right?
M: Right. Oh, one more thing. If you are a resident in this town, you get an additional five dollars off each course.
W: That's perfect. I just moved to the neighborhood. I have my resident card with me.
M: Okay. How would you like to pay, cash or credit card?
W: Cash, please.

6. [출제의도] 여자가 하는 말의 목적 파악하기

2013학년도 6월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

1.

출제의도 : 로그의 계산을 할 수 있는가?

해설]

$$\log_2 3 + \log_2 \frac{4}{3} = \log_2 \left(3 \times \frac{4}{3}\right)$$
$$= \log_2 4$$
$$= \log_2 2^2$$
$$= 2\log_2 2$$
$$= 2$$

<답> ②

2.

출제의도 : 행렬에 대한 덧셈과 실수배를 할 수 있는가?

해설]

$$A+2B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

따라서 $A+2B$의 모든 성분의 합은

$7+(-2)+1+3=9$

이다.

<답> ④

3.

출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

해설]

$$\lim_{x \to 0}(x^2+2x+3) = 0+0+3 = 3$$

<답> ③

4.

출제의도 : 그래프의 연결 관계를 행렬로 나타낼 수 있는가?

해설]

주어진 그래프를 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&1 \\ 1&0&1&0&0&1 \\ 0&1&0&1&1&0 \\ 0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&1&1&0&1 \\ 1&1&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬의 성분 중 0의 개수는 20이다.

<답> ②

[다른 풀이]

주어진 그래프는 꼭짓점의 개수는 6이고, 변의 개수는 8이다.

따라서 이 그래프의 연결 관계를 행렬로 나타내면 6×6 행렬이고 행렬의 성분 중 1의 개수는

$2\times8=16$

이므로 행렬의 성분 중 0의 개수는

$36-16=20$

5.

출제의도 : 함수의 극한의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

해설]

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax}{x-1}=b$에서 $\displaystyle\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(x^2+ax)=1+a=0$이어야 한다.

$\therefore a=-1$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}x=1$$

$\therefore b=1$

$\therefore a+b=(-1)+1=0$

<답> ③

6.
출제의도 : 함수의 그래프를 통해 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

해설]
$$\lim_{x\to-0}f(x)+\lim_{x\to1+0}f(x)=2+1=3$$

<답> ⑤

7.
출제의도 : 로그의 성질을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가?

해설]
$$\log P_1=8.11-\frac{1750}{15+235}=8.11-\frac{1750}{250}$$
$$\log P_2=8.11-\frac{1750}{45+235}=8.11-\frac{1750}{280}$$
$$\therefore\ \log\frac{P_2}{P_1}=\log P_2-\log P_1$$
$$=(8.11-\frac{1750}{280})-(8.11-\frac{1750}{250})$$
$$=\frac{1750}{250}-\frac{1750}{280}$$
$$=175(\frac{1}{25}-\frac{1}{28})$$
$$=175\times\frac{3}{25\times28}$$
$$=\frac{3}{4}$$
$$\therefore\ \frac{P_2}{P_1}=10^{\frac{3}{4}}$$

<답> ③

8.
출제의도 : 등비수열의 일반항을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는가?

해설]
일반항 $a_n=2^{n-1}$이므로

$$b_n=(a_{n+1})^2-(a_n)^2=(2^n)^2-(2^{n-1})^2$$
$$=2^{2n}-2^{2n-2}$$
$$\therefore\ \frac{b_6}{b_3}=\frac{2^{12}-2^{10}}{2^6-2^4}=\frac{2^6(2^6-2^4)}{2^6-2^4}=2^6=64$$

<답> ⑤

9.
출제의도 : 치환을 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

해설]
$x-2=t$로 놓으면 $x=t+2$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{f(t)}{t}\cdot\frac{1}{t+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$$
$$=4$$
$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=8$$

<답> ④

10.

출제의도 : 미분법의 활용에서 수직선 위의 점이 움직이는 방향을 알 수 있는가?

해설]

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도는 각각

$f'(t)=4t-2,\ g'(t)=2t-8$

이다.

이때, 점 P, Q가 서로 반대방향으로 움직이려면 $f'(t)g'(t)<0$이어야 하므로

$(4t-2)(2t-8)=4(2t-1)(t-4)<0$

$\therefore \frac{1}{2}<t<4$

<답> ①

11.

출제의도 : 수열의 일반항과 합 사이의 관계를 이용하여 분수꼴의 수열의 합을 구할 수 있는가?

해설]

$a_1=S_1=2,\ a_{k+1}=S_{k+1}-S_k$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_kS_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{10}}-\frac{1}{S_{11}}\right)$$
$$=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{11}}$$
$$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{S_{11}}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$
$$\therefore\ S_{11}=6$$

<답> ①

12.

출제의도 : 무한등비급수의 규칙성을 찾고 그 극한값을 구할 수 있는가?

해설]

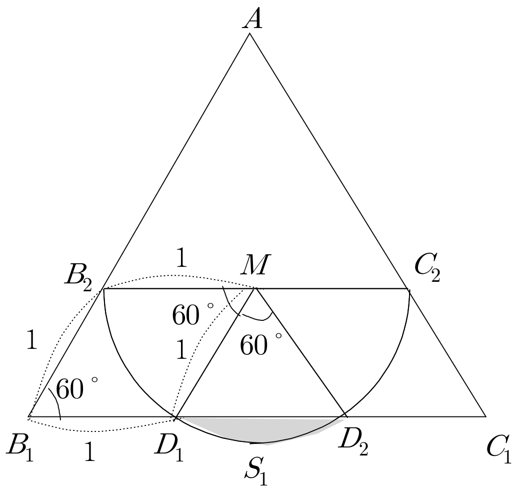
삼각형 AB_nC_n과 삼각형 $AB_{n+1}C_{n+1}$의 닮음비는 $3:2$ 이므로 넓이의 비는 $9:4$ 이다.

따라서, 각 단계에서 얻은 부분의 넓이는 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비수열을 이룬다.

또한,

$\overline{B_2C_2}=3\times\frac{2}{3}=2$

이므로 그림과 같이 선분 B_2C_2의 중점을 M, 선분 B_1C_1과 호 B_2C_2가 만나는 점을 D_1, D_2라 하면 사각형 $B_1B_2MD_1$은 한 변의 길이가 1인 평행사변형이므로 삼각형 MD_1D_2는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.



$\therefore\ S_1=\pi\times\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{6\pi-9\sqrt{3}}{36-16}=\frac{6\pi-9\sqrt{3}}{20}$$

<답> ②

13.

출제의도 : 도함수를 활용하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

해설]

함수 $f(x)=x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$ 이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$1\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$a-2$	$\searrow$	$a-4$	$\nearrow$	$a+16$

따라서 닫힌 구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값 M, 최솟값 m은

$M=a+16,\quad m=a-4$

이다.

이 때, $M+m=20$이므로

$2a+12=20,\ 2a=8$

$\therefore\ a=4$

<답> ④

14.

출제의도 : 행렬의 성질을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판정할 수 있는가?

해설]

ㄱ. $\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}\in S$(참)

ㄴ. $A\in S$ 이므로 $A^2=A$

A^{-1}이 존재하므로

$A^2=A$의 양변의 오른쪽에 A^{-1}을 곱하면

$A^2A^{-1}=AA^{-1}\qquad \therefore A=E$(참)

ㄷ. $A+E\in S$ 이므로 $(A+E)^2=A+E$

$A^2+2A+E=A+E$

$\therefore A^2=-A$

$A^4=(A^2)^2=(-A)^2=A^2=-A$

$(A^4)^2=(-A)^2=A^2=-A$

이므로 $(A^4)^2=A^4\qquad \therefore A^4\in S$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

<답> ⑤

15.

출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있는가?

해설]

$a_n = a_{n-2}+1$에서

(i) $n=2k-1$일 때,

$a_{2k-1} = a_{2k-3}+1(k \geq 2)$

수열 $\{a_{2k-1}\}$은 첫째항이 $a_1=2$이고 공차가 1인 등차수열이므로

$a_{2k-1} = 2+(k-1) \cdot 1 = k+1(k \geq 1)$

(ii) $n=2k$일 때,

$a_{2k} = a_{2k-2}+1(k \geq 2)$

수열 $\{a_{2k}\}$는 첫째항이 $a_2=1$이고 공차가 1인 등차수열이므로

$a_{2k} = 1+(k-1) \cdot 1 = \boxed{k}(k \geq 1)$

이다. $S_n = a_n a_{n+1}$이므로

$$S_n = \begin{cases} a_{2k-1}a_{2k} = (k+1)\times \boxed{k} & (n=2k-1) \\ a_{2k}a_{2k+1} = \boxed{k(k+2)} & (n=2k) \end{cases}$$

따라서 $f(k)=k,\ g(k)=k(k+2)$

$\therefore f(6)+g(7)=6+63=69$

<답> ③

16.

출제의도 : 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

해설]

이차방정식 $x^2-2x-1=0$에서

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}(k-\alpha)(k-\beta)$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\{k^2-(\alpha+\beta)k+\alpha\beta\}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}k^2-(\alpha+\beta)\sum_{k=1}^{10}k+\alpha\beta\sum_{k=1}^{10}1$$

$$=\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}-2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+(-1)\cdot 10$$

$$=385-110-10$$

$$=265$$

<답> ②

17.

출제의도 : 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

해설]

$f(x)=x^3-5x$라 하면

$f'(x)=3x^2-5$

이므로 점 $\mathrm{A}(1,-4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-5=-2$

따라서 접선의 방정식은

$y-(-4)=-2(x-1)$

$\therefore\ y=-2x-2$

이 때, 접선과 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 x좌표는

$x^3-5x=-2x-2$

$x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-2$

따라서 $\mathrm{B}(-2, 2)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-2-1)^2+(2+4)^2}$

$=\sqrt{9+36}$

$=3\sqrt{5}$

<답> ④

18.

출제의도 : 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가?

해설]

$(-3)^{n-1}$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수가 a_n이므로 방정식 $x^n=(-3)^{n-1}$에서

(i) $n=2k+1$(k는 자연수)인 경우

$x^n=(-3)^{2k}=3^{2k}>0$

n이 홀수이므로 실근의 개수는 1이다.

$\therefore a_{2k+1}=1$(k는 자연수)

(ii) $n=2k$(k는 자연수)인 경우

$x^n=(-3)^{2k-1}=-3^{2k-1}<0$

n이 짝수이므로 실근의 개수는 0이다.

$\therefore a_{2k}=0$(k는 자연수)

(i), (ii)에 의하여

$a_n=\begin{cases} a_{2k+1}=1\ (n=2k+1) \\ a_{2k}\quad\ =0\ (n=2k) \end{cases}$ (단, k는 자연수)

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=3}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}&=\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_4}{2^4}+\frac{a_5}{2^5}+\frac{a_6}{2^6}+\cdots\\&=\frac{1}{2^3}+\frac{0}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{0}{2^6}+\cdots\\&=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\cdots\\&=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

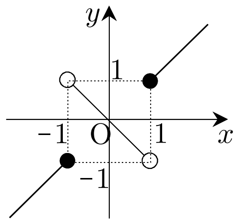
<답> ①

19.

출제의도 : 함수의 연속성에 대한 성질을 이해할 수 있는가?

해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이므로 불연속인 점은 2개다.(참)

ㄴ. $g(x)=(x-1)f(x)$라 하면

$g(1)=(1-1)\cdot f(1)=0\cdot 1=0$

또, $\lim\limits_{x\to 1-0} g(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x-1)(-x)=0\cdot 1=0$

$\lim\limits_{x\to 1+0} g(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)x=0\cdot 1=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} g(x)=0$

따라서 $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=g(1)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $h(x)=\{f(x)\}^2$라 하면

(i) $h(-1)=\{f(-1)\}^2=(-1)^2=1$

또, $\lim\limits_{x\to -1-0} h(x)=\lim\limits_{x\to -1-0} x^2=(-1)^2=1$

$\lim\limits_{x\to -1+0} h(x)=\lim\limits_{x\to -1+0}(-x)^2=1^2=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to -1} h(x)=1$

따라서 $\lim\limits_{x\to 1} h(x)=h(-1)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

(ii)$h(1)=\{f(1)\}^2=1^2=1$

또, $\lim\limits_{x\to 1-0} h(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(-x)^2=(-1)^2=1$

$\lim\limits_{x\to 1+0} h(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} x^2=1^2=1$

$\therefore \lim_{x\to 1} h(x) = 1$

따라서 $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

즉, (i), (ii)로부터 함수 $h(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 연속이므로 실수전체의 집합에서 연속이다.(참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

<답> ⑤

20.

출제의도 : 수열의 극한과 함수의 그래프와 방정식의 관계를 이해하고 있는가?

해설]

(i) $nf(a)-1 \geq 0$일 때,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{nf(a)-1-nf(a)}{2n+3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2n+3} = 0$$

이므로

$\lim_{n\to\infty} \frac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3} = 1$에 모순

(ii) $nf(a)-1 < 0$일 때,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-nf(a)+1-nf(a)}{2n+3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2nf(a)+1}{2n+3}$$

$$= -f(a) = 1$$

$\therefore\ f(a) = -1$

따라서 주어진 그래프에서 $f(a) = -1$인 상수 a의 개수는 2개이다.

<답> ②

21.

출제의도 : 상용로그의 가수의 성질을 알 수 있는가?

해설]

(i) $1 \leq x < 5$일 때, $2 \leq 2x < 10$이므로

$f(x) = \log x$, $f(2x) = \log 2x = \log 2 + \log x$

따라서 $f(2x) > f(x)$이므로 주어진 부등식을 만족하는 x는 존재하지 않는다.

(ii) $5 \leq x < 10$일 때, $10 \leq 2x < 20$이므로

$f(x) = \log x$

$f(2x) = -1 + \log 2x = -1 + \log 2 + \log x$

이때, 부등식 $f(2x) \leq f(x)$에서

$-1 + \log 2 + \log x \leq \log x$

$\therefore\ \log 2 < 1$

따라서 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(iii) $10 \leq x < 50$일 때, $20 \leq 2x < 100$이므로

$f(x) = -1 + \log x$,

$f(2x) = -1 + \log 2x = -1 + \log 2 + \log x$

따라서 $f(2x) > f(x)$이므로 주어진 부등식을 만족하는 x는 존재하지 않는다.

(iv) $50 \leq x < 100$일 때, $100 \leq 2x < 200$이므로

$f(x) = -1 + \log x$

$f(2x) = -2 + \log 2x = -2 + \log 2 + \log x$

이때, 부등식 $f(2x) \leq f(x)$에서

$-2 + \log 2 + \log x \leq -1 + \log x$

$\therefore\ \log 2 < 1$

따라서 주어진 부등식은 항상 성립한다.
위의 (i)~(iv)에서 $f(2x) \le f(x)$를 만족하는 자연수는
5, 6, 7, 8, 9와 50, 51, 52, ⋯, 99로 모두 55개다.

<답> ①

22.
출제의도 : 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

해설]
$f(x)=x^2+7x$ 에서
$f'(x)=2x+7$
$\therefore\ f'(3)=2\times3+7=13$

<답> 13

23.
출제의도 : 함수의 극한의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

해설]
$a\neq0$일 때, 주어진 식의 극한은 ∞ 또는 $-\infty$로 발산한다.
따라서 $a=0$이어야 한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{bn+7}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{7}{n}}{3+\frac{1}{n}}=4\text{에서 }\ \frac{b}{3}=4$$

$\therefore b=12$
$\therefore a+b=0+12=12$

<답> 12

24.
출제의도 : 등차수열의 첫째항과 공차를 구할 수 있는가?

해설]
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_{10}+a_6=(a+9d)+(a+5d)$
$\quad=2a+14d=6\ \cdots$ ㉠
$a_{10}-a_6=(a+9d)-(a+5d)$
$\quad=4d=-12\ \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=24,\ d=-3$
$\therefore\ a_2=a+d=21$

<답> 21

25.
출제의도 : 로그부등식을 풀 수 있는가?

해설]
(i) 진수 조건에서
$7-x>0,\ 7+x>0$
$\therefore -7<x<7$ -------------㉠
(ii) 주어진 부등식을 풀면
$\log_2(7-x)+\log_2(7+x)>4$
$\log_2(7-x)(7+x)>\log_2 16$
밑이 1보다 큰 2이므로
$(7-x)(7+x)>16$
$x^2-33=(x-\sqrt{33})(x+\sqrt{33})<0$
$\therefore -\sqrt{33}<x<\sqrt{33}$ -------㉡
이때, $5<\sqrt{33}<6$이므로 ㉠과 ㉡에서 정수 x는 $-5,\ -4,\ -3,\ \cdots,\ 3,\ 4,\ 5$의 11개다.

<답> 11

26.

출제의도 : 역행렬과 연립일차방정식의 관계를 이해하고 있는가?

해설]

$\begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=2 \end{cases}$ 에서

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 즉, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

주어진 연립일차방정식의 해가

$x=5,\ y=4$ 이므로

$A\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

$\therefore\ p=5,\ q=4$

$\therefore\ p+q=9$

<답> 9

27.

출제의도 : 미분계수의 뜻을 이해하고 있는가?

해설]

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=9$에서 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-5\}=0$이어야 한다.

$\therefore \lim\limits_{x\to1}f(x)=5$

다항함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$이다.

$\therefore f(1)=5$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-5}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)=9$$

$$\therefore g'(1)=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{xf(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\{xf(x)-f(x)\}+\{f(x)-f(1)\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(x)}{x-1}+\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}f(x)+f'(1)$$
$$=f(1)+f'(1)$$
$$=5+9$$
$$=14$$

<답> 14

28.

출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 수열의 점화식을 구하여 일반항을 구할 수 있는가?

해설]

$\dfrac{1}{n+2}<\dfrac{a_n}{k}<\dfrac{1}{n}$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이다.

따라서 주어진 부등식의 각 변의 역수를 취하면

$$n<\frac{k}{a_n}<n+2$$

$$\therefore\ na_n<k<(n+2)a_n$$

이때, na_n, $(n+2)a_n$은 모두 자연수이므로 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 k의 개수는

$$(n+2)a_n - na_n - 1 = 2a_n - 1$$

$$\therefore\ a_{n+1} = 2a_n - 1$$

이때, $a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$이므로 수열 $\{a_n - 1\}$은 첫째항이 $a_1 - 1 = 1$, 공비가 2인 등비수열이다.

$$\therefore\ a_n - 1 = 1 \times 2^{n-1}\ (n = 1,2,3,\cdots)$$

$$\therefore\ a_n = 2^{n-1} + 1$$

$$\therefore\ a_{10} = 2^9 + 1 = 513$$

<답> 513

29.

출제의도 : 지수방정식이 실근을 갖기 위한 조건을 구할 수 있는가?

해설]

$4^x + 4^{-x} + a(2^x - 2^{-x}) + 7 = 0$

$(2^x - 2^{-x})^2 + a(2^x - 2^{-x}) + 9 = 0$

$2^x - 2^{-x} = X$ 로 놓으면

$X^2 + aX + 9 = 0$

이 방정식이 실근을 가지려면 판별식 D는

$D = a^2 - 36 \ge 0$

$(a+6)(a-6) \ge 0$

$\therefore\ a \le -6$ 또는 $a \ge 6$

따라서 양수 a의 최솟값 m은

$m = 6$

$\therefore\ m^2 = 36$

<답> 36

30.

출제의도 : 그래프를 이해하여 로그부등식을 풀고 주어진 조건을 만족하는 값을 구할 수 있는가?

해설]

(가)에서 $a \ge 3$이고

(나)에서

$$\frac{\log_n a}{a-2} \le \frac{1}{2}\ \cdots\ ㉠$$

이어야 한다.

(i) ㉠에 $a = 3$을 대입하면

$$\frac{\log_n 3}{3-2} \le \frac{1}{2},\ \log_n 3 \le \frac{1}{2}$$

$$\log_n 3 \le \log_n \sqrt{n}$$

따라서 $\sqrt{n} \ge 3$ ($\because\ n > 1$)이므로

$$n \ge 9$$

(ii) ㉠에 $a = 4$를 대입하면

$$\frac{\log_n 4}{4-2} \le \frac{1}{2},\ \log_n 4 \le 1$$

$$\log_n 4 \le \log_n n$$

$$\therefore\ n \ge 4\ (\because\ n > 1)$$

(iii) ㉠에 $a = 5$를 대입하면

$$\frac{\log_n 5}{5-2} \le \frac{1}{2}$$

따라서 $n^3 \ge 25$이므로

$$n \ge 3\ (\because\ n\text{은 자연수})$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} 4 & (4 \le n \le 8) \\ 3 & (n \ge 9) \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{n=4}^{30} f(n) = \sum_{n=4}^{8} f(n) + \sum_{n=9}^{30} f(n)$$
$$= \sum_{n=4}^{8} 4 + \sum_{n=9}^{30} 3 = 4 \times 5 + 3 \times 22 = 86$$

<답> 86

2012학년도 4월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수리 영역 •

[가 형]

1	②	**2**	④	**3**	④	**4**	①	**5**	①
6	③	**7**	⑤	**8**	①	**9**	③	**10**	①
11	②	**12**	⑤	**13**	④	**14**	③	**15**	②
16	⑤	**17**	③	**18**	②	**19**	⑤	**20**	④
21	⑤	**22**	5	**23**	16	**24**	55	**25**	29
26	70	**27**	508	**28**	3	**29**	14	**30**	8

1. [출제의도] 지수 계산하기

$4^{\frac{3}{2}}\times 16^{-\frac{1}{2}}=2^3\times 2^{-2}=2$

2. [출제의도] 행렬 연산하기

$X=B-2A=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\-1&-1\end{pmatrix}$

3. [출제의도] 삼각함수의 성질을 알고 계산하기

$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{1}{8}$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x}{x^2}=2$에서 $f(x)$는 x^2의 계수가 2인 이차함수이고

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2-1}=3$에서 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=0$이므로

$f(x)=2(x+1)(x+a)$이다.

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{2(x+a)}{x-1}=\frac{2(-1+a)}{-2}=3$

$\therefore\ a=-2$

따라서 $f(x)=2(x+1)(x-2)$이므로 $f(1)=-4$

5. [출제의도] 여러 가지 함수의 미분법 이해하기

$\ln y=2e^{-3x}$이고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{y'}{y}=-6e^{-3x}$

$y'=-6e^{-3x}\cdot y$ …… ㉠

㉠에 $x=0,\ y=e^2$을 대입하면 $y'=-6e^2$

따라서 점 $(0,e^2)$에서의 접선의 기울기는 $-6e^2$

6. [출제의도] 일차변환과 행렬 이해하기

$A+B=C$라 하면 $C=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$

$f(A)+f(B)=f(A+B)=f(C)=3B$

따라서 $f^{-1}(B)=\frac{1}{3}C$이므로 $f^{-1}(B)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

7. [출제의도] 분수부등식 이해하기

$f(x)=ax(x-2)\,(a>0)$라 하면

부등식 $\frac{f(x-2)}{f(x-4)}\le 1$에서 $\frac{a(x-2)(x-4)}{a(x-4)(x-6)}\le 1$이므로

$x\ne 4$이고 $\frac{4}{x-6}\le 0$이다.

$\frac{4}{x-6}\le 0$의 양변에 $(x-6)^2$을 곱하여 정리하면

$x\le 6\,(x\ne 4,\ x\ne 6)$이다.

따라서 부등식 $\frac{f(x-2)}{f(x-4)}\le 1$을 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3, 5이므로 모든 자연수의 합은 11

8. [출제의도] 수열의 극한의 성질 이해하기

(가)에서 $\frac{3n^2+1}{n(n+1)}<a_n$이고

(나)에서 $a_n<3-\frac{1}{2}b_n$이므로

$\frac{3n^2+1}{n(n+1)}<a_n<3-\frac{b_n}{2}$이다.

한편, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n(n+1)}\le\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{b_n}{2}\right)$이고

(다)에서 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$이므로

$3\le\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le 3$이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$

9. [출제의도] 함수의 연속성 추론하기

ㄱ. $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to-0}f(x)=-1$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1+0}\{f(x)-f(-x)\}=-1-1=-2$ (거짓)

ㄷ. $|f(-1)|\cdot\sin\{\pi\times(-1)\}=0$,

$\lim\limits_{x\to-1+0}|f(x)|\cdot\sin\pi x=\lim\limits_{x\to-1-0}|f(x)|\cdot\sin\pi x=0$

이므로 함수 $|f(x)|\cdot\sin\pi x$는 $x=-1$에서 연속이다.

같은 방법으로 함수 $|f(x)|\cdot\sin\pi x$는 $x=0,\ x=1$에서 연속이다.

$\therefore$ 함수 $|f(x)|\cdot\sin\pi x$는 열린 구간 $(-2,2)$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

10. [출제의도] 고차부등식 이해하기

$x^3-6x^2+11x-6>0$

$(x-1)(x-2)(x-3)>0$

$\therefore\ 1<x<2$ 또는 $x>3$

$B\subset A\subset C$이므로 $\alpha\ge 3,\ \beta\le 1$

따라서 $\alpha-\beta$의 최솟값은 2

11. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

지수함수 $y=2^{2x+a}+b$의 그래프에서 점근선의 방정식이 $y=2$이므로 $b=2$이다.

$y=f(x)$의 그래프는 지수함수 $y=2^{2x+a}+2$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 함수 $y=2^{-2x+a}+2$의 그래프이다.

함수 $y=2^{-2x+a}+2$의 그래프가 점 $(-1,10)$을 지나므로 $a=1$이다.

따라서 $a+b=3$

12. [출제의도] 로그의 뜻을 알고 문제해결하기

해발고도 1840m인 곳에서의 기압을 p_1(hPa)이라 하면 $p_0=1000,\ t=10,\ H=1840$이므로

$1840=18400(1+0.04\times10)\log\frac{1000}{p_1}$

$\therefore\ \frac{1}{14}=3-\log p_1$이므로 $p_1=10^{\frac{41}{14}}$

따라서 해발고도 1840m인 곳에서의 기압(hPa)은 $10^{\frac{41}{14}}$

13. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f'(x)=a(x+1)(x-1)\,(a>0)$이므로

$x=-1$에서 극댓값, $x=1$에서 극솟값을 가진다.

$f(x)=\int a(x+1)(x-1)dx$

$=\int a(x^2-1)dx=a\left(\frac{x^3}{3}-x\right)+C$

(단, C는 적분상수)

$f(-1)=a\left(-\frac{1}{3}+1\right)+C=4$ …… ㉠

$f(1)=a\left(\frac{1}{3}-1\right)+C=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$a=3,\ C=2$이므로 $f(x)=x^3-3x+2$이다.

따라서 $f(3)=20$

14. [출제의도] 행렬의 성질 추론하기

ㄱ. $(ABA^{-1})^2=(ABA^{-1})(ABA^{-1})$

$=AB(A^{-1}A)BA^{-1}=ABEBA^{-1}$

$=ABBA^{-1}=AB^2A^{-1}$ (참)

ㄴ. 행렬 A의 역행렬이 존재하면

$A^2(A^{-1})^2=AAA^{-1}A^{-1}=A(AA^{-1})A^{-1}$

$=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$

$\therefore\ (A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$ (참)

ㄷ. (반례) $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 추론하기

$p=3,\ q=6,\ f(n)=3n$이므로 $p+q+f(10)=39$

16. [출제의도] 정적분 이해하기

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2x(\sin x+1)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\cos x(\sin x+1)dx$

$\sin x=t$로 치환하면 $\cos x\,dx=dt$

$x=0$일 때 $t=0$이고, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$\int_0^1(2t^2+2t)\,dt=\left[\frac{2t^3}{3}+t^2\right]_0^1=\frac{5}{3}$

17. [출제의도] 분수방정식의 뜻을 알고 문제해결하기

코끼리 트래킹 코스에서 이동하는 데 걸린 소요시간은

$\frac{12}{8}=1.5$

뗏목 래프팅 코스에서 이동한 평균속력을 v라 하면

뗏목 래프팅 코스에서 이동하는 데 걸린 소요시간은

$\frac{13.5}{v}$,

승마 코스에서 이동하는 데 걸린 소요시간은

$\frac{12}{v+10}$이므로

$1.5+\frac{12}{v+10}=\frac{13.5}{v}$ …… ㉠

㉠의 양변에 $v(v+10)$을 곱하여 정리하면

$v^2+9v-90=(v-6)(v+15)=0$

$\therefore\ v=6\,(\because v>0)$

뗏목 래프팅 코스에서 이동하는 데 걸린 소요시간은

$\frac{13.5}{6}=2.25$

승마 코스에서 이동하는 데 걸린 소요시간은

$\frac{12}{16}=0.75$

(세 코스에서 이동하는 데 걸린 소요시간의 총합)

$=1.5+2.25+0.75=4.5$

따라서 갑이 승마, 뗏목 래프팅, 코끼리 트래킹 코스에서 이동하는 데 걸린 소요시간의 총합은 4시간 30분

18. [출제의도] 일차변환의 뜻을 알고 문제해결하기

$A=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{8}&-\sin\frac{\pi}{8}\\\sin\frac{\pi}{8}&\cos\frac{\pi}{8}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$이라 하자.

행렬 A는 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{8}$만큼 회전시키는 회전변환을 나타내는 행렬이고, 행렬 B는 원점을 닮음의 중심으로 하고 닮음비가 $\frac{1}{2}$인 닮음변환을 나타내는 행렬이다.

(나)에서 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=AB\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$이고

(가)에서 $x_0=1,\ y_0=0$이므로

$x_{98}=\frac{\sqrt2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{98},\ y_{102}=\frac{\sqrt2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{102}$

$\therefore\ x_{98}+y_{102}=17\sqrt2\left(\frac{1}{2}\right)^{103}$

따라서 $k=17\sqrt2$

19. [출제의도] 정적분의 뜻을 알고 추론하기

ㄱ. $\int_0^1 f(x)dx=\left[e^x-x\right]_0^1=e-2$ (참)

ㄴ. $g(x)=f(x)-x$라 하자.

$x>0$에서 $g'(x)=e^x-1>0$이므로

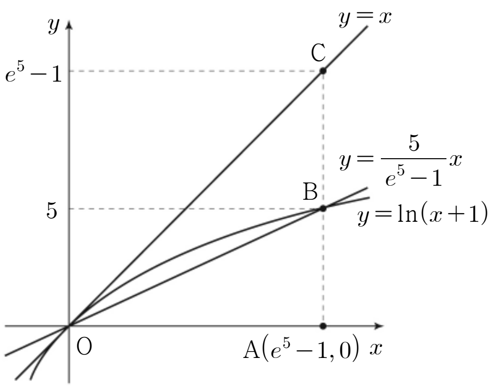
함수 $g(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 증가한다.

따라서 $g(0)=0$이므로 $x>0$에서 $f(x)>x$이다. (참)

ㄷ. $f^{-1}(x)=\ln(x+1)$이므로

$\triangle \mathrm{OAB}=\frac{5(e^5-1)}{2}<\int_0^{e^5-1}f^{-1}(x)dx$,

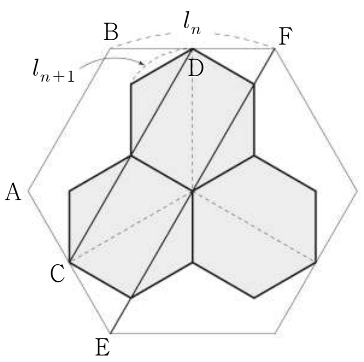
$\int_0^{e^5-1}f^{-1}(x)dx<\frac{(e^5-1)^2}{2}=\triangle \mathrm{OAC}$ (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. [출제의도] 무한등비급수를 활용하여 문제해결하기

H_n의 한 정육각형의 한 변의 길이를 l_n이라 하고 H_{n+1}의 한 정육각형의 한 변의 길이를 l_{n+1}이라 하자.



$2\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{EF}}$이므로 $\frac{3}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$이다.

$\frac{3}{2}l_n=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}l_{n+1}$이 성립하므로, $l_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{4}l_n$에서

$S_{n+1}=3\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2S_n=\frac{9}{16}S_n$

수열 $\{S_n\}$은

$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2\times6\times3=\frac{27}{32}\sqrt{3}$이고, 공비가 $\frac{9}{16}$인 무한등비수열이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{27}{32}\sqrt{3}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{27}{14}\sqrt{3}$

21. [출제의도] 도함수의 뜻을 알고 추론하기

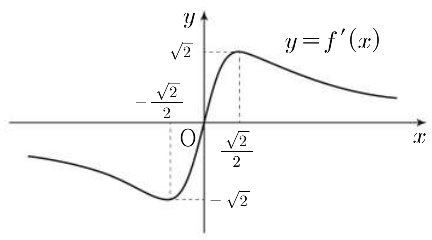
ㄱ. $f'(x)=\frac{4x}{2x^2+1}$이므로 $f'(-x)=-f'(x)$ (참)

ㄴ. $f''(x)=\frac{4(2x^2+1)-4x\cdot4x}{(2x^2+1)^2}=\frac{4(1-2x^2)}{(2x^2+1)^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f'(x)$	↘	$-\sqrt{2}$	↗	$\sqrt{2}$	↘

$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$이므로 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $f'(x)$의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다. (참)

ㄷ. i) $x_1=x_2$일 때, 주어진 부등식은 성립한다.

ii) $x_1\neq x_2$일 때, 닫힌 구간 $[x_1,\ x_2]$에서

평균값의 정리에 의하여 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(c)$인

c가 열린 구간 $(x_1,\ x_2)$에서 적어도 하나 존재한다.

ㄱ, ㄴ에 의하여 $-\sqrt{2}\le f'(x)\le\sqrt{2}$이므로

$\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|=|f'(c)|\le\sqrt{2}$이다.

∴ i), ii)에 의하여 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $|f(x_1)-f(x_2)|\le\sqrt{2}\,|x_1-x_2|$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. [출제의도] 행렬과 연립일차방정식 이해하기

연립일차방정식 $\begin{pmatrix}1-k&-2\\-3&4-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$가

$x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지므로

$(1-k)(4-k)-6=0$, $k^2-5k-2=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

모든 실수 k의 값의 합은 5

23. [출제의도] 무리방정식 이해하기

$x^2+5x-6+\sqrt{x^2+5x}=0$에서

$\sqrt{x^2+5x}=t$ $(t\ge0)$라 하면,

$t^2+t-6=0$ ∴ $t=2$ $(\because t\ge0)$

$\sqrt{x^2+5x}=2$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+5x-4=0$

∴ 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실근의 곱 $p=-4$

따라서 $p^2=16$

24. [출제의도] 여러 가지 수열 이해하기

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}=\frac{n+2}{n+1}\times\frac{n}{n+1}$

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}$, $\frac{a_3}{a_2}=\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}$, $\cdots$, $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n}\times\frac{n-1}{n}$

$\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1\times3}{2\times2}\times\frac{2\times4}{3\times3}\times\cdots\times\frac{(n-1)(n+1)}{n\times n}$

∴ $a_n=\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}$

따라서 $100a_{10}=55$

25. [출제의도] 일차변환과 행렬의 성질 이해하기

일차변환을 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$라 하면

$\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ ⋯⋯ ㉠

$\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $p=-5$, $q=4$, $r=8$, $s=-6$

∴ $\begin{pmatrix}-5&4\\8&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\-18\end{pmatrix}$

따라서 $a=11$, $b=-18$이므로 $a-b=29$

26. [출제의도] 삼각방정식의 뜻을 알고 문제해결하기

$\angle\mathrm{POB}=2\theta$이므로 $\angle\mathrm{PAB}=\theta$,

$\angle\mathrm{BOQ}=\theta$이므로 $\angle\mathrm{QAB}=\frac{\theta}{2}$이다.

$\triangle\mathrm{ABP}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}=2\cos\theta$, $\triangle\mathrm{AQB}$에서 $\overline{\mathrm{BQ}}=2\sin\frac{\theta}{2}$

$3\overline{\mathrm{AP}}=7\overline{\mathrm{BQ}}$이므로 $3\cos\theta=7\sin\frac{\theta}{2}$이다.

$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$이므로

$18\cos^2\theta+49\cos\theta-49=0$이다.

$\cos\theta=\frac{7}{9}$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 $90\cos\theta=70$

27. [출제의도] 등차수열과 등비수열 이해하기

$a_n=S_n-S_{n-1}=n+1$ $(n\ge2)$, $a_1=S_1=2$이므로

$a_n=n+1$ $(n\ge1)$

$\sum_{n=1}^{7}2^{a_n}=\sum_{n=1}^{7}2^{n+1}=\frac{2^2(2^7-1)}{2-1}=508$

28. [출제의도] 미분계수의 뜻을 알고 문제해결하기

$\frac{1}{n}=h$라 하면, $n\to\infty$일 때, $h\to0$이다.

(준식)$=\lim_{h\to0}\frac{\{g(1+h)-g(1)\}-\{g(1-2h)-g(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}+2\lim_{h\to0}\frac{g(1-2h)-g(1)}{-2h}$

$=g'(1)+2g'(1)=3g'(1)$

$g(1)=f^{-1}(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$f(a)=a^3+3a^2+4a+5=1$에서 $a=-2$이다.

$f'(x)=3x^2+6x+4$에서 $f'(-2)=4$이고

$g(f(x))=x$에서 $g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$이므로

$3g'(1)=3\times\frac{1}{f'(-2)}=\frac{3}{4}$이다.

따라서 $4p=3$

29. [출제의도] 지표와 가수의 뜻을 알고 문제해결하기

$\log x=f(x)+g(x)$ ($f(x)$는 정수, $0\le g(x)<1$)

$0\le g(x^2)<1$, $0\le g(x^3)<1$이므로

(가)에서 $0\le f(x)=g(x^2)+g(x^3)<2$이다.

$f(x)$는 정수이므로 0 또는 1이다.

한편, (나)에 의하여 $f(x)\neq0$

∴ $f(x)=1$

$\log x^2=f(x^2)+g(x^2)=2f(x)+2g(x)$ ⋯⋯ ㉠

$\log x^3=f(x^3)+g(x^3)=3f(x)+3g(x)$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$f(x^2)+f(x^3)+g(x^2)+g(x^3)=5f(x)+5g(x)$ ⋯⋯ ㉢

㉢의 좌변은 정수이므로 $5g(x)$는 정수이다.

∴ $0<g(x)<1$에서 $g(x)$가 될 수 있는 값은

$\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$이다.

$g(x)=\frac{4}{5}$일 때, $g(x^2)=\frac{3}{5}$, $g(x^3)=\frac{2}{5}$, $g(x^4)=\frac{1}{5}$

이므로 $g(x^2)>g(x^3)>g(x^4)$이 성립한다.

∴ $g(x)=\frac{4}{5}$이므로 $\log x=1+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$, $x=10^{\frac{9}{5}}$

따라서 $m=5$, $n=9$이므로 $m+n=14$

30. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

점 P는 호 AB 위의 점이고 시각 t일 때 $\angle\mathrm{POA}=t$ $\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$이므로 점 P의 좌표는 $(\cos t,\ \sin t)$이다.

점 Q$(x,0)$의 시각 t에서의 위치는

$x=\cos t+\sqrt{5-\sin^2t}$, $y=0$

점 Q의 x좌표의 시간에 대한 변화율

$\frac{dx}{dt}=-\sin t-\frac{\sin t\cos t}{\sqrt{5-\sin^2t}}$

∴ $\angle\mathrm{POA}=\frac{\pi}{4}$가 되는 순간, 점 Q의 x좌표의 시간에 대한 변화율

$$r=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{5-\frac{1}{2}}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{6}=-\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

따라서 $9r^2=8$

[나 형]

1	②	**2**	④	**3**	③	**4**	②	**5**	①
6	③	**7**	④	**8**	①	**9**	③	**10**	⑤
11	②	**12**	⑤	**13**	④	**14**	③	**15**	②
16	①	**17**	③	**18**	①	**19**	①	**20**	④
21	⑤	**22**	5	**23**	6	**24**	55	**25**	26
26	32	**27**	508	**28**	256	**29**	14	**30**	295

1. '가'형과 같음

2. '가'형과 같음

3. [출제의도] 무한수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3}{2^{2n}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{4^n}}{1-\frac{1}{4^n}}=1$$

4. [출제의도] 역행렬의 성질 이해하기

행렬 $\begin{pmatrix} t-1 & 3 \\ 2 & t+2 \end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않으므로

$(t-1)(t+2)-6=0$이고

$t^2+t-8=0$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

모든 실수 t의 값의 곱은 -8

5. [출제의도] 지수부등식 이해하기

$2^{-2x^2}>2^{-4x}$, $2x^2<4x$

$\therefore\ 0<x<2$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=2$이므로 $\alpha+\beta=2$

6. [출제의도] 무한급수의 수렴조건 이해하기

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3^a+1)^n}{6^{3n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^a+1}{216}\right)^n$ 이 수렴하므로

$-1<\dfrac{3^a+1}{216}<1$, $-217<3^a<215$

$\therefore$ 자연수 a는 1, 2, 3, 4이다.

따라서 a의 개수는 4

7. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\displaystyle\lim_{x\to2}(x-a)=0$이므로 $a=2$이다.

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-3}=-1$이므로

$b=-1$이다.

따라서 $a+b=1$

8. '가'형과 같음

9. [출제의도] 함수의 연속성 추론하기

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1-0}f(x)=2$ (참)

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to-1+0}f(-x)=2$, $f(1)=1$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}f(-x)\neq f(1)$이다. (거짓)

ㄷ. $f(0)f(1)=2\times1=2$,

$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)f(x+1)=1\times2=2$,

$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)f(x+1)=2\times1=2$에서

$\displaystyle f(0)f(1)=\lim_{x\to0}f(x)f(x+1)$이므로

함수 $f(x)f(x+1)$은 $x=0$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

10. [출제의도] 등차수열과 등비수열 이해하기

$6=a+3+b$, $1=\dfrac{4}{(a+3)b}$

$a+b=3$, $(a+3)b=4$에서

$a=\sqrt{5}$ ($\because a>0$), $b=3-\sqrt{5}$

따라서 $b-a=3-2\sqrt{5}$

11. '가'형과 같음

12. '가'형과 같음

13. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$2f(x)-3g(x)=h(x)$라 하면, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}h(x)=2$이고

$3g(x)=2f(x)-h(x)$이다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8f(x)-3g(x)}{3g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{6f(x)+h(x)}{2f(x)-h(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{h(x)}{f(x)}}{2-\frac{h(x)}{f(x)}}=3$$

14. '가'형과 같음

15. '가'형과 같음

16. [출제의도] 등비수열의 뜻을 알고 문제해결하기

$a_n=2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이고, A_n은 $\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}$의 넓이이므로

$A_n=\dfrac{1}{2}\times2\left|-\dfrac{1}{2}\right|^{n-1}\times1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{20}A_n=\frac{1\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{19}$

17. [출제의도] 등차수열의 뜻을 알고 추론하기

수열 $\{a_n\}$이 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n<a_{n+1}$이다.

따라서 주어진 부등식에서

$x\geq\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$이므로 $b_n=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$이다.

ㄱ. $b_1=\dfrac{a_1+a_2}{2}$ (참)

ㄴ. $b_n=\dfrac{1+3(n-1)+1+3n}{2}=3n-\dfrac{1}{2}$이므로

수열 $\{b_n\}$은 공차가 3인 등차수열이다. (거짓)

ㄷ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}b_n=\sum_{n=1}^{10}\left(3n-\frac{1}{2}\right)=3\times\frac{10\times11}{2}-5=160$(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

18. [출제의도] 순서도를 이해하여 값 추론하기

$\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2}\right)$이므로

$$S=\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\cdots+\frac{1}{26\times29}+\frac{1}{29\times32}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{29}-\frac{1}{32}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{32}\right)=\frac{5}{32}$$

19. [출제의도] 함수의 극한의 뜻을 알고 문제해결하기

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \left(|x|<\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ -\frac{1}{3} & \left(|x|=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ 1 & \left(|x|>\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$$

따라서 $\displaystyle f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\lim_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}-0}f(x)=-\frac{1}{3}+(-1)=-\frac{4}{3}$

20. '가'형과 같음

21. [출제의도] 연립일차방정식과 행렬 문제해결하기

주어진 조건을 연립방정식으로 나타내면

$\begin{cases}x+y=15\\5x+10y=125\end{cases}$

$5x+10y=125$의 양변을 5로 나누면

$\begin{cases}x+y=15\\x+2y=25\end{cases}$

$\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\25\end{pmatrix}$이므로 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}15\\25\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\25\end{pmatrix}$에서 $a=-1$, $b=-1$

따라서 $a+b=-2$

22. '가'형과 같음

23. [출제의도] 연속함수의 성질 이해하기

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\displaystyle f(1)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+5)}{x-1}=6$

따라서 $a=6$

24. '가'형과 같음

25. [출제의도] 로그부등식 이해하기

$x>0$, $x>4$이므로 $x>4$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\log_2 x(x-4)\leq\log_2 32$

$x^2-4x-32\leq0$

$(x+4)(x-8)\leq0$에서 $-4\leq x\leq8$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $4<x\leq8$

x는 5, 6, 7, 8이므로 x의 값의 합은 26

26. [출제의도] 로그방정식 이해하기

$3^x=3^{2y}$에서

$x=2y$ $\cdots\cdots$ ㉠

$(\log_2 8x)(\log_2 4y)=-1$에서

$(3+\log_2 x)(2+\log_2 y)=-1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$(\log_2 y+3)^2=0$이므로 $y=\dfrac{1}{8}$, $x=\dfrac{1}{4}$이다.

따라서 $\alpha=\dfrac{1}{4}$, $\beta=\dfrac{1}{8}$이므로 $\dfrac{1}{\alpha\beta}=32$

27. '가'형과 같음

28. [출제의도] 여러 가지 수열 이해하기

$a_1^2=\dfrac{1}{2}$, $a_2^2=1$, $a_3^2=\dfrac{1}{2}$, $a_4^2=0$,

$a_5^2=\dfrac{1}{2}$, $a_6^2=1$, $a_7^2=\dfrac{1}{2}$, $a_8^2=0$, $\cdots$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{32}na_n^2=\frac{1}{2}\times\frac{16\times32}{2}+1\times\frac{8\times32}{2}=256$

29. '가'형과 같음

30. [출제의도] 여러 가지 수열의 뜻을 알고 문제해결하기

$b_n=a_{n+1}-a_n=2n-1$이므로

$\displaystyle a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=1+\frac{2n(n-1)}{2}-(n-1)$

$=n^2-2n+2$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(n^2-2n+2)$

$\displaystyle=\frac{10\times11\times21}{6}-2\times\frac{10\times11}{2}+20=295$

2013학년도 대학수학능력시험 대비

2012학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수리 영역 •

수리'가'형 정답

1	②	2	⑤	3	④	4	③	5	①
6	③	7	⑤	8	④	9	⑤	10	②
11	②	12	①	13	④	14	①	15	③
16	③	17	①	18	⑤	19	②	20	④
21	⑤	22	13	23	8	24	208	25	16
26	51	27	9	28	136	29	24	30	32

해 설

1. [출제의도] 로그의 밑을 같게 하여 로그의 계산을 한다.

$$\frac{1}{2}\log_3 6-\log_9 2=\frac{1}{2}\log_3 6-\frac{1}{2}\log_3 2$$
$$=\frac{1}{2}(\log_3 6-\log_3 2)$$
$$=\frac{1}{2}\log_3\frac{6}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\log_3 3=\frac{1}{2}$$

2. [출제의도] 행렬의 기본연산인 덧셈, 뺄셈, 실수배 등의 계산을 한다.

$2A=X-B$에서

$X=2A+B$

$$=2\begin{pmatrix}1&-2\\2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&2\\-1&3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&-4\\4&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&2\\-1&3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&-2\\3&1\end{pmatrix}$$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은 3이다.

3. [출제의도] 무한등비수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-1}{(2^n+1)(2^n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-1}{4^n-1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4^n}}=4$$

4. [출제의도] 삼각함수의 여러 가지 공식을 이용하여 함수의 최솟값을 구한다.

$$f(x)=\frac{(\cos x+\sin x)^2}{\sin 2x}$$
$$=\frac{\sin 2x+1}{\sin 2x}$$
$$=1+\frac{1}{\sin 2x}$$

$0<\sin 2x\le 1$이므로 $f(x)$의 최솟값은 2이다.

5. [출제의도] 무연근의 뜻과 무리방정식의 풀이 방법을 이해하여 무리방정식의 해를 구한다.

$\sqrt{x+4}=|x|-2$ ⋯ ㉠

주어진 식의 양변을 제곱하면

$x+4=x^2-4|x|+4$

(ⅰ) $x\ge 0$일 때

$x^2-5x=0,\ x(x-5)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=5$

㉠에 대입하면 $x=0$은 무연근이다. 따라서 구하는 근은 $x=5$이다.

(ⅱ) $x<0$일 때

$x^2+3x=0,\ x(x+3)=0$

$\therefore\ x=-3$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 모든 실근의 곱은 -15이다.

6. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 같은 값을 갖는 삼각함수를 찾는다.

$$\tan 10^\circ+\frac{1}{\tan 20^\circ}=\frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}+\frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$$
$$=\frac{\sin 10^\circ\sin 20^\circ+\cos 10^\circ\cos 20^\circ}{\cos 10^\circ\sin 20^\circ}$$
$$=\frac{\cos(20^\circ-10^\circ)}{\cos 10^\circ\sin 20^\circ}$$
$$=\frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ\sin 20^\circ}$$
$$=\frac{1}{\sin 20^\circ}$$

7. [출제의도] 극값의 뜻을 이해하여 조건을 만족시키는 다항함수의 미분계수를 구한다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$이므로 $f(x)$는 삼차함수이고 삼차항의 계수는 1이다. 따라서 $f'(x)$는 이차함수이고 이차항의 계수는 3이다.

$x=-1$과 $x=2$에서 극값을 가지므로 $f'(x)$는 $x+1$과 $x-2$를 인수로 갖는다.

따라서 $f'(x)=3(x+1)(x-2)$이다.

$$\therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(3+h)-f(3)\}-\{f(3-h)-f(3)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}$$
$$=2f'(3)=2\cdot 3\cdot 4\cdot 1=24$$

8. [출제의도] 무연근과 그래프의 평행이동을 이해하여 분수방정식의 해의 개수를 구한다.

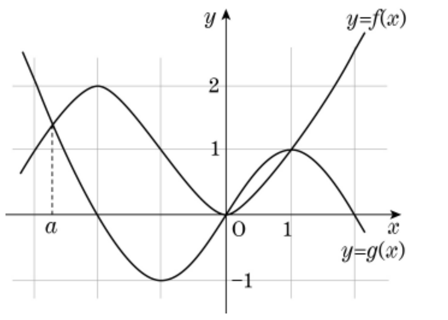
방정식 $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}-1\right\}\left\{\frac{g(x)+1}{f(x)}-1\right\}=0$에서

$\frac{\{f(x)-g(x)\}\{g(x)-f(x)+1\}}{f(x)\,g(x)}=0$이므로

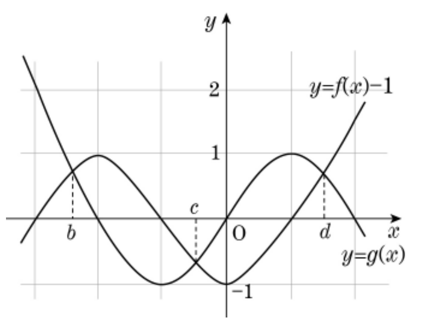
$f(x)-g(x)=0$ 또는 $g(x)-f(x)+1=0$,

$f(x)\ne 0,\ g(x)\ne 0$

(ⅰ) 방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 $x=a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$이다. 그런데 $x=0$은 무연근이므로 구하는 해는 $x=a$ 또는 $x=1$이다.



(ⅱ) 방정식 $g(x)=f(x)-1$의 해는 $x=b$ 또는 $x=c$ 또는 $x=d$이고 이들은 모두 무연근이 아니다.



(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 해의 개수는 5이다.

9. [출제의도] 위치와 속도의 관계 및 속도의 부호의 의미를 이해하여 두 점이 서로 반대 방향으로 움직인 시각을 구한다.

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$$v_P=\frac{dx_P}{dt}=2t-a$$
$$v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=\frac{2t-1}{t^2-t+1}$$

두 점 P, Q가 움직이는 방향이 서로 반대 방향이 되려면 $v_Pv_Q<0$이어야 한다.

$$v_Pv_Q=\frac{(2t-a)(2t-1)}{t^2-t+1}<0$$

$\therefore\ (2t-a)(2t-1)<0$ ⋯ ㉠ $(\because t^2-t+1>0)$

㉠의 해가 $\frac{1}{2}<t<2$이므로 $\frac{a}{2}=2$

$\therefore\ a=4$

10. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구한다.

$2^{\frac{1}{x}}=80$ ⋯ ㉠, $2^{\frac{2}{y}}=\frac{1}{10}$ ⋯ ㉡, $2^{\frac{1}{z}}=a^{\frac{1}{3}}$ ⋯ ㉢

㉠×㉡÷㉢ 하면

$$2^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}}=\frac{80\times\frac{1}{10}}{\sqrt[3]{a}}$$

$$\frac{80\times\frac{1}{10}}{\sqrt[3]{a}}=2,\ \sqrt[3]{a}=4$$

$\therefore\ a=4^3=64$

[다른풀이]

$$\frac{1}{x}=\log_2 80,\quad \frac{1}{y}=\log_4\frac{1}{10},\quad \frac{1}{z}=\log_8 a$$
$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=\log_2\frac{80\times\frac{1}{10}}{\sqrt[3]{a}}=1$$
$$2^1=\frac{80\times\frac{1}{10}}{\sqrt[3]{a}},\ \sqrt[3]{a}=4$$

$\therefore\ a=4^3=2^6=64$

11. [출제의도] 행렬의 연산법칙과 역행렬의 뜻을 이해하여 행렬의 성분의 합을 구한다.

(가)에서 $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+A^{-1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

(나)에서 $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+A^{-1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$A^{-1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

$\therefore\ A\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$로 놓으면

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$이므로

$2a+3b=3,\ 2c+3d=5$ ⋯ ㉠

$-a-2b=2,\ -c-2d=3$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=12,\ b=-7,\ c=19,\ d=-11$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix}12&-7\\19&-11\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 13이다.

[다른풀이1]

(가)에서 $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+A^{-1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

(나)의 $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ ⋯ ㉠을 대입하면

$\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+A^{-1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$에서 $A^{-1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

$\therefore\ A\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $A\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\5&3\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}3&2\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix}3&2\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&-7\\19&-11\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 13이다.

[다른풀이2]

(가)의 양변에 행렬 A를 곱하면 $A^2+E=A$

$A^2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+E\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$에서 (나)의 $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ ⋯ ㉠을 대입하면 $A\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

∴ $A\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $A\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-3\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&-7\\19&-11\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 13이다.

12. [출제의도] $\sum$의 성질과 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

$n<a_n<n+1$에서

$\sum_{k=1}^{n}k<\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{n}(k+1)$이므로

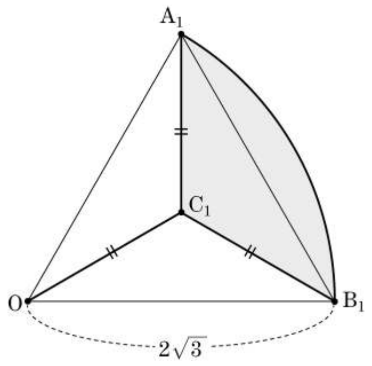
$\frac{n(n+1)}{2}<\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{n(n+3)}{2}$

$\frac{n(n+1)}{2n^2}<\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{n(n+3)}{2n^2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+3)}{2n^2}=\frac{1}{2}$

∴ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}$

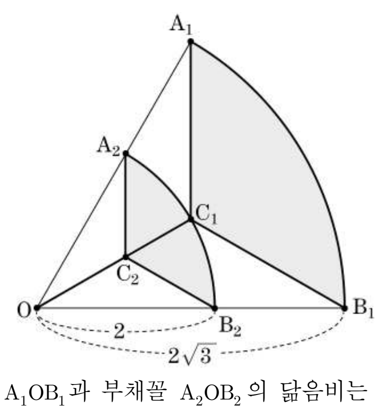
13. [출제의도] 도형의 닮음을 이용하여 무한급수의 합을 구한다.



점 $\mathrm{C_1}$은 정삼각형 $\mathrm{A_1OB_1}$의 무게중심이므로 삼각형 $\mathrm{A_1OC_1}$의 넓이와 삼각형 $\mathrm{C_1OB_1}$의 넓이는 각각 삼각형 $\mathrm{A_1OB_1}$의 넓이의 $\frac{1}{3}$이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{C_1OB_1}$의 넓이는 $\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2\sqrt{3})^2=\sqrt{3}$이다.

S_1은 부채꼴 $\mathrm{A_1OB_1}$의 넓이에서 두 삼각형 $\mathrm{A_1OC_1}$, $\mathrm{C_1OB_1}$의 넓이를 뺀 값이므로

$S_1=\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{3}-2\sqrt{3}=2\pi-2\sqrt{3}$



부채꼴 $\mathrm{A_1OB_1}$과 부채꼴 $\mathrm{A_2OB_2}$의 닮음비는 $2\sqrt{3}:2=\sqrt{3}:1$이므로 넓이의 비는 $3:1$이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $2\pi-2\sqrt{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}}=3\pi-3\sqrt{3}$

14. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 로그로 나타내어진 실생활 문제를 해결한다.

$E_{\mathrm{K}}=t\log\frac{[\mathrm{K}^+]_{\mathrm{O}}}{[\mathrm{K}^+]_{\mathrm{I}}}$이므로 $p=t\log\frac{a}{b}$

또, $p+60=t\left(1+\log\frac{a}{b}\right)$

$=t+t\log\frac{a}{b}$

$=t+p$

∴ $t=60$

따라서 $p+q=t\log\frac{10^2a}{\sqrt{10}\,b}$

$=t\left(\frac{3}{2}+\log\frac{a}{b}\right)$

$=\frac{3}{2}t+p$

∴ $q=\frac{3}{2}t=\frac{3}{2}\cdot60=90$

15. [출제의도] 로그함수의 미분법을 이해하여 미분계수를 구한다.

$g(x)=\ln f'(x)$

$=\ln(1+\{f(x)\}^2)$에서

$g'(x)=\frac{2f(x)f'(x)}{1+\{f(x)\}^2}$

$=\frac{2f(x)[1+\{f(x)\}^2]}{1+\{f(x)\}^2}$

$=2f(x)$

∴ $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot1=2$

[다른풀이]

$g(x)=\ln f'(x)$이므로

$g'(x)=\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{2f(x)f'(x)}{f'(x)}=2f(x)$

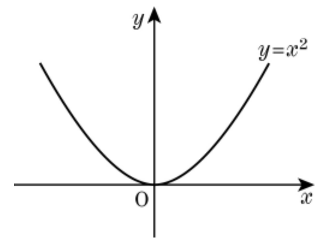
∴ $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot1=2$

[참고]

함수 $y=\tan x$는 주어진 조건을 만족시킨다.

16. [출제의도] 함수의 연속의 뜻을 이해하여 주어진 함수의 연속 여부를 판정한다.

ㄱ.



$x\to0$일 때 $g(x)\to+0$이므로

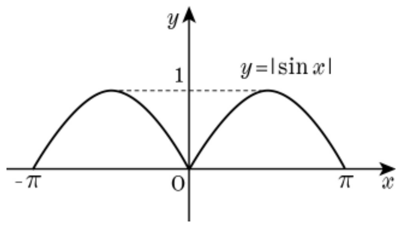
$\lim_{x\to0}f(g(x))=\lim_{t\to+0}f(t)=0$

$f(g(0))=f(0)=0$

따라서 $\lim_{x\to0}f(g(x))=f(g(0))=0$이므로

함수 $f(g(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ.



$x\to0$일 때 $g(x)\to+0$이므로

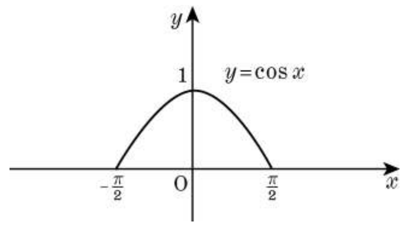
$\lim_{x\to0}f(g(x))=\lim_{t\to+0}f(t)=0$

$f(g(0))=f(0)=0$

따라서 $\lim_{x\to0}f(g(x))=f(g(0))=0$이므로

함수 $f(g(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ.



$x\to0$일 때, $g(x)\to1-0$이므로

$\lim_{x\to0}f(g(x))=\lim_{t\to1-0}f(t)=2$

$f(g(0))=f(1)=0$

따라서 $\lim_{x\to0}f(g(x))\neq f(g(0))$이므로

함수 $f(g(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

이상에서 $x=0$에서 연속인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

17. [출제의도] 증명 과정을 이해하여 빈 칸에 들어갈 식을 구한다.

$a_{n+12}-a_n=\frac{(n+12)(n+13)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}$

$=6(2n+13)$

$b_{4n-3}=a_{12n-9}=6(4n-3)(3n-2)$

$b_{4n-2}=a_{12n-4}=6(3n-1)(4n-1)$

$b_{4n-1}=a_{12n-1}=6n(12n-1)$

$b_{4n}=a_{12n}=6n(12n+1)$

∴ $\sum_{k=1}^{4n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k})$

$=\sum_{k=1}^{n}6(48k^2-24k+7)$

$=6(16n^3+12n^2+3n)$

따라서 $f(n)=6(2n+13)$, $g(n)=6n(12n-1)$, $h(k)=6(48k^2-24k+7)$이므로

$f(1)+g(2)+h(1)=90+276+186=552$

18. [출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 행렬의 성질에 대한 명제의 참·거짓을 판정한다.

ㄱ. 조건 (가)에서 $B(A+E)=E$이므로 B의 역행렬은 $A+E$이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 $B^{-1}=A+E$이므로

$AB=(B^{-1}-E)B$

$=E-B$

$=B(B^{-1}-E)$

$=BA$ (참)

ㄷ. $AB=BA$이므로 (나)에서

$A^2B=A(AB)=A(BA)$

$=A(E-B)=A-AB=A+E$

∴ $AB=-E$

따라서 행렬 AB의 모든 성분의 합은 -2이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[참고]

$B(A+E)=E$에서 역행렬의 정의에 의해 $(A+E)B=E$가 성립한다.

∴ $AB=BA$

19. [출제의도] 도함수의 성질을 이해하여 절댓값을 포함하는 함수의 미분계수를 구한다.

$g(x)=x|x|$, $h(x)=|x-1|^3$으로 놓으면

두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 실수 전체에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$도 실수 전체에서 미분가능하다.

$g'(0)=0$, $h'(1)=0$이고

$x>0$일 때 $g(x)=x^2$,

$x<1$일 때 $h(x)=-(x-1)^3$이므로

$f'(0)=0+h'(0)=-3(0-1)^2=-3$

$f'(1)=g'(1)+0=2\cdot1=2$

∴ $f'(0)+f'(1)=-3+2=-1$

[다른풀이1]

$f(x)=x|x|+|x-1|^3$에서 $f(0)=1$, $f(1)=1$

$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h|h|+|h-1|^3-1}{h}$

$= \lim\limits_{h\to+0}\dfrac{h^2-(h-1)^3-1}{h}=\lim\limits_{h\to+0}\dfrac{-h^3+4h^2-3h}{h}$

$= \lim\limits_{h\to+0}(-h^2+4h-3)=-3$

$\lim\limits_{h\to-0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to-0}\dfrac{h|h|+|h-1|^3-1}{h}$

$= \lim\limits_{h\to-0}\dfrac{-h^2-(h-1)^3-1}{h}=\lim\limits_{h\to-0}\dfrac{-h^3+2h^2-3h}{h}$

$= \lim\limits_{h\to-0}(-h^2+2h-3)=-3$

$\therefore\ f'(0)=-3$

$\lim\limits_{h\to+0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to+0}\dfrac{(1+h)|1+h|+|1+h-1|^3-1}{h}$

$= \lim\limits_{h\to+0}\dfrac{(1+h)^2+|h|^3-1}{h}$

$= \lim\limits_{h\to+0}\dfrac{h^3+h^2+2h}{h}=\lim\limits_{h\to+0}(h^2+h+2)=2$

$\lim\limits_{h\to-0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to-0}\dfrac{(1+h)|1+h|+|1+h-1|^3-1}{h}$

$= \lim\limits_{h\to-0}\dfrac{(1+h)^2+|h|^3-1}{h}=\lim\limits_{h\to-0}\dfrac{-h^3+h^2+2h}{h}$

$= \lim\limits_{h\to-0}(-h^2+h+2)=2$

$\therefore\ f'(1)=2$

$\therefore\ f'(0)+f'(1)=-3+2=-1$

[다른풀이2]

$f(x)=\begin{cases}x^2+(x-1)^3 & (x\ge1)\\ x^2-(x-1)^3 & (0\le x<1)\\ -x^2-(x-1)^3 & (x<0)\end{cases}$

이므로

$f'(x)=\begin{cases}2x+3(x-1)^2 & (x>1)\\ 2x-3(x-1)^2 & (0<x<1)\\ -2x-3(x-1)^2 & (x<0)\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+0}f'(x)=2\cdot0-3(0-1)^2=-3$

$\lim\limits_{x\to-0}f'(x)=-2\cdot0-3(0-1)^2=-3$

$\therefore\ f'(0)=-3$

$\lim\limits_{x\to1+0}f'(x)=2\cdot1+3(1-1)^2=2$

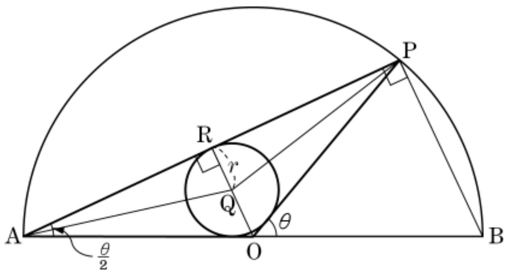
$\lim\limits_{x\to1-0}f'(x)=2\cdot1-3(1-1)^2=2$

$\therefore\ f'(1)=2$

이상에서 $f'(0)+f'(1)=-3+2=-1$

20. [출제의도] 삼각함수의 극한과 도형의 성질을 이용하여 함수의 극한값을 구한다.

삼각형 PAO에 내접하는 원의 중심을 Q, 반지름의 길이를 r라 하자.



$\triangle\mathrm{AOP}=\triangle\mathrm{AOQ}+\triangle\mathrm{OPQ}+\triangle\mathrm{PAQ}$이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AO}}\cdot\overline{\mathrm{OP}}\cdot\sin(\pi-\theta)=\dfrac{r}{2}\cdot\overline{\mathrm{AO}}+\dfrac{r}{2}\cdot\overline{\mathrm{OP}}+\dfrac{r}{2}\cdot\overline{\mathrm{PA}}$

$\therefore\ \sin\theta=r(2+\overline{\mathrm{PA}})$ ⋯ ㉠

직각삼각형 ABP에서

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos\dfrac{\theta}{2}=2\cos\dfrac{\theta}{2}$ ⋯ ㉡이므로

㉠, ㉡에 의하여 $r=\dfrac{\sin\theta}{2+2\cos\dfrac{\theta}{2}}$이다.

따라서 $f(\theta)=\pi r^2=\dfrac{\pi\sin^2\theta}{\left(2+2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2}$이므로

$\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{f(\theta)}{\theta^2}=\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\dfrac{\pi}{\left(2+2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2}$

$=\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{\pi}{\left(2+2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2}$

$=1^2\cdot\dfrac{\pi}{16}=\dfrac{\pi}{16}$

[다른풀이]

삼각형 PAO에 내접하는 원의 중심을 Q라 하고 원 Q와 변 AP의 접점을 R라 하면

$\overline{\mathrm{OR}}\perp\overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{QR}}\perp\overline{\mathrm{AP}}$이다.

삼각형 AOR에서 $\angle\mathrm{RAO}=\dfrac{\theta}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AR}}=\overline{\mathrm{OA}}\cos\dfrac{\theta}{2}=\cos\dfrac{\theta}{2}$

삼각형 AQR에서 $\angle\mathrm{RAQ}=\dfrac{\theta}{4}$이므로

$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{AR}}\tan\dfrac{\theta}{4}=\cos\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\theta}{4}$

따라서 $f(\theta)=\pi\overline{\mathrm{QR}}^2=\pi\cos^2\dfrac{\pi}{2}\tan^2\dfrac{\theta}{4}$이다.

$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{f(\theta)}{\theta^2}=\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{\pi\cos^2\dfrac{\theta}{2}\tan^2\dfrac{\theta}{4}}{\theta^2}$

$=\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{\pi\cos^2\dfrac{\theta}{2}\tan^2\dfrac{\theta}{4}}{\left(\dfrac{\theta}{4}\right)^2\cdot16}$

$=\dfrac{\pi}{16}\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{\tan^2\dfrac{\theta}{4}}{\left(\dfrac{\theta}{4}\right)^2}\lim\limits_{\theta\to+0}\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

$=\dfrac{\pi}{16}\cdot1^2\cdot1^2=\dfrac{\pi}{16}$

21. [출제의도] 조건을 만족시키는 수열을 추론하여 식의 값을 구한다.

2^n이 1이 될 때까지 시행이 n번 반복된다.

$\therefore\ a_{2^n}=n$

따라서 다음이 성립한다.

k	2^n	2^n+1	2^n+2	2^n+3
시행	2^{n-1}	2^n	$2^{n-1}+1$	2^n+2
	2^{n-2}	⋮	2^{n-1}	⋮
	⋮		⋮	
	1	1	1	1
a_k	n	$n+1$	$n+1$	$n+2$

따라서 $S_n=\sum\limits_{k=2^n}^{2^n+3}a_k=4n+4$이다.

$\therefore\ S_{50}=204$

22. [출제의도] 등차수열의 뜻을 이해하여 등차수열의 항을 구한다.

$a_1+a_4=a_2+a_3$이므로 $4+a_4=17$

$\therefore\ a_4=13$

[다른풀이1]

공차를 d라 하면

$a_2+a_3=17$에서 $2a_1+3d=17$

$\therefore\ d=3$

$\therefore\ a_4=13$

[다른풀이2]

$a_1+a_2+a_3=21$이므로 $3a_2=21$

$\therefore\ a_2=7$

$a_1=4$, $a_2=7$이므로 공차는 3이다.

$\therefore\ a_4=13$

23. [출제의도] 지수함수의 미분법을 이해하여 접선의 방정식을 구한다.

$y'=e^{3-x}(3-x)'=-e^{3-x}$이므로

(접선의 기울기)$=-e^{3-3}=-e^0=-1$

따라서 접선의 방정식은 $y-1=-(x-3)$, $y=-x+4$

접선의 x절편과 y절편은 각각 4이므로

구하는 도형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times4\times4=8$이다.

24. [출제의도] 극한의 성질을 이해하여 조건을 만족시키는 다항함수를 구한다.

조건 (가)에서 $f(x)$는 이차함수임을 알 수 있다.

$f(x)=ax^2+bx+c$로 놓으면

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\{f(x)\}^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(ax^2+bx+c)^2}{x^4}=a^2=4$

$\therefore\ a=2$ ($\because a>0$)

조건 (나)에서

$f(x)-x^2=(2x^2+bx+c)-x^2$

$=x^2+bx+c$

$=(x-1)(x-c)$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-x^2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-c)}{x-1}$

$=1-c=3$

$\therefore\ c=-2,\ b=1$

따라서 $f(x)=2x^2+x-2$이므로 $f(10)=208$

25. [출제의도] 고차부등식과 분수부등식의 풀이 방법을 이해하여 연립부등식의 해를 구한다.

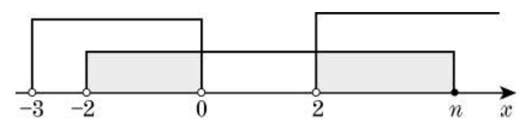
$x(x-2)(x+3)>0$에서

$-3<x<0$ 또는 $x>2$ ⋯ ㉠

$\dfrac{x-n}{x+2}\le0$에서

$(x-n)(x+2)\le0,\ x\ne-2$

$\therefore\ -2<x\le n$ ⋯ ㉡



㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$-2<x<0$ 또는 $2<x\le n$이므로

만족시키는 정수 x는 -1, 3, 4, 5, ⋯, n으로

$(n-1)$개이다.

따라서 $n-1=15$이므로 $n=16$이다.

26. [출제의도] 조건을 만족시키는 수열을 추론하여 항의 값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 구하면 다음과 같다.

$a_3=a_1=1,\ a_5=a_3=1,\ a_7=a_5=1,\ \cdots$

$\therefore\ a_{2n-1}=1$

$a_4=a_2+1=2,\ a_6=a_4+1=3,\ a_8=a_6+1=4,\ \cdots$

$\therefore\ a_{2n}=n$

따라서 $a_{100}+a_{101}=50+1=51$이다.

27. [출제의도] 수열의 합 S_n과 일반항 a_n의 관계를 이해하여 무한급수의 합을 구한다.

$S_n=\dfrac{6n}{n+1}$에서

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\dfrac{6n}{n+1}-\dfrac{6(n-1)}{n}$

$=\dfrac{6n^2-6(n^2-1)}{n(n+1)}$

$=\dfrac{6}{n(n+1)}\ (n\ge2)$

$a_1=S_1=3$이므로 $a_n=\dfrac{6}{n(n+1)}\ (n\ge1)$

$\therefore\ a_n+a_{n+1}=\dfrac{6}{n(n+1)}+\dfrac{6}{(n+1)(n+2)}$

$=6\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)+6\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$=6\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=6\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$=6\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$

$$= 6\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$= 6\left(1+\frac{1}{2}\right) = 9$$

[다른풀이1]

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{6n}{n+1} = 6$$
$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{6n+6}{n+2} = 6$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k + a_{k+1})$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k + \sum_{k=1}^{n}a_{k+1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}(S_n + S_{n+1} - a_1)$$
$$= \lim_{n\to\infty}S_n + \lim_{n\to\infty}S_{n+1} - a_1$$
$$= 6+6-3 = 9 \quad (\because a_1 = S_1 = 3)$$

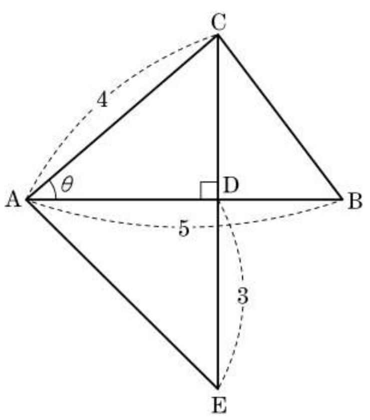
[다른풀이2]

$$a_n + a_{n+1} = (S_n - S_{n-1}) + (S_{n+1} - S_n)$$
$$= S_{n+1} - S_{n-1}$$
$$= \frac{6(n+1)}{n+2} - \frac{6(n-1)}{n}$$
$$= \frac{6n(n+1) - 6(n-1)(n+2)}{n(n+2)}$$
$$= \frac{12}{n(n+2)}$$
$$= 6\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\ (n \ge 2)$$

$a_1 + a_2 = S_2 = 4$이므로

$$a_n + a_{n+1} = 6\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\ (n \ge 1)$$

28. [출제의도] 도형의 성질과 삼각함수의 합성을 이용하여 최댓값을 구한다.



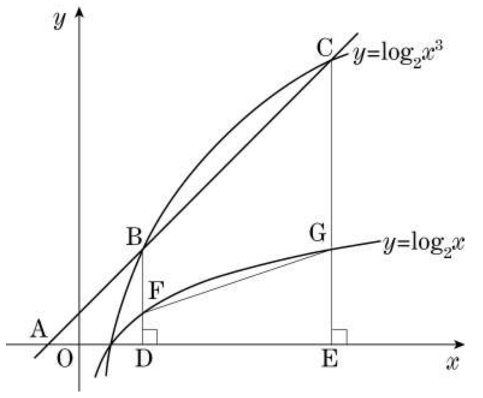
$\angle CAB = \theta$라 하면 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이고

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\sin\theta,\ S_2 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cos\theta$$
$$S_1 + S_2 = 10\sin\theta + 6\cos\theta$$
$$= \sqrt{136}\sin(\theta+\alpha)$$
$$\left(\cos\alpha = \frac{10}{\sqrt{136}},\ \sin\alpha = \frac{6}{\sqrt{136}}\right)$$

따라서 $S_1 + S_2$의 최댓값은 $\sqrt{136}$이다.

$\therefore\ M^2 = 136$

29. [출제의도] 로그함수와 도형의 성질을 이용하여 도형의 넓이를 구한다.

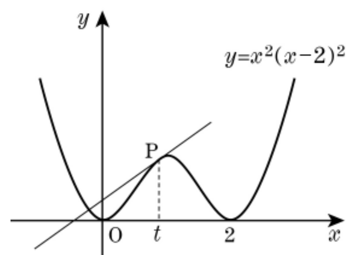


$$\log_2 x^3 - \log_2 x = 3\log_2 x - \log_2 x$$
$$= 2\log_2 x$$

이므로 두 점 F, G는 두 선분 BD, CE를 각각 $2:1$로 내분하는 점이다.

$$\therefore\ \square BFGC = \frac{2}{3}\times\square BDEC$$
$$= \frac{2}{3}(8\times\triangle ADB)$$
$$= \frac{16}{3}\times\frac{9}{2}$$
$$= 24$$

30. [출제의도] 주어진 함수의 그래프에서 접선이 곡선보다 위쪽에 놓이도록 하는 접점의 범위를 구한다.



직선 $y = f'(t)(x-t) + f(t)$는 곡선 위의 점 $P(t, f(t))$에서의 접선이므로 접선이 주어진 곡선의 위쪽에 놓이려면 접점은 곡선이 위로 볼록한 부분의 점이다.

그런데 위로 볼록한 부분에 있는 점에서의 접선 중에는 구간 $[0, 2]$에서 $y = f(x)$의 그래프 아래쪽을 지나는 직선이 생길 수 있다.

그러므로 원점에서 그은 접선의 접점과 점 $(2, 0)$에서 그은 접선의 접점의 x좌표를 조사하면 된다.

$y = x^2(x-2)^2$에서

$$y' = 2x(x-2)^2 + 2x^2(x-2)$$
$$= 4x(x-1)(x-2)$$

점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y - a^2(a-2)^2 = 4a(a-1)(a-2)(x-a)$$

$x = 0,\ y = 0$을 대입하면

$$-a^2(a-2)^2 = -4a^2(a-1)(a-2)$$

$\therefore\ a = \frac{2}{3}$

한편 곡선 $y = x^2(x-2)^2$은 직선 $x = 1$에 대하여 대칭이므로 점 $(2, 0)$에서 그은 접선의 접점의 x좌표를 b라 하면 $\frac{2}{3} + b = 2$에서 $b = \frac{4}{3}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 실수 t의 값의 범위는 $\frac{2}{3} \le t \le \frac{4}{3}$이다.

$\therefore\ 36pq = 36\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3} = 32$

수리'나'형 정답

1	②	2	⑤	3	④	4	⑤	5	①
6	③	7	②	8	②	9	④	10	②
11	②	12	①	13	④	14	①	15	③
16	③	17	①	18	⑤	19	③	20	④
21	⑤	22	13	23	98	24	70	25	36
26	51	27	9	28	23	29	24	30	462

해 설

1~3. '가'형과 동일

4. [출제의도] 역행렬의 성질을 이해하여 역행렬을 구한다.

$A^{-1} = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$이고 $\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} = 2A^{-1}$이므로

$$\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} = 2\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 2\\ 4 & 2\end{pmatrix}$$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은 14이다.

5. [출제의도] 수렴하는 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\lim_{n\to\infty}a_n$의 관계를 이용하여 극한값을 구한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n = 0$이다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n - 3}{a_n + 1} = \frac{2\cdot 0 - 3}{0+1} = -3$$

6. [출제의도] 행렬로 나타내어진 연립방정식의 해가 무수히 많을 조건을 구한다.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\log x\\ \log y\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}\log x\\ \log y\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1-k & 2\\ 4 & 3-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\log x\\ \log y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\ \cdots\ ㉠$$

이므로 ㉠이 $x = 1,\ y = 1$ 이외의 해를 가질 필요충분조건은 행렬 $\begin{pmatrix}1-k & 2\\ 4 & 3-k\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는 것이다.

따라서 $(1-k)(3-k) - 2\cdot 4 = 0$에서 $k^2 - 4k - 5 = 0$

$(k-5)(k+1) = 0,\ k = 5$ 또는 $k = -1$

따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 4이다.

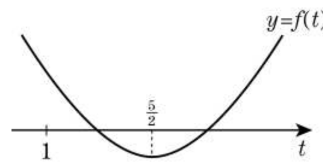
7. [출제의도] 지수방정식의 풀이 방법을 이해하여 두 양의 실근을 가질 조건을 구한다.

$5^x = t$로 치환하면 주어진 방정식은

$t^2 - 5t + k = 0\ \cdots\ ㉠$

$x > 0$이면 $t > 1$이므로 주어진 방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 ㉠이 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t) = t^2 - 5t + k$라 놓으면 $y = f(t)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



$f(1) = 1 - 5 + k > 0\ \cdots\ ㉡$

(판별식)$= 25 - 4k > 0\ \cdots\ ㉢$

㉡, ㉢에서 $4 < k < \frac{25}{4},\ k = 5, 6$

따라서 구하는 정수 k의 개수는 2이다.

8. [출제의도] 등차중항의 뜻을 이해하여 로그방정식의 해를 구한다.

세 수 1, $\log_2(2^x+1)$, $\log_2(4^x-1)$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\log_2(2^x+1) = 1 + \log_2(4^x-1)$$
$$(2^x+1)^2 = 2(4^x-1)$$
$$4^x - 2\cdot 2^x - 3 = 0$$
$$(2^x-3)(2^x+1) = 0$$
$$2^x = 3\ (\because 2^x > 0)$$

$\therefore\ \alpha = \log_2 3$

그런데 $\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4$이므로

$\therefore\ 1 < \alpha < 2$

9. [출제의도] 계차수열의 뜻을 이해하여 두 항의 차를 구한다.

$a_{n+1} - a_n = b_n$으로 놓으면

$$a_{10} - a_7 = (a_{10} - a_9) + (a_9 - a_8) + (a_8 - a_7)$$
$$= b_9 + b_8 + b_7$$
$$= (2^4+9) + (2^3+8) + (2^2+7)$$
$$= 52$$

10~14. '가'형과 동일

15. [출제의도] $\sum$의 성질을 이용하여 $\sum$로 나타내어진 방정식의 해를 구한다.

$\sum_{k=0}^{n}(x-k)^2 = \sum_{k=1}^{n}(x+k)^2$에서

$x^2+\sum_{k=1}^{n}(x-k)^2=\sum_{k=1}^{n}(x+k)^2$

$x^2+\sum_{k=1}^{n}\{(x-k)^2-(x+k)^2\}=0$

$x^2-\sum_{k=1}^{n}4kx=0,\ x^2-4x\sum_{k=1}^{n}k=0$

$x^2-4x\cdot\frac{n(n+1)}{2}=0$

$x\neq 0$이므로 $x=2n(n+1)=a_n$

∴ $a_{10}=20\cdot 11=220$

16. [출제의도] 지수와 로그의 성질을 이해하여 명제의 참·거짓을 판정한다.

ㄱ. $b=\frac{1}{2}$이면 $2^a=5^{\frac{1}{2}}$에서 $a=\log_2\sqrt{5}=\log_4 5$ (참)

ㄴ. $2^a=5^b$에서 $2^{\frac{a}{b}}=5$

∴ $\frac{a}{b}=\log_2 5$

그런데 $\log_2 4<\log_2 5<\log_2 8$에서 $2<\log_2 5<3$이므로 $2<\frac{a}{b}<3$ (참)

ㄷ. (반례) $2^a=5^b=10$으로 놓으면

$2=10^{\frac{1}{a}}$, $5=10^{\frac{1}{b}}$에서 $\frac{1}{a}=\log 2$, $\frac{1}{b}=\log 5$

∴ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log 2+\log 5=\log 10=1$ (유리수) (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[다른풀이]

ㄴ. $2^a=5^b$의 양변에 상용로그를 취하면

$a\log 2=b\log 5$

∴ $\frac{a}{b}=\frac{\log 5}{\log 2}=\log_2 5$

[참고]

$2^a=5^b=k\ (k>1)$로 놓으면

$2=k^{\frac{1}{a}}$, $5=k^{\frac{1}{b}}$에서

$\frac{1}{a}=\log_k 2$, $\frac{1}{b}=\log_k 5$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_k 2+\log_k 5=\log_k 10$

이므로 $k=10^{\frac{n}{m}}$ (단, m, n은 자연수)일 때

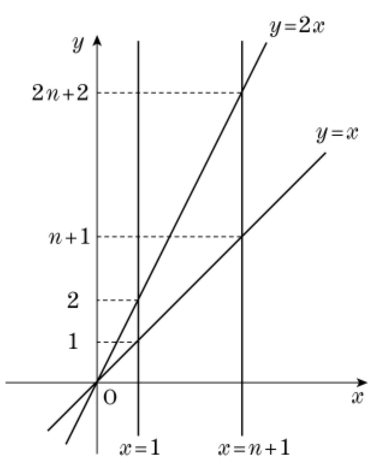
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$은 유리수이다.

17~18. '가'형과 동일

19. [출제의도] 도형의 넓이를 나타내는 수열을 구한 후 부분분수로 변형하여 무한급수의 합을 구한다.

네 직선 $x=1$, $x=n+1$, $y=x$, $y=2x$로 둘러싸인 사각형은 그림과 같이 평행한 두 변의 길이가 각각 1, $(n+1)$이고, 높이가 n인 사다리꼴이다.

∴ $S_n=\frac{n(n+2)}{2}$



∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{3}{2}$

20. [출제의도] 상용로그의 지표의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구한다.

$[\log_3 n]=3$에서 $3^3\le n<3^4$이므로

$[\log 2n]=1$ 또는 $[\log 2n]=2$이다.

(i) $[\log 2n]=1$일 때 즉, $27\le n<50$일 때

(나)에서 $[2\log n]=3$이므로

$3\le 2\log n<4$, $\frac{3}{2}\le\log n<2$

∴ $\log 10\sqrt{10}\le\log n<\log 100$, $10\sqrt{10}\le n<100$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 n은

$32\le n<50$이므로 자연수 n의 개수는 18이다.

(ii) $[\log 2n]=2$일 때 즉, $50\le n<81$일 때

(나)에서 $[2\log n]=4$이므로

$4\le 2\log n<5$, $2\le\log n<\frac{5}{2}$

∴ $\log 100\le\log n<\log 100\sqrt{10}$, $100\le n<100\sqrt{10}$

따라서 만족시키는 n의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 자연수 n의 개수는 18이다.

[다른풀이]

$[\log_3 n]=3$에서 $27\le n<81$ ⋯ ㉠

㉠에서 $27\le n<32$일 때, n^2은 세 자리의 정수이므로 $[\log n^2]=2$이다.

$32\le n<81$일 때, n^2은 네 자리의 정수이므로 $[\log n^2]=3$이다.

또, $27\le n<50$일 때, $2n$은 두 자리의 정수이므로 $[\log 2n]=1$이다.

$50\le n<81$일 때, $2n$은 세 자리의 정수이므로 $[\log 2n]=2$이다.

위에서 (나)를 만족시키는 n의 값의 범위는 $32\le n<50$이다.

따라서 구하는 자연수 n의 개수는 18이다.

21~22. '가'형과 동일

23. [출제의도] 지수법칙을 이해하여 식의 값을 구한다.

$\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=a+2+a^{-1}$이므로

$a+a^{-1}=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2-2$

$=100-2=98$

24. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 로그함수의 그래프를 평행이동시킨 그래프의 식을 구한다.

$y=\log_3\left(\frac{x}{9}-1\right)$

$=\log_3\frac{x-9}{9}$

$=\log_3(x-9)-\log_3 9$

$=\log_3(x-9)-2$

이므로 함수 $y=\log_3\left(\frac{x}{9}-1\right)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 9만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 것이다.

따라서 $m=9$, $n=-2$

∴ $10(m+n)=70$

25. [출제의도] 그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬의 뜻을 이해하여 그래프의 변의 개수를 구한다.

조건에 따라 행렬 P를 구하면 다음과 같다.

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$$

그래프 G의 모든 변의 개수는 행렬 P의 모든 성분의 합의 $\frac{1}{2}$과 같으므로 $m=\frac{1}{2}\cdot 12=6$이다.

∴ $m^2=36$

26~27. '가'형과 동일

28. [출제의도] 수렴하는 수열에 대한 극한의 성질을 이해하여 극한값을 구한다.

$c_n=2a_n-5b_n$이라 하면 $b_n=\frac{1}{5}(2a_n-c_n)$

$\lim_{n\to\infty}c_n=3$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3b_n}{a_n+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3\cdot\frac{1}{5}(2a_n-c_n)}{a_n+\frac{1}{5}(2a_n-c_n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{16a_n-3c_n}{7a_n-c_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{16-3\cdot\frac{c_n}{a_n}}{7-\frac{c_n}{a_n}}$

$=\frac{16}{7}$

∴ $p+q=7+16=23$

[다른풀이]

$\lim_{n\to\infty}(2a_n-5b_n)=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n\left(2-5\cdot\frac{b_n}{a_n}\right)=3$에서

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(2-5\cdot\frac{b_n}{a_n}\right)=0$

∴ $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{2}{5}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3b_n}{a_n+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+3\cdot\frac{b_n}{a_n}}{1+\frac{b_n}{a_n}}$

$=\frac{2+3\cdot\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}}=\frac{16}{7}$

∴ $p+q=7+16=23$

29. '가'형과 동일

30. [출제의도] 조건을 만족시키는 수열을 추론하여 항의 값을 구한다.

점 P_n, Q_n의 좌표는 다음과 같다.

$\mathrm{P}_1(0,0)$, $\mathrm{Q}_1(1,1)$

$\mathrm{P}_2(0,2)$, $\mathrm{Q}_2(2,4)$

$\mathrm{P}_3(1,5)$, $\mathrm{Q}_3(4,8)$

$\mathrm{P}_4(3,9)$, $\mathrm{Q}_4(7,13)$

$\mathrm{P}_5(6,14)$, $\mathrm{Q}_5(11,19)$

$\mathrm{P}_6(10,20)$, $\mathrm{Q}_6(16,26)$

⋮

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 계차수열이 $\{n\}$인 수열이므로 $a_{21}=1+\sum_{k=1}^{20}k=1+\frac{20\cdot 21}{2}=211$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1, 계차수열이 $\{n+2\}$인 수열이므로

$b_{21}=1+\sum_{k=1}^{20}(k+2)=1+\frac{20\cdot 21}{2}+2\cdot 20=251$

∴ $a_{21}+b_{21}=211+251=462$

[다른풀이]

$\mathrm{P}_1(0,0)$으로부터 $\mathrm{Q}_1(1,1)$이므로 $a_1=1$, $b_1=1$

Q_n의 좌표 (a_n, b_n)으로부터

P_{n+1}의 좌표는 (a_n-1, b_n+1)

Q_{n+1}의 좌표는 $(a_n-1+(n+1), b_n+1+(n+1))$

∴ $a_{n+1}=a_n+n$, $b_{n+1}=b_n+n+2$

$a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+b_n+2n+2$

수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 $a_1+b_1=2$, 계차수열이 $\{2n+2\}$인 수열이므로

$$
\begin{aligned}
a_{21}+b_{21} &= 2+\sum_{k=1}^{20}(2k+2) \\
&= 2+2\cdot\frac{20\cdot 21}{2}+2\cdot 20=462
\end{aligned}
$$

2012학년도 대학수학능력시험 수리영역 나형 정답 및 해설 (홀수형)

1.

출제의도 : 역행렬을 구할 수 있는가?

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$ 이므로 역행렬 A^{-1} 의 모든 성분의 합은 4이다.

<답> ②

2.

출제의도 : 무한수열의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+2}{5^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{2}{5^n}}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n}=5$$

<답> ④

3.

출제의도 :미분계수를 구할 수 있는가?

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$

$f(x)=x^2+5$ 에서

$f'(x)=2x$ 이므로

$f'(1)=2$

<답> ①

4.

출제의도 : 거듭제곱근의 계산을 할 수 있는가?

지불해야 할 금액은 다음과 같다.

$500\times\sqrt[3]{8}+500\times\log_3 27$

$=500(\sqrt[3]{2^3}+\log_3 3^3)=500(2+3)$

$=2500$

<답> ③

5.

출제의도 : 여러 가지 수열의 일반항을 구할 수 있는가?

$a_{n+1}=\frac{2n}{n+1}a_n$ 에서

$a_2=a_1,\ a_3=\frac{4}{3}a_2,\ a_4=\frac{6}{4}a_3$

이므로 위의 세 항을 변변끼리 모두 곱하면

$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = a_1 \cdot \frac{4}{3}a_2 \cdot \frac{6}{4}a_3$

$\therefore\ a_4=2a_1=2$

<답> ②

6.

출제의도 : 확률분포표에서 평균을 구할 수 있는가?

주어진 확률분포표에서 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+2a=1,\ 3a=\frac{3}{4}$

$\therefore\ a=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X 의 평균 $E(X)$는

$E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{2}{4}=\frac{5}{4}$

$\therefore\ E(4X+10)=4E(X)+10=4\times\frac{5}{4}+10=15$

<답> ⑤

7.
출제의도 : 주어진 로그 관계식을 이해하고 활용할 수 있는가?

$\log y = A - \frac{1}{2}\log t - \frac{Kx^2}{t}$

에서

$t=1,\ x=2,\ y=a$ 일 때

$\log a = A - 4k$ --- ㉠

또 $t=4,\ x=d,\ y=\frac{a}{2}$ 일 때

$\log\frac{a}{2} = A - \frac{1}{2}\log 4 - \frac{Kd^2}{4}$ 이므로

$\log a - \log 2 = A - \log 2 - \frac{Kd^2}{4}$ ---㉡

따라서 ㉠을 ㉡ 에 대입하면

$A - 4K = A - \frac{Kd^2}{4}$, $d^2 = 16$

$\therefore\ d = 4\ (\because\ d > 0)$

<답> ④

8.
출제의도 : 이항계수를 구할 수 있는가?

$(x+a)^7$ 의 전개식에서 일반항은 ${}_7C_r a^{7-r}x^r$

이므로 x^4 의 계수는

${}_7C_4 \times a^3 = 280$

$\frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}\times a^3 = 35a^3 = 280$

$a^3 = 8 \quad \therefore a = 2$

따라서 x^5 의 계수는

${}_7C_5 \times a^2 = {}_7C_2 \times 4 = 21\times4 = 84$

<답> ①

9.
출제의도 :정적분의 성질을 알고 활용할 수 있는가?

$F(x) = \int_0^x (t^3-1)dt$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x) = x^3 - 1$

$\therefore\ F'(2) = 2^3 - 1 = 7$

<답> ③

10.
출제의도 : 확률의 성질을 활용하여 확률을 구할 수 있는가 ?

두 사건 $A,\ B$ 가 서로 독립이므로

$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

따라서

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) = \frac{3}{8}$$

이 때

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ 에서

$\frac{1}{2} = \frac{3}{8} + P(B) - \frac{3}{8}P(B)$

$\frac{5}{8}P(B) = \frac{1}{8} \quad \therefore\ P(B) = \frac{1}{5}$

한편

두 사건 $A,\ B$ 가 서로 독립이면

$A,\ B^c$도 서로 독립이므로

$$P(A\cap B^c) = P(A)\cdot P(B^c) = \frac{3}{8}\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{8}\times\frac{4}{5} = \frac{3}{10}$$

<답> ⑤

11.
출제의도 : 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가 ?
수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -5이고 공차가 2 인 등차수열이므로 일반항은 $a_n = 2n-7$ 이다.

$$\therefore \sum_{k=11}^{20} a_k = \frac{10(a_{11}+a_{20})}{2} = \frac{10(15+33)}{2} = 240$$

<답> ⑤

12.
출제의도 : 그래프에서 함수의 극한을 구할 수 있는가?

직선 $y=x+1$과 수직인 직선은 기울기가 -1이므로 점 $\mathrm{P}(t, t+1)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$y-(t+1)=-1(x-t)$

$y=-x+2t+1$

따라서 점 Q의 좌표는 $(0, 2t+1)$이므로
$\mathrm{A}(-1, 0)$과 $\mathrm{Q}(0, 2t+1)$ 에서

$\overline{\mathrm{AQ}}^2 = 1+(2t+1)^2 = 4t^2+4t+2$ 이고

$\overline{\mathrm{AP}}^2 = (t+1)^2+(t+1)^2 = 2t^2+4t+2$ 이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2} = \lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t+2}{2t^2+4t+2} = \lim_{t\to\infty}\frac{4+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}{2+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}} = 2$$

<답> ③

13.
출제의도 : 확률의 성질을 활용하여 확률을 구할 수 있는가 ?

A 주머니에서 꺼낸 카드가 짝수일 사건을 A
B 주머니에서 꺼낸 카드가 짝수일 사건을 B
라 하고 한 개의 주사위를 던져서 3의 배수가 나올 사건을 C라 하면

$P(C) = \frac{1}{3}$, $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{3}{6}$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{P(C)\times P(A)}{P(C)\times P(A)+P(C^c)P(B)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}}{\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{6}}$$

$$= \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{15}+\frac{5}{15}} = \frac{2}{7}$$

<답> ④

14.
출제의도 : 무한등비급수를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

R_1에서 주어진 원의 반지름의 길이가 1이므로 넓이는 π 이고 직사각형의 대각선의 길이는 2이다.
따라서 직사각형의 세로의 길이를 a라 하면 가로의 길이는 $3a$ 이므로

$a^2+(3a)^2=10a^2=4$ 에서 $a^2=\frac{2}{5}$

따라서 $S_1=\pi-3a^2=\pi-\frac{6}{5}$

이 때 R_2에서 새로 생긴 원의 지름의 길이는 a이므로 R_2에 들어 있는 색칠된 부분의 넓이 S_2 는

$\left(\pi-\frac{6}{5}\right)+2\times\frac{1}{10}\times\left(\pi-\frac{6}{5}\right)$ 이다.

같은 방법으로 R_n에 들어 있는 색칠된 부분의 넓이 S_n을 구하면

$$S_n=\left(\pi-\frac{6}{5}\right)+\frac{1}{5}\left(\pi-\frac{6}{5}\right)+\frac{1}{25}\left(\pi-\frac{6}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\times\left(\pi-\frac{6}{5}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi-\frac{6}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}\pi-\frac{3}{2}$$

<답> ②

15.
출제의도 : 행렬의 성질을 이해하고 활용할 수 있는가?

ㄱ. $B=3E-A^2$이므로
$AB=A(3E-A^2)=3A-A^3$
$BA=(3E-A^2)A=3A-A^3$
$\therefore AB=BA$ (참)

ㄴ. $A^2=3E-B$ 이므로
$A^4=(3E-B)^2=B^2-6B+9E$
$A^4+B^2=7E$ 에서
$2B^2-6B+9E=7E$
$B^2-3B=-E$
$B(B-3E)=-BA^2=-E$
$\therefore B^{-1}=A^2$ (참)

ㄷ. ㄴ 에서 $A^2B=BA^2=E$ 이므로
$$\begin{aligned}(A^2+B)(A^4+B^2)&=A^6+A^2B^2+BA^4+B^3\\&=A^6+B+A^2+B^3\\&=A^6+B^3+3E=21E\end{aligned}$$
$\therefore A^6+B^3=18E$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ이다.

<답> ⑤

16.
출제의도 : 표본평균의 분포에서의 확률을 구할 수 있는가?

제품의 길이 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(m \le X \le a)$$
$$= \mathrm{P}\left(\frac{m-m}{4} \le \frac{X-m}{4} \le \frac{a-m}{4}\right)$$
$$= \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{a-m}{4}\right)$$
$$= 0.3413$$

한편, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) = 0.3413$이므로

$$\frac{a-m}{4} = 1$$
$$\therefore\ a = m+4 \quad \text{-----㉠}$$

한편, 생산된 제품 중에서 임의추출한 제품 16개의 길이의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{4^2}{16}\right)$ 즉, $\mathrm{N}(m,\ 1)$을 따르므로 ㉠에서

$$\mathrm{P}(\overline{X} \ge a-2) = \mathrm{P}(\overline{X} \ge m+2)$$
$$= \mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-m}{1} \ge \frac{(m+2)-m}{1}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z \ge 2)$$
$$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$$
$$= 0.5 - 0.4772$$
$$= 0.0228$$

<답> ①

17.
출제의도 : 수열의 일반항을 구하는 과정을 이해하는가?

자연수 n에 대하여 $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$이므로

$$na_{n+1} = 2S_n + (n+1)^3 \quad \text{----㉠}$$

이다. 2이상의 자연수 n에 대하여

$$(n-1)a_n = 2S_{n-1} + n^3 \quad \text{----㉡}$$

이고, ㉠에서 ㉡을 빼면

$$na_{n+1} - (n-1)a_n = 2(S_n - S_{n-1}) + (3n^2+3n+1)$$
$$na_{n+1} = (n+1)a_n + ⊏\ 3n^2+3n+1\ ⊐$$

양변을 $n(n+1)$로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{⊏\ (3n^2+3n+1)\ ⊐}{n(n+1)}$$

이다. $b_n = \frac{a_n}{n}$이라 하면,

$$b_{n+1} = b_n + 3 + ⊏\ \frac{1}{n(n+1)}\ ⊐ \quad (n \ge 2)$$

이므로

$$b_n = b_2 + \sum_{k=2}^{n-1}\left(3 + \frac{1}{k(k+1)}\right)$$
$$= b_2 + 3(n-2) + \sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= b_2 + ⊏\ 3(n-2) + \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\ ⊐ \quad (n \ge 3)$$

이다.

따라서, $f(n) = 3n^2+3n+1$,

$g(n) = \frac{1}{n(n+1)}$, $h(n) = 3(n-2) + \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$이므로

$$\frac{f(3)}{g(3)h(6)} = \frac{37}{\frac{1}{12} \times \frac{37}{3}} = 36$$

<답> ②

2012학년도 대학수학능력시험 수리영역 나형 정답 및 해설 (홀수형)

18.

출제의도 : 함수의 극한과 연속을 이해할 수 있는가 ?

ㄱ. $x \to +0$일 때, $f(x) \to 1+0$이므로

$\lim_{x\to+0} f(x) = 1$ <참>

ㄴ. $x=1$에서 함수 $y=f(x)$는 연속이 아니므로

$\lim_{x\to1} f(x) \neq f(1)$ <거짓>

ㄷ. $g(x)=(x-1)f(x)$라 하면

$\lim_{x\to1} f(x) = 2$이므로

$$\lim_{x\to1} g(x) = \lim_{x\to1}(x-1)f(x)$$
$$= \lim_{x\to1}(x-1) \times \lim_{x\to1} f(x)$$
$$= 0 \times 2 = 0$$

또,

$g(1) = (1-1)f(1) = 0 \times 1 = 0$

그러므로 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

<참>

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

<답> ③

19.

출제의도 : 정적분의 기본정리와 성질을 이용하여 정적분을 구할 수 있는가?

$f(0) = -1$이므로

$f(x) = ax^2 + bx - 1$

한편, $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx$에서

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx$$

$$\therefore \int_{-1}^{0} f(x)dx = 0$$

그러므로

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (ax^2+bx-1)dx$$
$$= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 - x\right]_{-1}^{0}$$
$$= \frac{a}{3} - \frac{b}{2} - 1 = 0 \quad \text{---㉠}$$

마찬가지로, $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx$에서

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx$$

$$\therefore \int_{0}^{1} f(x)dx = 0$$

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} (ax^2+bx-1)dx$$
$$= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 - x\right]_{0}^{1}$$
$$= \frac{a}{3} + \frac{b}{2} - 1 = 0 \quad \text{---㉡}$$

㉠과 ㉡에서 $a=3$, $b=0$

따라서, $f(x) = 3x^2 - 1$이므로

$f(2) = 11$

<답> ①

2012학년도 대학수학능력시험 수리영역 나형 정답 및 해설 (홀수형)

20.

출제의도 : 지표와 가수를 이해하고 있는가 ?

$\log 54 = 1 + \log 5.4$

이므로

$f(54) = 1,\ g(54) = \log 5.4$

한편, $f(n) \le f(54)$이므로

$f(n) \le 1$

n이 자연수이므로

$f(n) = 0$ 또는 $f(n) = 1$

(i) $f(n) = 0$일 때,

$g(n) \le g(54)$에서 $g(n) \le \log 5.4$이므로

$$\begin{aligned}\log n &= f(n) + g(n)\\ &= g(n)\\ &\le \log 5.4\end{aligned}$$

$\therefore\ n \le 5.4$

그러므로 자연수 n은 1, 2, 3, 4, 5로

5개이다.

(ii) $f(n) = 1$일 때,

$g(n) \le g(54)$에서 $g(n) \le \log 5.4$이므로

$$\begin{aligned}\log n &= f(n) + g(n)\\ &= 1 + g(n)\\ &\le 1 + \log 5.4\\ &= \log 54\end{aligned}$$

$\therefore\ n \le 54$

그러므로 10이상의 자연수 n은

$10, 11, 12, \cdots, 54$ 로 45개이다.

따라서, (i), (ii)에 의해 자연수 n의 개수는 50개이다.

<답> ⑤

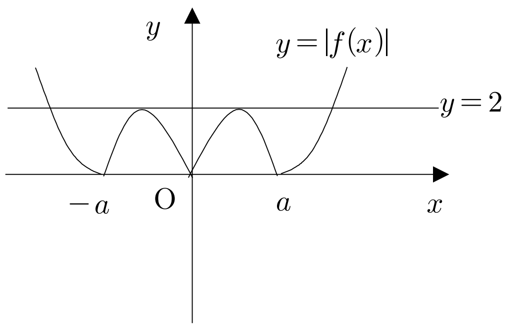
21.

출제의도 : 미분을 이용하여 극대값을 구할 수 있는가 ?

$f(-x) = -f(x)$이므로 $y = f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

한편, $|f(x)| = 2$ 가 서로 다른 4개의 실근을 가지므로 두 함수 $y = |f(x)|$, $y = 2$는 서로 다른 네 점에서 만나야 한다.

그러므로 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



그러므로, $y = f(x)$는 극댓값 2를 갖는다.

한편, 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x) = x^3 - a^2 x\ (a > 0)$

로 놓으면

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - a^2\\ &= 3\left(x + \frac{a}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

이므로 $x = -\dfrac{a}{\sqrt{3}}$에서 극댓값 2를 갖는다.

$$\begin{aligned}f\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right) &= -\frac{a^3}{3\sqrt{3}} + \frac{a^3}{\sqrt{3}}\\ &= \frac{2a^3}{3\sqrt{3}} = 2\end{aligned}$$

$\therefore\ a = \sqrt{3}$

따라서, $f(x) = x^3 - 3x$이므로

$f(3) = 27 - 9 = 18$

<답> ④

2012학년도 대학수학능력시험 수리영역 나형 정답 및 해설 (홀수형)

22.
출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+3x+7)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x^2+3x+7)$$
$$=1^2+3\cdot1+7$$
$$=11$$

<답> 11

23. 출제의도 : 로그방정식을 풀 수 있는가?

$$\log_3(x-11)=3\log_3 2$$
$$\log_3(x-11)=\log_3 2^3$$
$$x-11=8 \quad (x>11)$$
$$\therefore\ x=19$$

<답> 19

24.
출제의도 : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$$\int_0^5(4x-3)dx$$
$$=\left[2x^2-3x\right]_0^5$$
$$=2\cdot5^2-3\cdot5$$
$$=35$$

<답> 35

25.
출제의도 : 등차중항과 등비중항을 활용할 수 있는가?

세 수 $a, a+b, 2a-b$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(a+b)=a+(2a-b)$

$\therefore\ a=3b$ ---㉠

또, $1, a-1, 3b+1$이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(a-1)^2=1\cdot(3b+1)$

㉠에서 $3b=a$를 대입하면

$a^2-2a+1=a+1$

$a^2-3a=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=3$

$a=0$일 때, $b=0$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

$a=3$일 때, $b=1$이고 이때 주어진 조건을 만족한다.

따라서 $a^2+b^2=9+1=10$

<답> 10

26.
출제의도 : 미분을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

$y'=-3x^2+4$이므로 점 $(1,3)$에서의 접선의 기울기는

$y'_{x=1}=1$

그러므로 접선의 방정식은

$y-3=1\cdot(x-1)$

$\therefore\ y=x+2$

따라서, $a=1$, $b=2$이므로

$10a+b=12$

<답> 12

27.

출제의도 : 연속확률변수의 확률분포를 이해하고 있는가?

$$\int_0^1 f(x)dx=1 \quad ----㉠$$

또, $E(X)=\frac{1}{4}$에서

$$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{4} \quad ---㉡$$

㉠과 ㉡에서

$$\int_0^1 (ax+5)f(x)dx$$

$$=a\int_0^1 xf(x)dx+5\int_0^1 f(x)dx$$

$$=a\times\frac{1}{4}+5=10$$

$$\therefore\ a=20$$

<답> 20

28.

출제의도 : 수열의 일반항을 구하여 무한급수의 값을 구할 수 있는가?

$P_n(n,\ 3^n)$, $P_{n+1}(n+1, 3^{n+1})$, $Q_{n+1}(n+1,\ 0)$, $Q_{n+2}(n+2,\ 0)$이므로

$$a_n=\triangle P_nQ_{n+1}P_{n+1}+\triangle P_{n+1}Q_{n+1}Q_{n+2}$$

$$=\frac{1}{2}\times 3^{n+1}\times 1+\frac{1}{2}\times 3^{n+1}\times 1$$

$$=3^{n+1}$$

따라서,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{6}$$

따라서,

$$p^2+q^2=6^2+1^2=37$$

<답> 37

29.

출제의도 : 역행렬을 이용하여 연립일차방정식을 풀 수 있는가?

(가)에서

$A(A+2E)=E$

이므로

$(A+2E)^{-1}=A$

그러므로

$(A+2E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$

에서

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(A+2E)^{-1}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$

$=A\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$

(나)에서 $A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}=3A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$

따라서,

$x+y=9+12=21$

<답> 21

30

출제의도 : 지수함수의 그래프를 이해하고 있는가?

(ⅰ) $a>b$일 때,

$\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은 $t=1$일 때 가지므로 $t=1$을 대입하면

$a^2-b\le 10$

이 조건을 만족하는 순서쌍 (a,b)는 $(3,2)$로 1개이다.

(ⅱ) $a=b$일 때,

$\overline{\mathrm{PQ}}$이 최솟값은 $t=1$일 때, 가지므로 $t=1$을 대입하면

$a^2-b=a^2-a\le 10$

$a^2-a-10\le 0$

이 부등식을 만족하는 a는 $2, 3$으로 2개이다.

그러므로 순서쌍 (a,b)는 $(2,2)$, $(3,3)$으로 2개이다.

(ⅲ) $a<b$일 때,

두 함수 $y=a^{x+1}$, $y=b^x$의 그래프는 $x>0$에서 한 점에서 만나므로 $\overline{\mathrm{PQ}}\le 10$인 t가 존재한다.

그러므로 순서쌍 (a,b)는 $(2,3)$ $(2,4)$, $\cdots$, $(2,10)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $\cdots$, $(3,10)$, $\cdots$, $(9,10)$으로 $\dfrac{8\times 9}{2}=36$개다.

따라서, 구하는 순서쌍 (a,b)의 개수는 39개다.

<답> 39

2012학년도 대학수학능력시험 대비

2011학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수리 영역 •

수리'가'형 정답

1	③	2	④	3	②	4	⑤	5	①
6	②	7	④	8	④	9	①	10	③
11	②	12	①	13	②	14	③	15	⑤
16	⑤	17	④	18	③	19	③	20	②
21	①	22	15	23	27	24	130	25	140
26	3	27	10	28	12	29	17	30	7

해 설

1. [출제의도] 로그의 계산을 할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\log_2 3+\log_2 \frac{8}{3}=\log_2\left(3\times\frac{8}{3}\right)=\log_2 2^3=3$

2. [출제의도] 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는지 묻는 문제이다.

(주어진 식)$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

3. [출제의도] 배각의 공식을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times\frac{9}{16}-1=\frac{1}{8}$

4. [출제의도] 삼각함수의 부정적분을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$f(x)=\int \sin x dx=-\cos x+C$ (C는 적분상수)

$\therefore\ f(\pi)-f(0)=-\cos\pi+\cos 0=2$

5. [출제의도] 곡선의 접선의 기울기를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$x^3+xy+y^3-8=0$에 $y=0$을 대입하면 $x=2$이다.

$x^3+xy+y^3-8=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+y+xy'+3y^2y'=0$

따라서 점 $(2,0)$에서의 접선의 기울기는 -6이다.

6. [출제의도] 정규분포의 확률을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

물고기 한 마리의 무게를 확률변수 X라 하면

$\mathrm{P}(X\ge 830)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{830-800}{50}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 0.6)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.6)=0.5-0.2257=0.2743$

7. [출제의도] 조건부확률을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

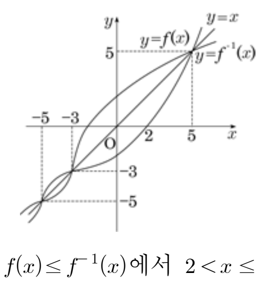
임의로 뽑은 한 명이 여학생일 사건을 F, 봄을 선택한 학생일 사건을 A라 하자.

$\mathrm{P}(A)=0.6\times0.55+0.4\times0.65=0.59$

$\mathrm{P}(F\cap A)=0.4\times0.65=0.26$ 이므로

$\mathrm{P}(F|A)=\frac{\mathrm{P}(F\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{26}{59}$

8. [출제의도] 분수부등식의 해를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.



(i) $f(x)>0$, $f(x)\le f^{-1}(x)$에서 $2<x\le 5$

(ii) $f(x)<0$, $f(x)\ge f^{-1}(x)$에서 $-5\le x\le -3$

따라서 구하는 정수 x의 개수는 6이다.

9. [출제의도] 일차변환의 합성을 이해할 수 있는지 묻는 문제이다.

일차변환 $f\circ g\circ f$를 나타내는 행렬은

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

$(f\circ g\circ f)(P)=f(P)$에서

$\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$이므로

$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{3}$, $-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=1$

따라서 $\sin\theta=\frac{1}{2}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. [출제의도] 행렬의 성질을 추론할 수 있는지 묻는 문제이다.

ㄱ. $AB=BA$이면 $A^2B=ABA=BA^2$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ (거짓)

ㄷ. $A(AB)=(AB)A=E$이므로 $AAB=ABA$의 양변의 왼쪽에 A^{-1}을 곱하면 $AB=BA$ (참)

11. [출제의도] 좌표로 표시된 벡터의 크기의 최솟값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

삼각형 ABC의 무게중심 G는 $\mathrm{G}(4,5,6)$이다.

$\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{3}\right|=|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$이다.

이때, $|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$의 값이 최소이려면 점 G에서 xy평면에 내린 수선의 발이 점 P일 때이므로 $\mathrm{P}(4,5,0)$일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$의 최솟값은 6이다.

12. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 등식을 증명할 수 있는지 묻는 문제이다.

$a=-1$, $f(m)=-\frac{m(m+1)}{2}$이므로

$a+f(9)=(-1)+(-45)=-46$

13. [출제의도] 공간좌표를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\mathrm{A}(1,3,2)$, $\mathrm{B}(1,-3,-2)$, $\mathrm{C}(1,3,-2)$이므로 삼각형 ABC는 $\angle\mathrm{C}=90^\circ$인 직각삼각형이다.

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{13}$

14. [출제의도] 함수의 극한과 연속성을 이해할 수 있는지 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim\limits_{x\to-1-0}f(x)\times\lim\limits_{x\to-1-0}g(x)=1\times0=0$이고

$\lim\limits_{x\to-1+0}f(x)\times\lim\limits_{x\to-1+0}g(x)=0\times(-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)g(x)=0$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)-\lim\limits_{x\to1-0}g(x)=0-(-1)=1$이고

$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)-\lim\limits_{x\to1+0}g(x)=1-0=1$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=1$ (참)

ㄷ. $g(f(0))=g(-1)=0$, $\lim\limits_{x\to0}g(f(x))=\lim\limits_{t\to-1+0}g(t)=-1$

이므로 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

15. [출제의도] 지수함수에서 넓이의 최솟값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

직사각형의 가로의 길이는 $\beta-\alpha=4$이고, 세로의 길이는 $3^\alpha-(-3^{-\beta})$이므로 직사각형의 넓이를 S라 하면

$S=(\beta-\alpha)\left(3^\alpha+3^{-\beta}\right)=4\left(3^\alpha+3^{-\alpha-4}\right)$

$\ge 4\times2\sqrt{3^\alpha\cdot3^{-\alpha-4}}=\frac{8}{9}$

(단, 등호는 $\alpha=-2$, $\beta=2$일 때 성립)

따라서 직사각형의 넓이의 최솟값은 $\frac{8}{9}$이다.

16. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다.

두 점근선의 교점을 원점으로 하고, 두 초점이 x축 위에 있는 좌표평면에서 쌍곡선 H의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$이라 하자.

두 초점의 좌표가 $\mathrm{A}(2,0)$, $\mathrm{D}(-2,0)$이므로 $a^2+b^2=2^2$

직선 BE가 점근선이므로 $\frac{b}{a}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DP}}-\overline{\mathrm{AP}}=2a=2$

17. [출제의도] 함수의 그래프의 성질을 추측할 수 있는지 묻는 문제이다.

$f'(x)=e^x-\frac{1}{x^2}$이고 $f''(x)=e^x+\frac{2}{x^3}$이다.

ㄱ. $f'(\alpha)=e^\alpha-\frac{1}{\alpha^2}=0$에서 $e^\alpha=\frac{1}{\alpha^2}$ (참)

ㄴ. 모든 양수 x에 대하여 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $f'(\alpha)=0$이고 모든 양수 x에 대하여 $f''(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이자 최소이다. (참)

18. [출제의도] 벡터의 내적을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$에서 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$가 성립하므로 점 P는 점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 평면과 구의 교선인 원 위에 있다.

이때, 이 원의 반지름의 길이는 구의 중심과 직선 AB 사이의 거리와 같다.

한편, 원점 O에서 직선 $x+1=2-y=z$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(t-1,2-t,t)$라 하면

$(t-1,2-t,t)\cdot(1,-1,1)=0$에서 $t=1$이다.

이때, $\mathrm{H}(0,1,1)$이므로 $\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{2}$이다.

따라서 구하는 도형의 길이는 $2\sqrt{2}\pi$이다.

19. [출제의도] 적분과 미분을 이용하여 수면의 높이를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

수면의 높이가 h일 때 물의 부피 V는

$V=\pi\int_0^h x^2dy=\pi\int_0^h(2^{y-1})^2dy$이므로

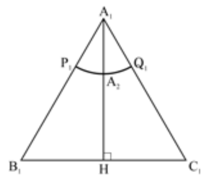
$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}=\pi(2^{2h-2})\frac{dh}{dt}$, $\pi(2^{2a-2})\cdot6=12\pi$

$\therefore\ a=\frac{3}{2}$

20. [출제의도] 행렬의 연산을 이용하여 행렬을 나타낼 수 있는지 묻는 문제이다.

R_1지점에서 도로망을 따라 S_2지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 $a_{11}\times a_{12}+a_{12}\times a_{22}$이므로 행렬 A^2의 $(1,\ 2)$성분과 같다.

21. [출제의도] 도형에서 무한등비급수의 합을 활용할 수 있는지 묻는 문제이다.



$\overline{\mathrm{A_1P_1}}=\overline{\mathrm{A_1A_2}}=2$이므로 $l_1=\frac{2}{3}\pi$이다.

한편, 꼭짓점 A_1에서 선분 $\mathrm{B_1C_1}$에 내린 수선의 발을 H로 놓으면 $\overline{\mathrm{A_1H}}=3\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{A_2H}}=\overline{\mathrm{A_1H}}-\overline{\mathrm{A_1A_2}}=3\sqrt{3}-2$

그러므로 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $\frac{2}{3}\pi$이고 공비가 $1-\frac{2\sqrt{3}}{9}$인 등비수열을 이룬다.

$\therefore \ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\frac{2}{3}\pi}{1-\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)} = \sqrt{3}\,\pi$

22. [출제의도] 무리방정식의 해를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\sqrt{x+10}=x-10$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$(x-6)(x-15)=0$

$\therefore \ x=15 \ (\because \ x \geq 10)$

23. [출제의도] 등차수열의 일반항을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$a_2-a_3+a_4-a_5+a_6=a_2+(-a_3+a_4)+(-a_5+a_6)$

$=a+3(a+1)=4a+3=15$에서 $a=3$

$\therefore \ a_7=a+6(a+1)=7a+6=27$

24. [출제의도] 중복조합을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다.

${}_4\mathrm{H}_8-{}_4\mathrm{H}_4={}_{11}\mathrm{C}_3-{}_7\mathrm{C}_3=165-35=130$

25. [출제의도] 로그와 관련된 실생활 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다.

$70=10\log\dfrac{\frac{1}{10^5}}{x_0}=10(-5-\log x_0)$ …… ㉠

$a=10\log\dfrac{10^2}{x_0}=10(2-\log x_0)$ …… ㉡

㉡－㉠을 계산하면 $a-70=70$

$\therefore \ a=140$

26. [출제의도] 일차변환의 행렬을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다.

일차변환 f에 의하여 점 $\mathrm{P}(x, y)$가 $\mathrm{P}'(x', y')$으로 옮겨진다고 하면

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x+2y \\ x+ay \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

에서 두 직선 $x'=2$, $y'=x'+1$로 각각 옮겨지는 두 직선 l, l'은 $-x+2y=2$, $x+ay=-x+2y+1$이다.

이때, 수직인 두 직선 l, l'의 기울기는 각각 $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{-2}{a-2}$이므로 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-2}{a-2}=-1$에서 $a=3$이다.

27. [출제의도] 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$g(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=t$라 하면 $-2 \leq t \leq 2$이다.

$(f\circ g)(x)=f(t)=t^3-3t^2+15$에서

$f'(t)=3t(t-2)$이므로 $f(t)$는 $t=0$에서 극대이다.

따라서 $f(0)=15$, $f(-2)=-5$, $f(2)=11$이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $f(0)+f(-2)=10$이다.

28. [출제의도] 연속확률변수의 평균을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\displaystyle\int_0^a 2e^{-x}dx=\left[-2e^{-x}\right]_0^a=1$에서 $a=\ln 2$이다.

$\mathrm{E}(X)=\displaystyle\int_0^{\ln 2} 2xe^{-x}dx=\left[-2xe^{-x}\right]_0^{\ln 2}+\int_0^{\ln 2} 2e^{-x}dx$

$=1-\ln 2$

$\therefore \ 10p+q=12$

29. [출제의도] 정적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\mathrm{A}(1,\ 0)$이고 $S_1=S_2$이므로

$\displaystyle\int_0^1 \{-(x+1)^3+8-k\}dx=0$

$\therefore \ 4k=4\times\dfrac{17}{4}=17$

30. [출제의도] 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

선분 AN의 중점을 P라 하면 두 직선 CN, MP가 서로 평행하므로 두 직선 BM, CN이 이루는 각의 크기는 두 직선 BM, MP가 이루는 각의 크기와 같다.

이때, $\overline{\mathrm{AB}}=4$라 하면 $\overline{\mathrm{BM}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{MP}}=\sqrt{3}$이고, 직각삼각형 BNP에서 $\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{13}$이다.

따라서 삼각형 BMP에서 코사인법칙에 의해

$\cos\theta=\left|\dfrac{\overline{\mathrm{BM}}^2+\overline{\mathrm{MP}}^2-\overline{\mathrm{BP}}^2}{2\overline{\mathrm{BM}}\cdot\overline{\mathrm{MP}}}\right|=\dfrac{1}{6}$

$\therefore \ p+q=6+1=7$

수리'나'형 정답

1	③	2	①	3	④	4	③	5	④
6	②	7	⑤	8	③	9	②	10	③
11	③	12	①	13	①	14	④	15	⑤
16	④	17	⑤	18	⑤	19	②	20	②
21	①	22	120	23	27	24	128	25	140
26	25	27	15	28	7	29	800	30	31

해 설

1. '가'형과 동일

2. [출제의도] 행렬의 계산을 할 수 있는지 묻는 문제이다.

$A^2-AB=A(A-B)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 $3-2+1-1=1$이다.

3. [출제의도] 함수의 극한을 계산할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x+3}+2)=2+2=4$

4. [출제의도] 서로 독립인 사건의 확률을 계산할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\dfrac{2}{3}+\mathrm{P}(B)-\dfrac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\dfrac{11}{12}$

$\therefore \ \mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{4}$

5. [출제의도] 함수의 미분가능성을 이해할 수 있는지 묻는 문제이다.

함수 $f(x)$는 연속함수이다.

$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+a & (x>1) \\ 4x & (x<1) \end{cases}$

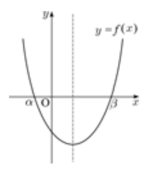
$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}(3x^2+a)=\lim_{x\to 1-0}4x$에서 $3+a=4$이다.

$\therefore \ a=1$

6. '가'형과 동일

7. [출제의도] 정적분의 값을 비교할 수 있는지 묻는 문제이다.

이차함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$\therefore \ C<B<A$

8. [출제의도] 확률을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}=\dfrac{6}{(n+3)(n+2)}=\dfrac{1}{12}$

$n^2+5n-66=(n+11)(n-6)=0$

$\therefore \ n=6$

9. [출제의도] 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$g(x)=t$로 놓으면 $-1\leq t\leq 1$이고

$(f\circ g)(x)=f(t)=t^3+3t^2+2$

$f'(t)=3t^2+6t=0$에서 $t=0$ 또는 $t=-2$

이때, $f(0)=2$, $f(-1)=4$, $f(1)=6$이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 8이다.

10. '가'형과 동일

11. [출제의도] 등비수열의 일반항의 자릿수를 구할 수

있는지 묻는 문제이다.

$\log a_{21} = \log(4 \cdot 5^{20}) = 2\log 2 + 20\log 5$

$= 2 \times 0.3010 + 20 \times (1 - 0.3010) = 14.5820$

따라서 지표가 14이므로 a_{21}은 15자리의 자연수이다.

12. '가'형과 동일

13. [출제의도] 정적분과 미분의 관계를 이해할 수 있는지 묻는 문제이다.

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x) = f'(x)f(x) + f(x)f'(x)$ 이므로

$f(x)\{1 - 2f'(x)\} = 0$ 이다.

이때, 함수 $f(x)$는 상수함수가 아닌 다항함수이므로

$f'(x) = \frac{1}{2}$ 이다.

이때, $f(1) = 0$ 이므로 $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$\therefore\ f(3) = 1$

14. [출제의도] 함수의 극한값을 추론할 수 있는지 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to -0} f(x) = -1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x \to 1+0} \{f(x) + g(x)\} \neq \lim_{x \to 1-0} \{f(x) + g(x)\}$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{x \to -1+0} f(x)g(x) = \lim_{x \to -1-0} f(x)g(x) = 0$ 이므로

$\lim_{x \to -1} f(x)g(x) = 0$ (참)

15. '가'형과 동일

16. [출제의도] 도형에서 함수의 극한값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

중심이 $\mathrm{P}(x,\ y)$이므로 x축에 접하는 원의 반지름의 길이는 y이다. 두 원이 외접하므로 $\overline{\mathrm{PA}} = y + 1$

즉, $\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = y + 1$ 이다.

$x^2 + (y-3)^2 = (y+1)^2$ 에서 $x^2 = 8y - 8$

이때, $x \to \infty$ 이면 $y \to \infty$ 이므로

$\therefore\ \lim_{x \to \infty} \frac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\overline{\mathrm{PA}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{y+1} = \lim_{y \to \infty} \frac{8y - 8}{y+1} = 8$

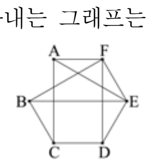
17. [출제의도] 무한급수와 정적분의 관계를 이해할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(-1 + \frac{2k}{n}\right) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (3x^3 + 4x^2 - 2x - 1)\, dx$

$= \int_{0}^{1} (4x^2 - 1)\, dx = \frac{1}{3}$

18. [출제의도] 그래프의 성질을 추론할 수 있는지 묻는 문제이다.

주어진 행렬이 나타내는 그래프는 그림과 같다.



따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

19. [출제의도] 속도와 거리의 관계를 이해할 수 있는지 묻는 문제이다.

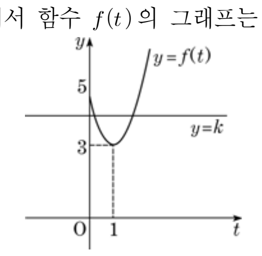
t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 x_{P}, x_{Q}라 하면

$x_{\mathrm{P}} = 5 + \int_{0}^{t} (3t^2 - 2)\, dt = t^3 - 2t + 5$,

$x_{\mathrm{Q}} = k + \int_{0}^{t} 1\, dt = t + k$

이때, 두 점 P, Q가 만나려면 $t^3 - 2t + 5 = t + k$ 즉, $t^3 - 3t + 5 = k$이어야 한다.

$f(t) = t^3 - 3t + 5$ 라 하면 $f'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t-1)(t+1)$ 이므로 $t > 0$에서 함수 $f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y = k$와 곡선 $y = f(t)$가 서로 다른 두 점에서 만날 조건은 $3 < k < 5$ 이므로 정수 k는 4이다.

20. '가'형과 동일

21. '가'형과 동일

22. [출제의도] 이항정리에서 이항계수를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

${}_{10}\mathrm{C}_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$

23. '가'형과 동일

24. [출제의도] 곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$y' = 3x^2 - 2$ 이므로 곡선 위의 점 (2, 4)에서의 접선의 기울기는 10이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y - 4 = 10(x - 2)$, $y = 10x - 16$

$S = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \frac{8}{5} = \frac{64}{5}$

$\therefore\ 10S = 128$

25. '가'형과 동일

26. [출제의도] 로그방정식을 이용하여 실근의 개수를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\log x = X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2 + (\log 2 + \log 4)X + (\log 2)(\log 4) + (\log k)^2 = 0$

주어진 조건을 만족하려면 X에 대한 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식 D는

$D = (\log 2 + \log 4)^2 - 4(\log 2)(\log 4) - 4(\log k)^2 > 0$

$-\frac{1}{2}\log 2 < \log k < \frac{1}{2}\log 2$

$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{2}} < k < \sqrt{2}$

$\therefore\ 10(\alpha^2 + \beta^2) = 10\left(\frac{1}{2} + 2\right) = 25$

27. [출제의도] 중복조합의 수를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

${}_{3+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_2 = \frac{6 \times 5}{2} = 15$

28. [출제의도] 연속확률변수의 평균을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\mathrm{E}(X) = \int_{0}^{\frac{1}{2}} x^2\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (5x^2 - 2x)\, dx = \frac{3}{4}$

$\therefore\ p + q = 7$

29. [출제의도] 행렬의 거듭제곱과 수열의 합을 추론할 수 있는지 묻는 문제이다.

$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$이라 하면 $A^n = (3P)^n = 3^n P^n$ 이다.

행렬 P^n의 모든 성분의 합을 T_n이라 하면 행렬 A^n의 모든 성분의 합은 $S_n = 3^n T_n$ 이므로 $S_n = 3^{n+1}$ 이 성립하려면 $T_n = 3$ 이어야 한다.

$T_1 = -1$, $T_2 = -3$, $T_3 = -2$, $T_4 = 1$, $T_5 = 3$, $T_6 = 2$, $T_7 = -1$, $\cdots$

이므로 $n = 6k - 1$(k는 자연수)일 때 $T_n = 3$ 이다.

따라서 구하는 100 이하의 모든 자연수의 합은 첫째항이 5이고 제16항이 95인 등차수열의 첫째항부터 제16항까지의 합이므로 $\frac{16(5 + 95)}{2} = 800$ 이다.

30. [출제의도] 수열의 합을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} (8k - 4) - 1 = 4n^2 - 1$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{S_n} = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{21}\right) = \frac{10}{21}$

$\therefore\ p + q = 31$

2012학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

1.

출제의도 : 로그의 성질을 활용하여 계산할 수 있는가?

$$\log_2 12 + \log_2 \frac{4}{3} = \log_2 (12\times\frac{4}{3}) = \log_2 16$$
$$= \log_2 2^4 = 4$$

<답> ④

2.

출제의도 : 무한수열의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{2n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{3}{2}$$

<답> ③

3.

출제의도 : 역행렬을 구할 수 있는가?

$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$이므로

$3A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ 이다.

따라서 $3A^{-1}$ 의 모든 성분의 합은

$2+(-1)+(-3)+3=1$

<답> ④

4.

출제의도 : 확률의 성질을 이해하고 있는가?

두 사건 A, B 가 독립이므로

$P(A\cap B) = P(A)P(B)$이다.

이 때

$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

이므로

$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{2}P(B)$

$\therefore P(B) = \frac{3}{5}$

$\therefore P(A\cap B) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{5} = \frac{3}{10}$

<답> ⑤

5.

출제의도 : 지수방정식의 해를 구할 수 있는가?

$2^x+2^{5-x}=33$에서 양변에 2^x을 곱하고 식을 정리하면

$(2^x)^2-33\cdot 2^x+32=0$

$(2^x-1)(2^x-32)=0$

따라서 $2^x=1$ 또는 $2^x=32$ 이므로

$x=0$ 또는 $x=5$ 이다.

따라서 모든 실근의 합은 5이다.

<답> ②

6.

출제의도 : 확률분포표에서 평균을 구할 수 있는가?

주어진 확률분포표에서 확률의 합은 1이므로

$a+\frac{1}{4}+b=1,\ a+b=\frac{3}{4}$ ---㉠

또 확률변수 X의 평균 $E(X)=5$이므로

$1\times a+3\times\frac{1}{4}+7\times b=5,\ a+7b=\frac{17}{4}$ ---㉡

㉡-㉠ 을 계산하면

$6b=\frac{14}{4}$ $\therefore b=\frac{7}{12}$

<답> ③

7.
출제의도 : 로그부등식을 풀 수 있는가?
메뉴가 10이고 항목이 n개씩이므로
걸리는 전체시간은

$10\left\{2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)\right\}$

이 때 $10\left\{2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)\right\}\le 30$ 에서

$2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)\le 3$, $\log_2(n+1)\le 3$

$n+1\le 2^3$, $n\le 7$
따라서 n의 최댓값은 7이다.

<답> ①

8.
출제의도 : 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?
등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$S_2=a_1+a_2=a(1+r)$

$S_4=\frac{a(r^4-1)}{r-1}=\frac{a(r-1)(r+1)(r^2+1)}{r-1}$

$=a(r+1)(r^2+1)$
이므로

$\frac{S_4}{S_2}=\frac{a(r+1)(r^2+1)}{a(r+1)}=r^2+1=9$

$\therefore r^2=8$

따라서 $\frac{a_4}{a_2}=\frac{ar^3}{ar}=r^2=8$이다.

<답> ④

9.
출제의도 : 무한등비급수를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?
R_1에서 주어진 원의 반지름의 길이가 1이므로 넓이는 π 이고 긴 대각선의 길이는 8이다.
이 때 R_2에서 새로 생긴 마름모의 긴 대각선의 길이가 3이므로 짧은 대각선의 길이는 $\frac{3}{2}$이다. 따라서 이 마름모 안에 새로 생긴 원의 반지름의 길이는 $\frac{3}{8}$이므로 R_2에 들어 있는 원의 넓이의 합은 $\pi+2\times\left(\frac{3}{8}\right)^2\pi$ 이다.
같은 방법으로 R_n에 들어 있는 모든 원의 넓이의 합 S_n을 구하면

$$S_n=\pi+2\times\frac{9}{64}\pi+4\times\left(\frac{9}{64}\right)^2\pi+\cdots+2^{n-1}\times\left(\frac{9}{64}\right)^n\pi$$

$$=\frac{\pi\left(1-\left(\frac{9}{32}\right)^n\right)}{1-\frac{9}{32}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{1-\frac{9}{32}}=\frac{32}{23}\pi$$

<답> ④

10.
출제의도 : 정적분을 활용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가 ?
$x^2-x+2=2$ 에서 $x^2-x=x(x-1)=0$이므로 곡선과 직선의 교점의 x좌표는 0과 1이다.
따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^1 2-(x^2-x+2)\,dx = \int_0^1(-x^2+x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$= -\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

<답> ②

11.
출제의도 : 그래프로부터 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?
주어진 그래프에서

$\lim_{x \to -1-0} f(x) + f(0) + \lim_{x \to 1+0} f(x)$

$=1+2+(-1)=2$

<답> ⑤

12.
출제의도 : 확률의 성질을 활용하여 확률을 구할 수 있는가 ?
주사위 1개를 던져서 나오는 눈의 수가 6의 약수인 경우는 1, 2, 3, 6 이므로 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$
또 동전 3개를 동시에 던져서 앞면이 1개 나올 확률은 $\frac{3}{8}$ 이고 동전 2개를 동시에 던져서 앞면이 1개 나올 확률은 $\frac{2}{4}$ 이다.
따라서 구하는 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$

<답> ③

13.
출제의도 : 정적분의 성질을 알고 활용할 수 있는가?
ㄱ. $f(x)=x$라고 하면

$\int_0^3 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$

$3\int_0^1 x\,dx=3\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{3}{2}$

따라서 $\int_0^3 x\,dx \neq 3\int_0^1 x\,dx$ (거짓)

ㄴ. 정적분의 성질에 의하여 참이다.
ㄷ. $f(x)=x$라고 하면

$\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

$\left\{\int_0^1 x\,dx\right\}^2=\left(\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\right)^2=\frac{1}{4}$

따라서 $\int_0^1 x^2\,dx \neq \left\{\int_0^1 x\,dx\right\}^2$ (거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

<답> ①

14.
출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?
$B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라 하면 (가)에서

$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p-q \\ r-s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore\ p=q,\ r=s$

$\therefore\ B=\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}$

이때, (나)에서

$AB=\begin{pmatrix} p+r & p+r \\ a(p+r) & a(p+r) \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$

이므로 $p+r=2$이다.
또,

$BA=\begin{pmatrix} p(1+a) & p(1+a) \\ r(1+a) & r(1+a) \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}$

이므로 $1+a=4$ 즉, $a=3$이다.
($\because$ $1+a\neq4$이면 $p=0$, $r=0$이므로 모순이다.)

따라서 $A+B=\begin{pmatrix} 1+p & 1+p \\ a+r & a+r \end{pmatrix}$의 (1, 2)성분과 (2, 1)성분의 합은

$1+p+a+r=1+a+(p+r)$

$=1+3+2=6$

<답> ③

15.

출제의도 : 곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가 ?

$y'=3x^2$이므로 접점의 좌표를 A (a, a^3-2)라 하면 점 A에서의 접선의 방정식은

$y-a^3+2=3a^2(x-a)$

$\therefore\ y=3a^2x-2a^3-2$

이 접선이 점 (0, -4)를 지나야 하므로

$-4=-2a^3-2$

$\therefore\ a=-1$

따라서 접선의 방정식은 $y=3x-4$이므로 x절편은 $a=\dfrac{4}{3}$

<답> ②

16.

출제의도 : 정규분포에서의 확률을 구할 수 있는가 ?

제품 A의 무게를 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(m,1)$을 따르고, 제품 B의 무게를 Y라 하면 확률변수 Y는 정규분포 $N(2m,2^2)$을 따른다.

이때,

$P(X\geq k)=P\left(\dfrac{X-m}{1}\geq\dfrac{k-m}{1}\right)$

$=P(Z\geq k-m)$

이고,

$P(Y\leq k)=P\left(\dfrac{Y-2m}{2}\leq\dfrac{k-2m}{2}\right)$

$=P\left(Z\leq\dfrac{k-2m}{2}\right)=P\left(Z\geq-\dfrac{k-2m}{2}\right)$

이므로 두 확률이 같으려면

$k-m=-\dfrac{k-2m}{2}$

이 성립해야 한다.

이때, $2k-2m=-k+2m$ 즉, $3k=4m$이므로 $\dfrac{k}{m}=\dfrac{4}{3}$이다.

<답> ⑤

17.

출제의도 : 상용로그의 지표와 가수를 이해할 수 있는가 ?

$\log x=n+\alpha$ (n은 정수, $0\leq\alpha<1$)이라 하면 $f(x)=n$, $g(x)=\alpha$이다.

(가)에서 $3g(x)=3\alpha$의 값이 정수이어야 하므로 $\alpha=0$ 또는 $\alpha=\dfrac{1}{3}$ 또는 $\alpha=\dfrac{2}{3}$이다.

(i) $\alpha=0$일 때,

$\log x^2=2\log x=2n$이므로 $f(x^2)=2n$이다.

따라서 (나)에서

$f(x)+f(x^2)=n+2n=6$

$\therefore\ n=2$

따라서 $\log x=2+0$이므로

$x=10^2$

(ii) $\alpha=\dfrac{1}{3}$일 때,

$\log x^2=2\log x=2n+\dfrac{2}{3}$이므로 $f(x^2)=2n$이다.

따라서 (나)에서

$f(x)+f(x^2)=n+2n=6$

$\therefore\ n=2$

따라서 $\log x=2+\dfrac{1}{3}$이므로

$x=10^{2+\frac{1}{3}}$

(iii) $\alpha=\dfrac{2}{3}$일 때,

$\log x^2 = 2\log x = 2n + \frac{4}{3} = 2n + 1 + \frac{1}{3}$ 이므로

$f(x^2) = 2n+1$이다.

따라서 (나)에서

$f(x) + f(x^2) = n + 2n + 1 = 6$

$\therefore \ n = \frac{5}{3}$

이때, n은 정수가 아니므로 모순이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 모든 x의 값의 곱은

$10^2 \times 10^{2+\frac{1}{3}} = 10^{4+\frac{1}{3}} = 10^{\frac{13}{3}}$

<답> ②

18.

출제의도 : 삼차함수의 역함수가 존재할 조건을 구할 수 있는가 ?

삼차함수 $f(x)$의 역함수가 존재할 필요충분조건은 이차방정식

$f'(x) = x^2 - 2ax + 3a = 0$

이 서로 다른 두 실근을 갖지 않는 것이다.

따라서 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = a^2 - 3a \le 0$

이므로 $0 \le a \le 3$이다.

따라서 상수 a의 최댓값은 3이다.

<답> ①

19.

출제의도 : 수열의 일반항을 구할 수 있는가?

$b_2 = (4a_1 - 1)b_1 = 3$이므로

$b_{n+2} - b_{n+1} = b_{n+1} - b_n = \cdots = b_2 - b_1 = 2$

따라서 등차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 2이므로

$b_n = 2n - 1$

따라서 $b_{n+1} = 2n+1$이므로 (*)에서

$2n+1 = (4a_n - 1)(2n-1)$

$\therefore \ a_n = \frac{1}{4}\left(\frac{2n+1}{2n-1} + 1\right) = \frac{n}{2n-1}$

따라서 $f(n) = 2n-1$, $g(n) = \frac{n}{2n-1}$ 이므로

$f(14) \times g(5) = 27 \times \frac{5}{9} = 15$

<답> ①

20.

출제의도 : 함수가 연속일 조건을 구할 수 있는가 ?

함수 $y = \{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x \to -0} \{g(x)\}^2 = \lim_{x \to +0} \{g(x)\}^2 = \{g(0)\}^2$

이 성립해야 한다.

이때 이차함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$\lim_{x \to -0} \{g(x)\}^2 = \lim_{x \to -0} \{f(x+1)\}^2 = \{f(1)\}^2 = a^2$,

$\lim_{x \to +0} \{g(x)\}^2$

$= \lim_{x \to -0} \{f(x-1)\}^2 = \{f(-1)\}^2 = (2+a)^2$,

$\{g(0)\}^2 = \{f(1)\}^2 = a^2$

이므로 $a^2 = (2+a)^2$ 즉, $4a + 4 = 0$이어야 한다.

$\therefore \ a = -1$

<답> ②

21.

출제의도 : 속도와 거리의 관계를 추론할 수 있는가 ?

ㄱ. $t=a$일 때, 물체 A의 높이는 $\int_0^a f(t)\,dt$이

고, 물체 B의 높이는 $\int_0^a g(t)dt$이다.

이때, 주어진 그림에서

$\int_0^a f(t)dt > \int_0^a g(t)dt$

이므로 A가 B보다 높은 위치에 있다. (참)

ㄴ. $0 \le t \le b$일 때 $f(t)-g(t) \ge 0$이므로 시각 t에서의 두 물체 A, B의 높이의 차는 점점 커진다.

또, $b < t \le c$일 때 $f(t)-g(t) < 0$이므로 시각 t에서의 두 물체 A, B의 높이의 차는 점점 줄어든다.

따라서 $t=b$일 때, 물체 A와 물체 B의 높이의 차가 최대이다. (참)

ㄷ. $\int_0^c f(t)dt = \int_0^c g(t)dt$이므로 $t=c$일 때, 물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

<답> ⑤

22.

출제의도 : 함수의 극한을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}$$
$$= \lim_{x\to 5}(x+5) = 10$$

<답> 10

23.

출제의도 : 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면

$a_2 = a_1 + d = 1$

$a_1 + a_6 = 2a_1 + 5d = 8$

따라서 위의 두 식을 연립하면

$a_1 = -1,\ d = 2$

$\therefore\ a_{21} = a_1 + 20d = -1 + 40 = 39$

<답> 39

24. 출제의도 : 행렬의 성분을 구하고 행렬의 곱셈을 할 수 있는가?

$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&4\\4&5\end{pmatrix}$이므로

$AB=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\10&13\end{pmatrix}$

따라서 행렬 AB의 (2, 2)성분은 13이다.

<답> 13

25.

출제의도 : 무한수열의 극한을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)b_n}{(n+1)a_n} \times \frac{(n+1)(10n+1)}{n^2+1}$$
$$= \frac{7}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{10+\frac{11}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$
$$= \frac{7}{2}\times 10 = 35$$

<답> 35

26.

출제의도 :곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$f(x) = (x^3+5)(x^2-1)$ 에서 x에 대하여 미분하면

$f'(x) = 3x^2(x^2-1) + 2x(x^3+5)$

따라서 $f'(1) = 2\times 6 = 12$

<답> 12

27.

출제의도 : 이항계수를 구할 수 있는가?

x^3의 계수는 ${}_5C_3\times a^2=10a^2$이고,

x^4의 계수는 ${}_5C_4\times a=5a$이다.

따라서 $10a^2=5a$에서

$a=\frac{1}{2}$ ($\because$ $a>0$)

$\therefore$ $60a=30$

<답> 30

28.

출제의도 : 계차수열을 이용하여 수열의 극한을 구할 수 있는가?

$a_n=12\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ($n=1,2,3,\cdots$)

점 P_n을 지나고 기울기가 a_n인 직선의 방정식은

$y-b_n^2=a_n(x+b_n)$ 즉, $y=a_nx+a_nb_n+b_n^2$

이 직선과 곡선 $y=x^2$의 교점의 x좌표는 방정식

$a_nx+a_nb_n+b_n^2=x^2$ 즉,

$(x+b_n)(x-a_n-b_n)=0$의 실근이다.

$\therefore$ $b_{n+1}=a_n+b_n$ ($\because$ $b_{n+1}\neq -b_n$)

이때, $b_{n+1}-b_n=a_n$이므로 수열 $\{b_n\}$의 계차수열이 $\{a_n\}$이다.

$\therefore$ $b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}a_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}a_k$

$\therefore$ $\lim_{n\to\infty}b_n=1+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}a_k$

$=1+\sum_{k=1}^{\infty}12\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

$=1+\frac{12}{1-\frac{1}{3}}=1+18=19$

<답> 19

29.

출제의도 : 표본평균의 확률을 구할 수 있는가?

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(50,\frac{\sigma^2}{16}\right)$을 따르므로

$P(50\le\overline{X}\le 56)$

$=P\left(\frac{50-50}{\frac{\sigma}{4}}\le\frac{\overline{X}-50}{\frac{\sigma}{4}}\le\frac{56-50}{\frac{\sigma}{4}}\right)$

$=P\left(0\le Z\le\frac{24}{\sigma}\right)$

$=P(0\le Z\le 1.5)$

따라서 $\frac{24}{\sigma}=1.5$이므로

$\sigma=\frac{24}{1.5}=24\times\frac{2}{3}=16$

<답> 16

30.

출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 수열의 일반항을 추론할 수 있는가?

(i) $n=1$일 때

세 점 $(1,2^1)$, $(2,2^2)$, $(3,2^3)$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우이므로

$a_1=2\times(2^3-2^1)=12$

(ii) $n=2$일 때

세 점 $(1,2^1)$, $(2,2^2)$, $(3,2^3)$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우이므로

$a_2=2\times(2^3-2^2)=8$

(iii) $n\ge 3$일 때

세 점 $(n-2,2^{n-2})$, $(n-1,2^{n-1})$, $(n,2^n)$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우이므로

$a_n=2\times(2^n-2^{n-2})=3\times 2^{n-1}$

(i), (ii), (iii)에서

$$\sum_{k=1}^{7} a_k = 12+8+3(2^2+2^3+\cdots+2^6)$$

$$= 20+3\times\frac{2^2(2^5-1)}{2-1} = 20+12\times31 = 392$$

<답> 392

참고

위의 풀이의 (iii)에서

세 점 $(n-1, 2^{n-1})$, $(n, 2^n)$, $(n+1, 2^{n+1})$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우에는 점 $(n-2, 2^{n-2})$도 이 정사각형의 내부에 포함되므로 조건을 만족시키지 않는다.

마찬가지로, 세 점

$(n, 2^n)$, $(n+1, 2^{n+1})$, $(n+2, 2^{n+2})$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우도 조건을 만족시키지 않는다.

수리 영역

“나”형 정답

1	①	2	②	3	④	4	④	5	②
6	⑤	7	③	8	⑤	9	①	10	③
11	④	12	⑤	13	③	14	④	15	⑤
16	③	17	①	18	④	19	④	20	①
21	②	22	20	23	10	24	36	25	16
26	200	27	35	28	18	29	171	30	15

해설

1. [출제의도] 로그 계산하기
$a^b = (\sqrt{3})^{\log_4 16} = (\sqrt{3})^2 = 3$

2. [출제의도] 역행렬 계산하기
$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$이므로 $A + A^{-1} = E$
따라서 모든 성분의 합은 2

3. [출제의도] 미분계수 계산하기
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1)$
$f'(x) = 2x + 2$
따라서 $f'(1) = 4$

4. [출제의도] 행렬과 그래프 이해하기
$a = b = c = e = f = 1,\ d = 0$이므로
변의 개수는 8

5. [출제의도] 행렬을 이용하여 수학외적문제 해결하기
$\begin{cases} 20x + 15y = 600 \\ 25x + 20y = 770 \end{cases}$ 이므로 $5\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 770 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 600 \\ 770 \end{pmatrix}$
$\alpha = -3, \beta = -5$
따라서 $\alpha\beta = 15$

6. [출제의도] 지수·로그 함수의 그래프 이해하기
$\mathrm{A}(2,1),\ \mathrm{B}(4,2),\ \mathrm{C}(2,4),\ \mathrm{D}(1,2)$이므로
사각형 ABCD의 넓이는 $\dfrac{9}{2}$

7. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수의 성질 추론하기
$\log x = [\log x] + \dfrac{1}{k} = (\text{정수}) + \dfrac{1}{k}$
$k = 1$일 때, $A_1 = \phi$
$k \neq 1$일 때,
$$A_k = \left\{10^{\frac{1}{k}}, 10^{1+\frac{1}{k}}, 10^{2+\frac{1}{k}}, 10^{3+\frac{1}{k}}, 10^{4+\frac{1}{k}}\right\}$$
ㄱ. $A_2 = \left\{10^{\frac{1}{2}},\ 10^{\frac{3}{2}},\ 10^{\frac{5}{2}}, 10^{\frac{7}{2}}, 10^{\frac{9}{2}}\right\}$ 이므로
$\sqrt{10} \in A_2$ (참)
ㄴ. 2이상의 자연수 k에 대하여
$n(A_k) = 5$ (참)
ㄷ. 서로 다른 자연수 m, n에 대하여 $A_m \cap A_n = \phi$
(거짓)

8. [출제의도] 지수함수의 성질 이해하기
$3^x = t(t > 0)$라 하면
$y = \dfrac{t^2 + t + 9}{t} = t + 1 + \dfrac{9}{t}$이고, $t + \dfrac{9}{t} \geq 6$
따라서 최솟값은 7

9. [출제의도] 로그를 이용하여 수학외적문제 해결하기
전력소비량의 증가율을 r이라 하면
$(1+r)^3 A = 1.23A$
$\log(1+r) = 0.03$
$\log(1+r)^8 = 8\log(1+r) = 0.24$
$= \log 1.23 + \log 1.40 = \log 1.722$
따라서 1.72배

10. [출제의도] 도함수의 그래프를 이용하여 함수의 그래프 추론하기
$f'(x) = a(x-2)^2\ (a < 0)$이므로

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘		↘

ㄱ. $f'(0) < 0$이므로 $x = 0$에서 감소상태 (참)
ㄴ. 극댓값은 존재하지 않는다. (거짓)
ㄷ. 모든 실수에 대하여 함수 $f(x)$는 감소함수이므로 $y = f(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서 만난다. (참)

11. [출제의도] 등차·등비수열의 합 계산하기
$d(\mathrm{A}, \mathrm{P}_n) = |1 - n| + |0 - 2^n|$이다.
$\sum\limits_{n=1}^{10} d(\mathrm{A}, \mathrm{P}_n) = \sum\limits_{n=1}^{10}(-1 + n + 2^n) = 2^{11} + 43$

12. [출제의도] 무한급수의 성질 이해하기
$a_n = 2^n - 1$ 이므로
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\log_2 2^n \log_2 2^{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$

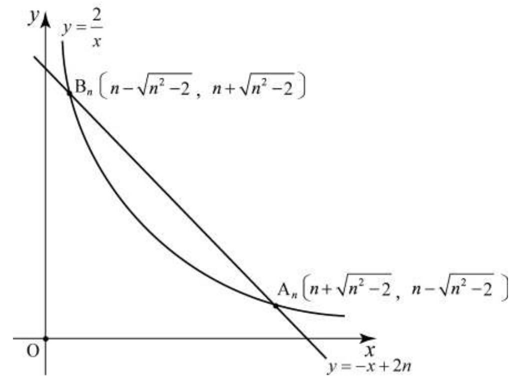
13. [출제의도] 로그부등식을 활용하여 수학외적문제 해결하기
$C_1 = \dfrac{k}{\log 2},\ C_2 = \dfrac{k}{\log n}$
$\dfrac{\log n}{\log 2} > \dfrac{1}{\log 2}$ 이므로 $n > 10$
따라서 자연수 n의 최솟값은 11

14. [출제의도] 함수의 극한 이해하기
$x \neq 0$ 이고 $-1 < x < 1$ 일 때,
$0 < 1 - x^2 < 1$ 이므로
$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^4 + x^2)(1 - x^2)^n$
$= \dfrac{x^4 + x^2}{1 - (1 - x^2)} = x^2 + 1$
$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (|x| < 1,\ x \neq 0) \\ 0 & (|x| \geq 1,\ x = 0) \end{cases}$
따라서 $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+0}(x^2 + 1) = 2$

15. [출제의도] 행렬을 이용하여 도형의 넓이 추론하기
ㄱ. $S(A) = \dfrac{3}{2}$ (참)
ㄴ. $S(A) = \dfrac{1}{2}(c-b)(d-a)$
$S(kA) = \dfrac{1}{2}(kc - kb)(kd - ka) = k^2 S(A)$ (참)
ㄷ. 행렬 $A + mB$에 의해 정해지는 네 점은 행렬 A에 의해 정해지는 네 점을 x축, y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 점이므로 사각형의 넓이는 같다. (참)

16. [출제의도] 무한등비급수를 활용하여 수학내적문제 해결하기
$\angle \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{AP}_n = \theta_n$이라 하면 $l_n = \theta_n$이고
(나)에 의하여 $\theta_n = \theta_1 r^{n-1}$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \theta_n = \dfrac{\theta_1}{1-r} = \dfrac{8}{15}\pi \cdots ①$
(다)에 의하여 $\theta_1(1+r) = \dfrac{\pi}{2} \cdots ②$
따라서 ①, ②에 의하여 $r = \dfrac{1}{4}$

17. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 수학내적문제 해결하기



두 점 사이의 거리 $l_n = \sqrt{8n^2 - 16}$
따라서 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{l_n}{n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{8n^2 - 16}}{n} = 2\sqrt{2}$

18. [출제의도] 로그의 성질 이해하기
$\log_k 3^6$의 값이 정수이므로
$k = 3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^6$이다.
따라서 $3 \times 3^2 \times 3^3 \times 3^6 = 3^{12}$

19. [출제의도] 수학적귀납법을 이용하여 증명 과정 추론하기
(ⅰ) $n = 1$일 때,
(좌변) $= a_1 = \dfrac{1}{2(2+4)} = \boxed{\dfrac{1}{12}}$
(우변) $= \dfrac{1}{(1+1)^2} - T_1 = \boxed{\dfrac{1}{12}}$
이므로 (★)이 성립한다.
(ⅱ) $n = m$ 일 때, (★)이 성립한다고 가정하면
$\sum\limits_{k=1}^{m} a_k = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{(k+1)^2} - T_m$
이다. $n = m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.
$\sum\limits_{k=1}^{m+1} a_k = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{(k+1)^2} - T_m + a_{m+1}$
$= \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{(k+1)^2} - T_m + \boxed{\dfrac{1}{m+2}}(T_{m+1} - T_m)$
$= \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1} + \dfrac{m+3}{m+2}(T_{m+1} - T_m)$
$= \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1} + \dfrac{1}{(m+2)^2}$
$= \sum\limits_{k=1}^{m+1} \dfrac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1}$
그러므로 $n = m+1$일 때도 (★)이 성립한다.
따라서 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.
$\alpha = \dfrac{1}{12},\ f(2) = \dfrac{1}{4}$. 따라서 $\dfrac{\alpha}{f(2)} = \dfrac{1}{3}$

20. [출제의도] 함수의 극대·극소 이해하기
$h(x) = g(x) - f(x) = (x+2)^2(x-1)^2$
$h'(x) = 2(x+2)(x-1)(2x+1)$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘		↗		↘		↗

따라서 $h\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{81}{16}$

21. [출제의도] 무한등비급수를 활용하여 수학내적문제 해결하기

원 A_n의 반지름의 길이를 a_n, 원 O_n의 반지름의 길이를 r_n라 하면

$r_1=3$, $a_n=\frac{\sqrt{3}}{2}r_{n+1}$, $r_n-r_{n+1}=a_n$ 이므로

$r_n-r_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}r_{n+1}$, $r_{n+1}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=r_n$

$r_{n+1}=\frac{2}{2+\sqrt{3}}r_n$, $r_{n+1}=2(2-\sqrt{3})r_n$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{6\pi}{1-(4-2\sqrt{3})}=(6+4\sqrt{3})\pi$

22. [출제의도] 함수의 연속성 이해하기

$x=1$에서 함수의 극한값과 함숫값이 같으므로

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{ax}-b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{ax}-\sqrt{a}}{x-1}=\frac{\sqrt{a}}{2}=2$

$\therefore a=16,\ b=4$

따라서 $a+b=20$

23. [출제의도] 정적분의 정의 이해하기

$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3\frac{2}{n}=\frac{1}{2}\int_1^3 x^3\,dx=10$

24. [출제의도] 도함수의 성질을 활용하여 수학내적문제 해결하기

t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이를 x_t, 그에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_t라 하면,

$r_t=\frac{\sqrt{3}}{6}x_t$, $x_t=12\sqrt{3}+3\sqrt{3}\,t$이므로

$r_t=\frac{12+3t}{2}$

t초 후 정삼각형에 내접하는 원의 넓이는

$S(t)=\pi\left(\frac{12+3t}{2}\right)^2$이므로

$x_t=24\sqrt{3}$일 때, $t=4$

$S'(4)=2\pi\left(\frac{12+3\times4}{2}\right)\times\frac{3}{2}=36\pi$이다.

따라서 $a=36$

25. [출제의도] 도함수 이해하기

$f(x)$가 n차 함수이면

$f'(x)$는 $(n-1)$차 함수이다. $\therefore n=2$

$f(x)=x^2+ax+b,\ f'(x)=2x+a$

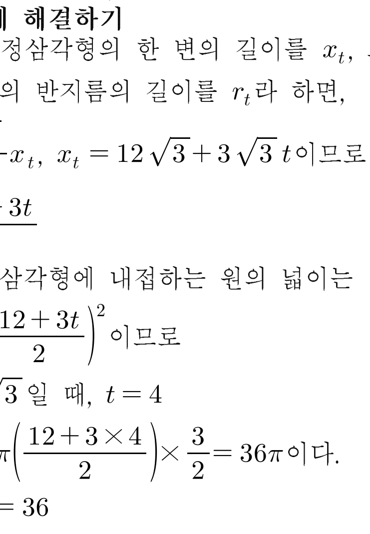
$f(x)f'(x)=(x^2+ax+b)(2x+a)$

$3a=-9,\ ab=6$ 이므로 $a=-3, b=-2$

따라서 $f(-3)=9-3a+b=16$

26. [출제의도] 정적분을 활용하여 수학내적문제 해결하기

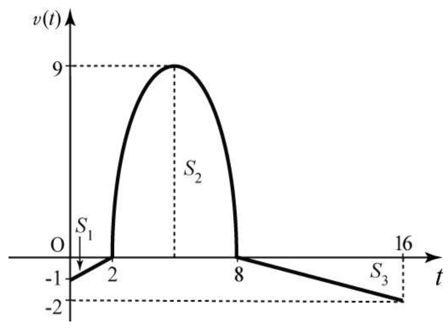
A와 C의 넓이가 같으므로 $S_1=S_2$



$\int_0^2(x^3-x^2-ax)\,dx=0\ \ \therefore a=\frac{2}{3}$

따라서 $300a=200$

27. [출제의도] 정적분을 활용하여 수학내적문제 해결하기



$S_1=\int_0^2 v(t)\,dt,\ S_2=\int_2^8 v(t)\,dt,\ S_3=\int_8^{16}v(t)\,dt$

라 할 때,

$S_1=-1,\ S_2=36,\ S_3=-8$

따라서 $(\overline{\mathrm{OP}}$의 최댓값$)=S_1+S_2=35$

28. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 수학내적문제 해결하기

삼각형 $\mathrm{AB}_n\mathrm{C}_n$은 한 변의 길이가 n인 정삼각형이므로 $a_n=\frac{\sqrt{3}}{2}n\times\frac{1}{3}+1$

$a_n>6$, $n>\sqrt{300}$

따라서 n의 최솟값은 18

29. [출제의도] 계차수열 이해하기

등차수열 $\{a_k\}$의 공차를 d라 하면

$3a_1+3d=3,\ 5a_1+19d=33$

$a_1=-1,\ d=2$이다.

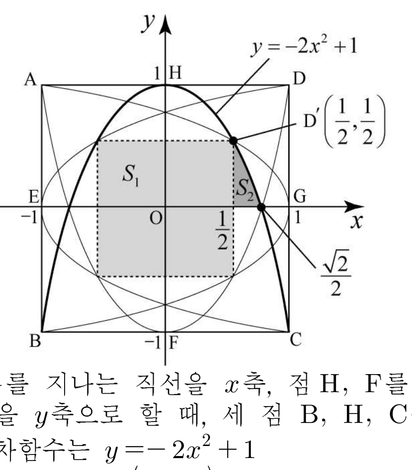
어두운 영역에 배열된 수열 $a_3,\ a_7,\ a_{15},\ \cdots$을

$\{a_{b_k}\}$라 하면 $b_k=3+\sum_{l=1}^{k-1}4l=2k^2-2k+3$이고

정십오각형에서 어두운 부분에 대응되는 항은 $k=7$ 일 때이고 $b_7=87$이다.

따라서 $a_{87}=171$

30. [출제의도] 정적분을 이용하여 수학외적문제 해결하기



점 E, G를 지나는 직선을 x축, 점 H, F를 지나는 직선을 y축으로 할 때, 세 점 B, H, C를 지나는 이차함수는 $y=-2x^2+1$

교점 D$'$의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$이므로

어두운 부분의 넓이는

$S_1+8S_2=1+8\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(-2x^2+1)dx=\frac{8\sqrt{2}-7}{3}$

$p=8,\ q=-7$

따라서 $p-q=15$

EBS

2012학년도 대수능 6월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

1.

출제의도 : 지수의 확장을 계산할 수 있는가?

$4\times 8^{\frac{1}{3}}=4\times(2^3)^{\frac{1}{3}}=4\times 2=8$

<답> ③

2.

출제의도 : 행렬의 실수배와 덧셈을 계산할 수 있는가?

$2A+B=2\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\3&-1\end{pmatrix}$ 이므로

행렬 $2A+B$ 의 모든 성분의 합은

$4+4+3-1=10$

<답> ⑤

3.

출제의도 : 함수의 극한을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n}{n}}{\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{3}{2}$$

<답> ③

4.

출제의도 : 그래프와 행렬의 관계를 이해하고 있는가?

주어진 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는 행렬의 모든 성분의 합과 같다.

이 때 행렬의 모든 성분의 합은 그래프의 변의 개수의 2배이므로 $5\times 2=10$ 이다.

<답> ②

5.

출제의도 : 함수의 극한을 구할 수 있는가?

$f(x)=x^2+ax$ 이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x+a)$$

$$=a$$

$\therefore a=4$

<답> ①

6.

출제의도 : 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a라고 하면

$a_2=a+6,\ a_3=a+12$

이므로

$|a_2-3|=|a_3-3|$ 에서

$|a+3|=|a+9|$

따라서 $a+3=-(a+9)$ 이므로

$2a=-12,\ a=-6$

$\therefore a_5=a+4\times 6=-6+24=18$

<답> ②

7.
출제의도 : 그래프로부터 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

주어진 그래프에서

$\lim_{x \to -1-0} f(x) + \lim_{x \to 1+0} f(x) = 1 + 1 = 2$

<답> ⑤

8.
출제의도 : 등비수열의 일반항을 알고 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3 = ar^2 = \sqrt{5}$ 이므로

$$\begin{aligned} a_1 \times a_2 \times a_4 \times a_5 &= a \times ar \times ar^3 \times ar^4 \\ &= a^4 r^8 = (ar^2)^4 \\ &= (\sqrt{5})^4 = 25 \end{aligned}$$

<답> ④

9.
출제의도 : 역행렬의 뜻을 알고 계산할 수 있는가?

ㄱ. $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$이므로

$A - B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$

$(A - B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -ab & 0 \\ 0 & -ab \end{pmatrix} = -abE$ (거짓)

ㄴ. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$2E - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A^{-1} = 2E - A$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $A^{-1} = 2E - A$이므로

$A + A^{-1} = 2E$

또 $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix}$ 이므로

$B + B^{-1} = 2E$

$\therefore A + A^{-1} = B + B^{-1}$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

<답> ⑤

10.
출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구할 수 있는가?

$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} a_k$, $a_1 = 1$ 이므로

$a_2 = 2^{1-1} a_1 = 1$

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \sum_{k=1}^{n+1} 2^{n+1-k} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} 2^{n+1-k} a_k + a_{n+1} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} a_k + a_{n+1} \\ &= 2a_{n+1} + a_{n+1} = 3a_{n+1} \end{aligned}$$

∴ (가)=1, (나)=2, (다)=3

$\therefore p + q + r = 1 + 2 + 3 = 6$

<답> ④

11.
함수의 극한과 미분계수의 관계를 이해하고 있는가?

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 1} = 3$ 에서

$x \to 1$일 때 (분모)$\to 0$ 이므로

$x \to 1$일 때 (분자)$\to 0$ 이어야 한다.

따라서 $f(1) - 2 = 0$, $f(1) = 2$ 이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)=3$$

$$\therefore\ \frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{6}{2}=3$$

<답> ①

12.
출제의도 : 상용로그를 이용하여 지수부등식을 풀 수 있는가?

$c_n=1.004\times c_{n-1},\ c_0=\frac{1}{99}$

에서 $\{c_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{99}\times1.004$이고 공비가 1.004인 등비수열이므로

$c_n=\frac{1}{99}(1.004)^n$ 이다.

따라서

$c_n=\frac{1}{99}(1.004)^n\geq\frac{1}{9}$ 에서

$(1.004)^n\geq11$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log1.004\geq\log11$

$n\geq\frac{\log11}{\log1.004}=\frac{1.0414}{0.0017}=612.5\cdots$

따라서 자연수 n의 최솟값은 613이다.

<답> ②

13.
출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 로그함수를 구할 수 있는가?

$y=\log_2(ax+b)$가 두 점 $(-1,0)$과 $(0,2)$를 지나므로

$\log_2(-a+b)=0,\quad -a+b=2^0=1$

$\log_2b=2,\quad b=2^2=4$

따라서 $a=3$ 이므로 $a+b=3+4=7$

<답> ②

14.
출제의도 : 무한등비급수를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

중심의 좌표가 (a_n, b_n)인 원의 반지름의 길이를 r_n 이라고 하고

중심의 좌표가 (a_{n+1}, b_{n+1})인 원의 반지름의 길이를 r_{n+1} 이라고 하면 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$r_{n+1}=\frac{1}{2}r_n$

따라서

$S_n=2\times\left(\frac{\pi r_n^2}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times r_n^2\right)=\frac{r_n^2}{2}(\pi-1)$

이고

$$S_{n+1}=\frac{r_{n+1}^2}{2}(\pi-1)=\frac{1}{4}\times\frac{r_n^2}{2}(\pi-1)$$
$$=\frac{1}{4}S_n$$

이므로

$\{S_n\}$ 은 공비가 $\frac{1}{4}$이고 첫째항이 $\frac{\pi-1}{2}$인 등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi-1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2(\pi-1)}{3}$$

<답> ③

15.
출제의도 : 미분을 이용하여 삼차함수가 항상 증가할 조건을 구할 수 있는가?
$f(x)=x^3+ax^2+2ax$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하기 위해서는 $f'(x) \geq 0$ 이어야한다.
즉 $f'(x)=3x^2+2ax+2a \geq 0$
에서 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=a^2-6a \leq 0$
이므로 $0 \leq a \leq 6$ 이다.
따라서 실수 a의 최댓값 $M=6$
최솟값 $m=0$ 이므로
$M-m=6$

<답> ④

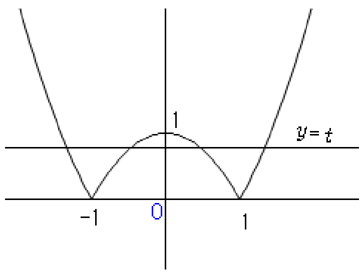
16.
출제의도 : 로그부등식을 풀 수 있는가?
진수 조건에서
$x \neq 0$ … ㉠
$\log_2 x^2 - \log_2|x| = \log_2|x|^2 - \log_2|x|$
$= 2\log_2|x| - \log_2|x|$
$= \log_2|x|$
이고, $3=\log_2 8$이므로 주어진 부등식은
$\log_2|x| \leq \log_2 8$, $|x| \leq 8$
$-8 \leq x \leq 8$ … ㉡
㉠, ㉡에서 구하는 정수 x는
±1, ±2, ±3, …, ±8
의 16개다.

<답> ⑤

17.
출제의도 : 점의 좌표의 규칙성을 발견할 수 있는가?
자연수 n에 대하여
좌표가 $(n,\ 2-n)$인 점은 A_{2n-1}이므로
좌표가 $(9,-7)$인 점은 $A_{2\times9-1}$ 즉, A_{17}이다.
또, 좌표가 $(n+2,\ 3-n)$인 점은 A_{2n}이므로
좌표가 $(7,-2)$인 점은 $A_{2\times5}$ 즉, A_{10}이다.
$\therefore\ k=10,\ l=17$
$\therefore\ k+l=27$

<답> ①

18.
출제의도 : 그래프를 이용하여 함수의 좌극한을 구할 수 있는가?
그림과 같이 $t \to 1-0$일 때 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 직선 $y=t$는 서로 다른 네 점에서 만난다.



$\therefore\ \lim_{t\to1-0} f(t)=4$

<답> ④

19.
출제의도 : 미분을 이용하여 함수의 그래프를

추론할 수 있는가?

ㄱ. $0<x<2$일 때 $f'(x)<g'(x)$이므로

$h'(x)=f'(x)-g'(x)<0$이다.

따라서 $0<x<2$에서 $h(x)$는 감소한다. (참)

ㄴ. $x>2$일 때 $f'(x)>g'(x)$이므로

$h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$이다.

따라서 $x>2$에서 $h(x)$는 증가한다.

따라서 $x=2$에서 감소상태에서 증가상태로 바뀌므로 $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄷ. $x<0$일 때 $f'(x)>g'(x)$이므로

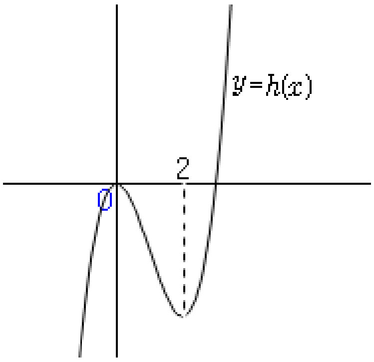
$h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$이다.

따라서 $x<0$에서 $h(x)$는 증가한다.

따라서 $x=0$에서 증가상태에서 감소상태로 바뀌므로 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

이때, $h(0)=f(0)-g(0)=0$이므로

함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

<답> ③

20.

출제의도 : 무한등비수열의 극한을 구할 수 있는가?

$S_n=\frac{1}{2}\times1\times(3^n-2^n)=\frac{3^n-2^n}{2}$이므로

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(3^k-2^k)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^n-1)}{3-1}-\frac{2(2^n-1)}{2-1}\right\}$$

$$=\frac{3^{n+1}-3}{4}-\frac{2^{n+1}-2}{2}$$

$$=\frac{3^{n+1}-2^{n+2}+1}{4}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^{n+2}+1}{4\times3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-4\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3^n}}{4}$$

$$=\frac{3-0-0}{4}=\frac{3}{4}$$

<답> ③

21.

출제의도 : 미분을 이용하여 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

정사각형 $EFGH$의 두 대각선의 교점의 좌표를 $(x,\ x^2)$이라 하자.

곡선 $y=x^2$과 정사각형 ABCD는 y축에 대하여 각각 대칭이므로 $0<x<1$인 경우만 생각해도 일반성을 잃지 않는다.

이때, 점 C의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$이므로 구하는 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\left\{\frac{1}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}\times\left\{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right\}$

$\quad =(1-x)x^2=x^2-x^3$

이다.

$\therefore\ S'(x)=-3x^2+2x=x(-3x+2)$

이때, $S'(x)=0$에서

$x=\frac{2}{3}$ $(\because\ 0<x<1)$

따라서 함수 $S(x)$는 $x=\frac{2}{3}$에서 극대이자 최대이므로 구하는 넓이의 최댓값은

$S\left(\frac{2}{3}\right)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}$

<답> ①

22.

출제의도 : 연속인 함수의 극한을 구할 수 있는가?

$x\to1$일 때, (분자)$\to2$이므로 (분모)$\to18$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^2+ax+1)=1^2+a\cdot1+1=18$에서

$a=16$

<답> 16

23.

출제의도 : 등차수열의 공차를 구하여 합을 구할 수 있는가?

주어진 등차수열의 공차를 d라 하면

$a_4-a_2=2d=4$에서 $d=2$이다.

$\therefore\ a_n=2+(n-1)2=2n$

$\therefore\ \sum_{k=11}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}2k-\sum_{k=1}^{10}2k$

$=20\cdot21-10\cdot11=420-110=310$

<답> 310

24.

출제의도 : 다항함수의 함숫값과 미분계수를 구할 수 있는가?

$f(2)=2^2+3\cdot2=10$이다.

또, $f'(x)=2x+3$이므로 $f'(2)=2\cdot2+3=7$이다.

$\therefore\ f(2)+f'(2)=10+7=17$

<답> 17

25.

출제의도 : 분수식으로 된 수열의 합을 구할 수 있는가?

$\sum_{k=1}^{14}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{14}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{15}\right)$

$=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$

$\therefore\ p+q=15+14=29$

<답> 29

26.

출제의도 : 역행렬의 성질을 이용할 수 있는가?

$\begin{pmatrix}2&-1\\1&a\end{pmatrix}A^{-1}=-E$이므로

$\begin{pmatrix}2&-1\\1&a\end{pmatrix}A^{-1}A=-EA$에서

$\begin{pmatrix}2&-1\\1&a\end{pmatrix}E=-A$

$\therefore\ A=-\begin{pmatrix}2&-1\\1&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\-1&-a\end{pmatrix}$

따라서 $A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\3\end{pmatrix}$ 즉, $\begin{pmatrix}-2&1\\-1&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\3\end{pmatrix}$에서

$-6+2=b$이고 $-3-2a=3$이다.

∴ $a=-3$, $b=-4$

∴ $ab=12$

<답> 12

27.

출제의도 : 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

$y'=3x^2-2x$이므로 $x=1$에서의 접선의 기울기는 $3-2=1$이다.

따라서 점 $(1, a)$에서의 접선의 방정식은

$y-a=1(x-1)$ 즉 $y=x+a-1$이다.

이 직선이 점 $(0, 12)$를 지나므로

$12=0+a-1$

∴ $a=13$

<답> 13

28.

출제의도 : 직선의 교점을 구하고 무한등비수열의 극한을 구할 수 있는가?

두 일차방정식 $2x+y=4^n$, $x-2y=2^n$을 연립하여 풀면

$$x=\frac{2\cdot 4^n+2^n}{5},\quad y=\frac{4^n-2^{n+1}}{5}$$

이때, 두 직선의 교점의 좌표가 (a_n, b_n)이므로

$$a_n=\frac{2\cdot 4^n+2^n}{5},\quad b_n=\frac{4^n-2^{n+1}}{5}$$

$$\therefore\ p=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-2^{n+1}}{2\cdot 4^n+2^n}=\frac{1}{2}$$

∴ $60p=30$

<답> 30

29.

출제의도 : 행렬로 나타내어진 연립방정식이 부정일 조건을 구할 수 있는가?

주어진 집합이 무한집합이려면

$$\frac{k+3}{-1}=\frac{5}{k-3}=\frac{10}{-2}$$

이어야 하므로 $k=2$이다.

이때, 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} 5x+5y=10 \\ -x-y=-2 \end{cases}$$

이므로 주어진 집합은 직선 $x+y=2$ 즉, $x+y-2=0$ 위의 모든 점들의 집합이다.

∴ $a=1$, $b=1$

∴ $10a+b=11$

<답> 11

30.

출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 집합의 원소의 개수를 구할 수 있는가?

주어진 집합을 A_n이라 하자.

$\log_2 n-\log_2 k=\log_2\frac{n}{k}$이므로 $k\in A_n$이려면

$\log_2\frac{n}{k}=m$ (m은 정수) 즉, $\frac{n}{k}=2^m$이어야 한다.

(i) $1\le n\le 50$일 때,

$k=n$이면 $\frac{n}{k}=1=2^0$이므로 $n\in A_n$이다.

$k=2n$이면 $\frac{n}{k}=\frac{1}{2}=2^{-1}$이므로 $2n\in A_n$이다.

따라서 집합 A_n의 원소의 개수는 2 이상이다.

(ii) n이 짝수일 때,

$k=n$이면 $\frac{n}{k}=1=2^0$이므로 $n\in A_n$이다.

$k=\frac{n}{2}$이면 $\frac{n}{k}=2=2^1$이므로 $\frac{n}{2}\in A_n$이다.
따라서 집합 A_n의 원소의 개수는 2 이상이다.
(iii) n이 50보다 큰 홀수일 때,
$\frac{n}{k}=2^m$ 즉, $k=\frac{n}{2^m}$ (m은 정수)을 만족시키는 정수 m은 0뿐이다.
따라서 집합 A_n의 원소의 개수는 1이다.
(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수 n은
$51,\ 53,\ 55,\ \cdots, 99$의 25개다.

〈답〉 25

2교시 정답 및 해설

• 2교시 수리 영역 •

[가 형]

1	③	**2**	②	**3**	①	**4**	④	**5**	①
6	⑤	**7**	③	**8**	③	**9**	④	**10**	④
11	①	**12**	③	**13**	②	**14**	⑤	**15**	⑤
16	④	**17**	①	**18**	②	**19**	⑤	**20**	②
21	③	**22**	3	**23**	10	**24**	32	**25**	16
26	2	**27**	120	**28**	24	**29**	170	**30**	9

1. [출제의도] 행렬의 덧셈과 곱셈 계산하기

$AB+B=\begin{pmatrix}1&1\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&1\\-2&-1\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 6

2. [출제의도] 지수와 로그의 성질을 알고 계산하기

$\log_4(2^{\frac{7}{2}}\times 2^{\frac{1}{2}})=\log_4 2^4=\log_4 4^2=2$

3. [출제의도] 함수의 극한의 뜻을 이해하기

$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

4. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이해하기

$y=\frac{\pi}{3}-x$이므로

(준식) $=\sqrt{3}\cos x+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

$=2\sqrt{3}\cos x-\sin x$

$=\sqrt{13}\sin(\alpha-x)$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{2\sqrt{39}}{13},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{13}}{13}\right)$

따라서 최댓값은 $\sqrt{13}$

5. [출제의도] 무리방정식의 해 구하기

$\sqrt{x^2+x-1}=t$라 하면

$2x^2+2x-1+\sqrt{x^2+x-1}=2$에서

$2t^2+1+t=2$이므로 $(2t-1)(t+1)=0$

그러므로 $t=\frac{1}{2}\ (\because t\ge 0)$

$\therefore\ \sqrt{x^2+x-1}=\frac{1}{2}$에서 $x^2+x-\frac{5}{4}=0$

따라서 모든 실근의 곱은 $-\frac{5}{4}$

6. [출제의도] 여러 가지 수열의 일반항 구하기

$a_{n+1}-a_n=n+1$이므로

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$

$=1+\frac{(n-1)(n+2)}{2}$

따라서 $a_{15}=1+\frac{14\times 17}{2}=120$

7. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계 이해하기

$a_n=S_n-S_{n-1}=2n+2\ (n\ge 2)$

$S_1=5$이므로 $a_1=5$

따라서 $a_1+a_6=5+2\times 6+2=19$

8. [출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기

함수 $f(x)$의 정의역은 $x<5$이다.

$f'(x)=\frac{-2}{5-x}+\frac{x}{2}=0$에서 $x=1$ 또는 $x=4$,

$f''(x)=\frac{-2}{(x-5)^2}+\frac{1}{2}=0$에서

$x=3\ (\because\ x<5)$이므로 함수 $f'(x)$, $f''(x)$, $f(x)$를 표로 나타내면 다음과 같다.

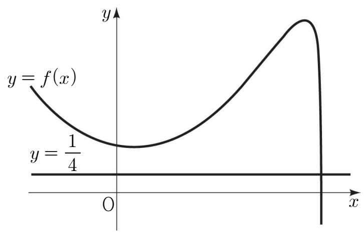
x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$f(4)$	$\searrow$	

$\left(\text{단, } f(1)=\frac{1}{4}+4\ln 2,\ f(3)=\frac{9}{4}+2\ln 2,\ f(4)=4\right)$

ㄱ. (참)

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 1이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}$은 다음과 같으므로 방정식 $f(x)=\frac{1}{4}$의 실근의 개수는 1이다. (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

9. [출제의도] 그래프와 행렬의 관계를 이해하기

주어진 그래프를 행렬로 나타내면

$$\begin{array}{c}\\ A\\ B\\ C\\ D\\ E\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}A&B&C&D&E\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&0&1&1&0\\0&0&1&0&1\\1&1&0&1&1\\1&0&1&0&0\\0&1&1&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

이므로 $p=1$, $q=0$이고 꼭짓점 C에서 다른 한 꼭짓점을 지나 다시 꼭짓점 C로 돌아오는 방법은 CAC, CBC, CDC, CEC이므로 $r=4$이다.

따라서 $p+q+r=5$

10. [출제의도] 연립일차방정식과 행렬의 관계를 이해하기

연립일차방정식 $\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&1\\1&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}1-k&1\\1&3-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ …… ㉠

㉠이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지므로

$(1-k)(3-k)-1=0$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 4

11. [출제의도] 행렬의 뜻을 알고 추론하기

ㄱ. $A=2B+E$이므로

$AB=(2B+E)B=2B^2+B$

$=B(2B+E)=BA$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ (거짓)

ㄷ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ

12. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\overline{P_0P_1}=\overline{P_1P_2}=\cdots=\overline{P_{n-1}P_n}=2\sin\frac{\pi}{2n}$

이므로 각 정삼각형의 넓이는 $\sqrt{3}\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$이다.

따라서

$\lim_{n\to\infty}n\cdot S(n)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{3}\,n^2\times\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\pi^2$

13. [출제의도] 무한수열의 극한 이해하기

$f(n)=\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^2+2n}=\frac{2n^2+3n+1}{6n+12}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{6n^2+12n}=\frac{1}{3}$

14. [출제의도] 정적분을 뜻을 알고 추론하기

ㄱ. 구간 $(0,\ 1)$에서 $\frac{d\{f(x)\}^2}{dx}=2f(x)f'(x)$

$\frac{d^2\{f(x)\}^2}{dx^2}=2\{f'(x)\}^2+2f(x)f''(x)$이므로

$\frac{d^2\{f(x)\}^2}{dx^2}>0$

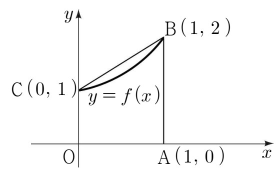
$\therefore$ 함수 $y=\{f(x)\}^2$의 그래프는 구간 $(0,\ 1)$에서 아래로 볼록하다. (참)

ㄴ. $1-x=t$라 하면

$\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 f(t)dt$이므로

$\int_0^1\{f(x)+f(1-x)\}dx=2\int_0^1 f(x)dx$

조건에 의해 구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같고



$\int_0^1 f(x)dx$의 값은 사다리꼴 COAB의 넓이보다 작다.

$\therefore\ \int_0^1\{f(x)+f(1-x)\}dx<3$ (참)

ㄷ. ㄱ과 ㄴ에 의해

$\frac{\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}^2+\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2}{2}\cdot\frac{1}{n}\ge\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\{f(x)\}^2dx$

이므로

$\sum_{k=1}^{n}\frac{\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}^2+\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2}{2}\cdot\frac{1}{n}\ge\int_0^1\{f(x)\}^2dx$

(참) 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. [출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 문제해결하기

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2\sin 2x}{1-\cos x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x\cos x(1+\cos x)}{\sin^2 x}$

$=\lim_{x\to 0}2\cos x(1+\cos x)\frac{x}{\sin x}=4$

16. [출제의도] 지수방정식을 활용한 실생활문제 해결하기

점 A의 x좌표를 k라 하면 점 B의 x좌표는 $k+2$, 점 C의 x좌표는 $k+4$이다.

$a^k+2=\frac{12}{5}$에서 $a^k=\frac{2}{5}$ ⋯⋯ ㉠

$a^{k+2}+2=\frac{9}{2}$에서 $a^{k+2}=\frac{5}{2}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의해 $a^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$이므로 $a=\frac{5}{2}$

$h=a^{k+4}+2=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{2}\right)^4+2=\frac{141}{8}$

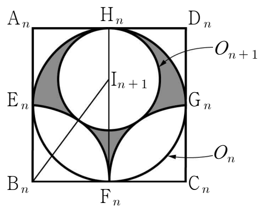
따라서 $h=\frac{141}{8}$

17. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 알고 추론하기

$f(n)=\frac{n+1}{n}$, $g(n)=5n$ 이므로

$f(5)\times g(10)=60$

18. [출제의도] 무한등비급수의 합 구하기



원 O_{n+1}의 중심을 I_{n+1}이라 하고 반지름의 길이를 r_{n+1}이라 하면 직각삼각형 $\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n$에서 피타고라스의 정리에 의해

$(r_n+r_{n+1})^2=(2r_n-r_{n+1})^2+r_n^2$

$2r_nr_{n+1}=4r_n^2-4r_nr_{n+1}$

$\frac{r_{n+1}}{r_n}=\frac{2}{3}$이므로 $\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{4}{9}$

$\frac{r_2}{r_1}=\frac{2}{3}$이므로 $S_1=4-\left(2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\pi\right)=2-\frac{4}{9}\pi$

$\therefore$ $\{S_n\}$은 첫째항이 $2-\frac{4}{9}\pi$, 공비가 $\frac{4}{9}$인 무한등비수열이다.

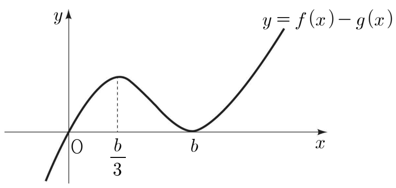
따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{2-\frac{4}{9}\pi}{1-\frac{4}{9}}=\frac{18-4\pi}{5}$

19. [출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기

ㄱ. $f(x)=px^3+qx^2+rx$ $(p>0)$라 하고 $g(x)=mx\,(m\neq 0)$라 하자.

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f(x)-g(x)$의 변곡점의 x좌표는 $-\frac{q}{3p}$이므로 곡선 $y=f(x)-g(x)$의 변곡점의 x좌표는 a이다. (참)

ㄴ. 그림과 같이 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프는 원점을 지나고 $x=b$에서 x축에 접하므로 $f(x)-g(x)=px(x-b)^2$이다.



$\{f(x)-g(x)\}'=p(x-b)(3x-b)$이므로

함수 $f(x)-g(x)$는 $x=\frac{b}{3}$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄷ. $h(x)=f(x)-g(x)=px(x-b)^2$

이라 하면 ㄱ 에서 $h''(a)=0$이다.

$\therefore$ $a=\frac{2b}{3}$이므로 $\frac{b-a}{a}=\frac{1}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수를 미분하기

$\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=-2\cos\theta\sin\theta$ 이고

$x=1$ 일 때, $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

(접선의 기울기)$=\frac{-2\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}}{\sec^2\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2}$

21. [출제의도] 함수의 연속의 뜻을 알고 추론하기

ㄱ. $\lim_{x\to 1}f(x)g(x)=f(1)g(1)=0$이므로

$x=1$에서 연속이다. (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 0}f(g(x))=0$이고 $f(g(0))=-1$이므로

$x=0$에서 연속이 아니다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to -1}g(f(x))=g(f(-1))=1$이므로

$x=-1$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

22. [출제의도] 삼각방정식의 해 구하기

$\cos x=t\,(-1\le t\le 1)$라 하면

$\cos 2x-2\cos x=2t^2-2t-1$

$2t^2-2t-1=k$가 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위는 $-\frac{3}{2}\le k\le 3$이다.

따라서 k의 최댓값은 3

23. [출제의도] 접선의 방정식 구하기

곡선 $y=2x^2+1$ 위의 점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은 $y=-4x-1$ ⋯⋯ ㉠

직선 ㉠이 곡선 $y=2x^3-ax+3$에 접하므로

접점의 x좌표를 t라 하면

점 $(t,\ 2t^3-at+3)$에서의 접선의 방정식은

$y=(6t^2-a)(x-t)+2t^3-at+3$

$\;\;=(6t^2-a)x-4t^3+3$ ⋯⋯ ㉡

㉡이 ㉠과 같으므로 $t=1$

따라서 $a=10$

24. [출제의도] 연속함수의 뜻 이해하기

$\lim_{x\to 2}(a\sqrt{x+2}+b)=0$이므로 $2a+b=0$

$\lim_{x\to 2}\frac{a\sqrt{x+2}-2a}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{a}{\sqrt{x+2}+2}=2$

따라서 $a=8$, $b=-16$이므로 $2a-b=32$

25. [출제의도] 삼각함수의 배각공식을 이해하여 문제 해결하기

$\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{BAD}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$라 하면

$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=\frac{5}{8}$이므로 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AD}}}=\sin\theta=p\sqrt{3}$

따라서 $\frac{1}{p^2}=16$

26. [출제의도] 여러 가지 함수의 정적분 구하기

$\int_0^1\left(1+2e^{-x}\right)dx-\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}\,dx$

$=\left[x-2e^{-x}\right]_0^1-\left\{\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e-\int_1^e\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx\right\}$

$=2$

27. [출제의도] 여러 가지 수열에 관한 문제해결하기

a_n부터 a_{n+5}까지의 항의 값을 3으로 나눈 나머지를 나열하면 1, 1, 2, 2, 0, 0이므로 S_n부터 S_{n+5}까지의 항의 값을 3으로 나눈 나머지를 나열하면 1, 2, 1, 0, 0, 0이다. (단, $n=6k-5$, k는 자연수)

따라서 $40\times 3=120$

28. [출제의도] 도함수를 활용하여 실생활문제 해결하기

잘라낸 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하고 상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x(6-2x)(12-2x)$ (단, $0<x<3$)

$V'(x)=12(x^2-6x+6)=0$이므로

$x=3-\sqrt{3}$ 에서 최댓값을 갖는다.

따라서 $M=24\sqrt{3}$ 이므로 $\frac{\sqrt{3}}{3}M=24$

29. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이용하여 문제해결하기

i) $1\le n\le 9$일 때, $[f(2)]\le 3$, $[f(3)]>3$ 이므로 $n\ge 3$이면 $[f(n)]>3$

$\therefore$ $[f(n)]\le 3$을 만족시키는 n은 1, 2이므로 n의 개수는 2이다.

ii) $10\le n\le 99$일 때,

$[f(25)]\le 3$, $[f(26)]>3$이므로

$n\ge 26$이면 $[f(n)]>3$

$\therefore$ $[f(n)]\le 3$을 만족시키는

n은 $10, 11, 12, \cdots, 25$이므로 n의 개수는 16이다.

iii) $100\le n\le 999$일 때,

$[f(251)]=3$, $[f(252)]=4$이므로

$n\ge 252$이면 $[f(n)]>3$

$\therefore$ $[f(n)]\le 3$을 만족시키는

n은 $100, 101, 102, \cdots, 251$이므로

n의 개수는 152이다.

따라서 i), ii), iii)에 의하여 $[f(n)]\le 3$을 만족시키는 자연수 n의 개수는 170이다.

30. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

i) $x<1$ 일 때, $\int_0^x(-t+1)\,dt=x$이므로

$-\frac{x^2}{2}+x=x$ $\therefore$ $x=0$

ii) $x\ge 1$ 일 때,

$\int_0^1(-t+1)\,dt+\int_1^x(t-1)\,dt=x$

$\frac{1}{2}+\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)=x$

$x^2-4x+2=0$

$\therefore$ $x=2+\sqrt{2}\,(\because x\ge 1)$

i), ii)에 의해 양수인 실근은 $x=2+\sqrt{2}$ 이므로 $m=2$, $n=1$이다.

따라서 $m^3+n^3=9$

[나 형]

1	③	2	②	3	⑤	4	④	5	②
6	⑤	7	③	8	⑤	9	④	10	④
11	①	12	③	13	②	14	①	15	①
16	④	17	①	18	②	19	④	20	③
21	③	22	2	23	6	24	32	25	7
26	15	27	120	28	23	29	170	30	40

1~2. '가'형과 같음

3. [출제의도] 역행렬의 뜻 이해하기

$AB=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-4 & a \\ -5 & -1+3a\end{pmatrix}$

행렬 AB의 역행렬이 존재하지 않으므로

$(a-4)(-1+3a)+5a=0$

$3a^2-8a+4=0$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 $\frac{8}{3}$

4. [출제의도] 등비수열의 뜻 이해하기

$a+b=4$, $a+b+c=13$에서

$a(1+r)=4$, $a(1+r+r^2)=13$이므로

$\frac{r^2+r+1}{r+1}=\frac{13}{4}$, $4r^2-9r-9=0$

$\therefore\ r=3$ 또는 $r=-\frac{3}{4}$

따라서 모든 항이 양수이므로 $r=3$

5. [출제의도] 행렬의 곱셈 이해하기

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3\end{pmatrix}$, $A^3=-E$(단, E는 단위행렬)

이므로 $A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6=O$

$\therefore\ A+A^2+A^3+\cdots+A^{2010}+A^{2011}=A$

따라서 모든 성분의 합은 7

6~7. '가'형과 같음

8. [출제의도] 지수부등식 해결하기

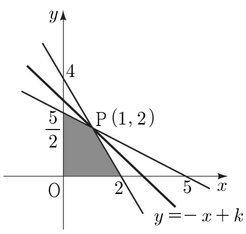
$x\ge 0$, $y\ge 0$ ⋯⋯ ㉠

$2^y\le 4^{2-x}$에서 $y\le -2x+4$ ⋯⋯ ㉡

$\left(\frac{1}{4}\right)^y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2y}\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}$에서

$2y\le -x+5$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 만족시키는 점 (x, y)를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



이때, $x+y=k$라 하면

두 직선 $y=-2x+4$, $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$의 교점 $\mathrm{P}(1, 2)$에서 $x+y$의 값이 최대이다.

따라서 $x+y$의 최댓값은 3

9~11. '가'형과 같음

12. [출제의도] 로그의 성질을 알고 실생활 문제해결하기

$S_1=20\log\frac{aV_0}{V_0}=6.02$,

$S_2=20\log\frac{bV_0}{V_0}=36.02$ 이므로

$S_2-S_1=20\log\frac{b}{a}=30\ \therefore\ \log\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$

따라서 $\frac{b}{a}=10^{\frac{3}{2}}=10\sqrt{10}$

13. '가'형과 같음

14. [출제의도] 무한수열의 극한값 구하기

원점 O에서 직선 $y=x+\frac{1}{n}$에 내린 수선의 발을 H_n이라 하면

(삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 높이)$=\overline{\mathrm{OH}_n}=\frac{\sqrt{2}}{2n}$,

(삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 밑변의 길이)

$=2\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}=2\sqrt{1-\overline{\mathrm{OH}}_n^2}=\frac{\sqrt{4n^2-2}}{n}$

$\therefore A_n=\frac{\sqrt{2n^2-1}}{2n^2}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}n\cdot A_n=\frac{\sqrt{2}}{2}$

15. [출제의도] 지수방정식의 해 구하기

$2^x=t(t>0)$라 하면

$2^x-6+2^{3-x}=t-6+\frac{8}{t}=0$에서

$t=2$ 또는 $t=4$이므로 $\alpha=1$, $\beta=2(\because \alpha<\beta)$

따라서 $\alpha+2\beta=5$

16~18. '가'형과 같음

19. [출제의도] 함수의 극한값 구하기

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+2t}$ 이므로 $S(t)=(t^2+2t)\pi$

원 C 위의 점 P에서의 접선의 방정식이

$tx+\sqrt{2t}\,y=t^2+2t$이므로 $\mathrm{Q}(t+2, 0)$

$\overline{\mathrm{OQ}}=t+2$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2t+4}$ 이므로

$\lim_{t\to+0}\frac{S(t)}{\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{PQ}}}=\lim_{t\to+0}\frac{(t^2+2t)\pi}{(t+2)-\sqrt{2t+4}}=4\pi$

따라서 $\lim_{t\to+0}\frac{S(t)}{\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{PQ}}}=4\pi$

20. [출제의도] 무한급수의 뜻을 알고 추론하기

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산 (참)

ㄴ. (반례) $a_n=\frac{1}{3^n}$, $b_n=2$ (거짓)

ㄷ. $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}a_n$이므로

$a_2=\frac{1}{2}a_1$, $a_3=\frac{1}{3}a_2$, $\cdots$, $a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}$

$\therefore\ a_n=\frac{1}{2\times3\times4\times\cdots\times n}a_1=\frac{1}{n!}$이므로

$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

21. '가'형과 같음

22. [출제의도] 무한수열의 극한값 구하기

$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n^2+3n+2}-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(\sqrt{n^2+3n+2}+n)}{(\sqrt{n^2+3n+2}-n)(\sqrt{n^2+3n+2}+n)}$

$=2$

23. [출제의도] 로그함수의 그래프의 성질을 이해하기

$\overline{\mathrm{BC}}=\log_a 4-\log_b 4=2$ ⋯⋯ ㉠

점 A, B의 y좌표가 같으므로

$\log_a 2=\log_b 4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\log_a 4-\log_a 2=\log_a 2=2$에서 $a=\sqrt{2}$, $b=2$

따라서 $a^2+b^2=6$

24. '가'형과 같음

25. [출제의도] 함수의 극한에 관한 성질을 알고 추론하기

조건 (가)에 의해 $f(x)-3x^3=2x^2+ax+b$라 하면

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3x^3+2x^2+ax+b}{x}=2$이므로

$a=2$, $b=0$

따라서 $f(x)=3x^3+2x^2+2x$이므로 $f(1)=7$

26. [출제의도] 역행렬의 뜻 이해하기

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$라 할 때,

행렬 A는 역행렬을 갖지 않으므로 $ad=bc$

ⅰ) $a=b=c=d$인 경우 3가지

ⅱ) $ad=bc=2$인 경우 4가지

ⅲ) $ad=bc=3$인 경우 4가지

ⅳ) $ad=bc=6$인 경우 4가지

따라서 행렬 A의 개수는 15

27. '가'형과 같음

28. [출제의도] 로그방정식의 해 구하기

$\log_3 x\cdot\log_2 y=\frac{\log_2 x}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_3 y}{\log_3 2}=6$

$\log_2 x=X$, $\log_3 y=Y$라 하면

$\begin{cases}X+Y=5\\ XY=6\end{cases}$이므로

$\begin{cases}X=2\\ Y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}X=3\\ Y=2\end{cases}$

즉, $\begin{cases}x=4\\ y=27\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=8\\ y=9\end{cases}$

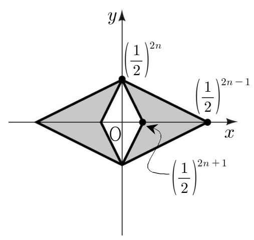
따라서 $\beta-\alpha$의 최댓값은 23

29. '가'형과 같음

30. [출제의도] 등비수열의 합 구하기

점 (x, y)가 나타내는 영역은 두 대각선의 길이가 각각 $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$, $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$인 마름모의 내부와 두 대각선의 길이가 각각 $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$, $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$인 마름모의 외부의 공통 부분(어두운 부분)이므로

$a_n=3\times\left(\frac{1}{16}\right)^n$



$S_{10}=3\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{16}\right)^k=\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{40}\right\}$

따라서 $\log_{\frac{1}{2}}(1-5S_{10})=40$

2012학년도 대학수학능력시험 대비

2011학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수리 영역 •

수리'가'형 정답

1	④	2	②	3	⑤	4	③	5	③
6	①	7	⑤	8	④	9	②	10	②
11	⑤	12	④	13	⑤	14	②	15	④
16	③	17	⑤	18	③	19	①	20	①
21	②	22	32	23	49	24	6	25	90
26	8	27	17	28	120	29	9	30	6

해 설

1. [출제의도] 로그의 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_3 12-\log_3\frac{4}{27}=\log_3\left(12\times\frac{27}{4}\right)$

$=\log_3 81=4$

2. [출제의도] 행렬의 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$X=B-AB$

$=(E-A)B$

$=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 2이다.

[다른 풀이]

행렬 $E-A$에 행렬 B를 곱하면 행렬 $E-A$의 1열과 2열이 바뀌므로 행렬의 성분의 합에는 영향을 주지 않는다. 따라서 행렬 X의 성분의 합은 행렬 $E-A$의 성분의 합과 같다.

3. [출제의도] 함수의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x}{\sqrt{x+1}-2}$

$=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}x(\sqrt{x+1}+2)$

$=3(\sqrt{3+1}+2)$

$=3\cdot4=12$

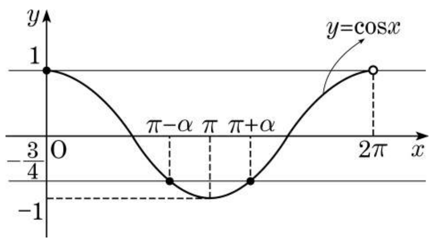
4. [출제의도] 삼각방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2(2\cos^2x-1)=1+\cos x$

$4\cos^2x-\cos x-3=0$

$(4\cos x+3)(\cos x-1)=0$

$\therefore\ \cos x=-\frac{3}{4},\ \cos x=1$



이때 $\cos\alpha=\frac{3}{4}\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\cos x=-\frac{3}{4}$의 해는 $x=\pi-\alpha,\ x=\pi+\alpha$이다.

$\cos x=1$의 해는 $x=0$

따라서 모든 x의 값의 합은 2π이다.

5. [출제의도] 고차부등식의 계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

i) $a<0$일 때,

$a^2-2a<a^2-4a<a^2-6a$이므로 해는

$a^2-2a<x<a^2-4a,\ x>a^2-6a$

$a^2-2a=8,\ a^2-4a=12,\ a^2-6a=16$이다.

따라서 연립방정식을 만족하는 $a=-2$이다.

ii) $a=0$일 때,

$x^3>0$

따라서 $x>0$이므로 조건에 맞지 않는다.

iii) $a>0$일 때,

$a^2-2a>a^2-4a>a^2-6a$이므로 해는

$a^2-6a<x<a^2-4a,\ x>a^2-2a$

$a^2-2a=16,\ a^2-4a=12,\ a^2-6a=8$이다.

따라서 연립방정식을 만족하는 상수 a는 존재하지 않는다.

i), ii), iii)에 의하여 $a=-2$

[다른 풀이]

$a\neq0$일 때 세 수 $a^2-2a,\ a^2-4a,\ a^2-6a$ 중 크기가 작은 수부터 두 번째 수는 a^2-4a이다. 그러므로

$a^2-4a=12,\ (a+2)(a-6)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=6$

그런데 $a=6$인 경우는 주어진 해의 범위를 만족하지 않는다.

$\therefore a=-2$

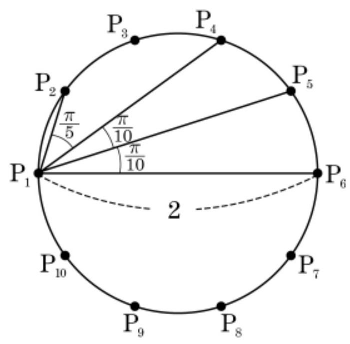
6. [출제의도] 역함수의 접선의 기울기를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$

$g'(x)=\frac{1}{f'(y)}$이므로

$g'(e^2)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{2e^2}$

7. [출제의도] 삼각함수의 배각 공식을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.



$\overline{P_1P_2}=\overline{P_5P_6}=2\sin\frac{\pi}{10},\ \overline{P_1P_4}=2\cos\frac{\pi}{5},\ \overline{P_1P_5}=2\cos\frac{\pi}{10}$

$\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_1P_4}\cdot\overline{P_1P_5}=8\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{10}$

$=4\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$

$=2\sin\frac{2}{5}\pi$

[다른 풀이]

$\overline{P_1P_2}=2\cos\frac{2}{5}\pi,\ \overline{P_1P_4}=2\cos\frac{\pi}{5},\ \overline{P_1P_5}=2\cos\frac{\pi}{10}$

$S=\overline{P_1P_2}\times\overline{P_1P_4}\times\overline{P_1P_5}$라고 하면

$\sin\frac{\pi}{10}S=\sin\frac{\pi}{10}\cdot2\cos\frac{2}{5}\pi\cdot2\cos\frac{\pi}{5}\cdot2\cos\frac{\pi}{10}$

$=\sin\frac{\pi}{10}\cdot2\cos\frac{\pi}{10}\cdot2\cos\frac{\pi}{5}\cdot2\cos\frac{2}{5}\pi$

$=\sin\frac{\pi}{5}\cdot2\cos\frac{\pi}{5}\cdot2\cos\frac{2}{5}\pi$

$=\sin\frac{2}{5}\pi\cdot2\cos\frac{2}{5}\pi$

$=\sin\frac{4}{5}\pi$이므로

$S=\frac{\sin\frac{4}{5}\pi}{\sin\frac{\pi}{10}}=\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{10}}$

$=\frac{2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}$

$=2\cos\frac{\pi}{10}$

$=2\sin\frac{2\pi}{5}$

8. [출제의도] 주기함수와 연속함수의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

i) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-0}(2x+a)=\lim_{x\to1+0}(x^2+bx+3)$

$2+a=1+b+3$

따라서 $a-b=2$

ii) $f(x+5)=f(x)$이므로

$f(3)=f(-2)$

$3^2+3b+3=2\times(-2)+a$

따라서 $a-3b=16$

i), ii)에 의하여 $a=-5,\ b=-7$

$\therefore\ f(x)=\begin{cases}2x-5 & (-2\le x<1)\\ x^2-7x+3 & (1\le x\le3)\end{cases}$

$f(2011)=f(402\times5+1)$

$=f(1)=1-7+3=-3$

9. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

(가)에서 3은 한 자리의 양의 정수이므로 $f(3)=0$, 2011은 네 자리의 양의 정수이므로 $f(2011)=3$

$f(n)=1$ 또는 $f(n)=2$이다.

(나)에서 주어진 식의 좌변을 인수분해하면

$\{g(n)-\log2\}\{g(n)-\log5\}<0$

$\therefore\ \log2<g(n)<\log5$

이때 $\log n=f(n)+g(n)$이므로

i) $f(n)=1$일 때 $1+\log2<f(n)+g(n)<1+\log5$

$\therefore\ \log20<\log n<\log50$

따라서 양의 정수 n은 $21,22,\cdots,49$로 29 개다.

ii) $f(n)=2$일 때 $2+\log2<f(n)+g(n)<2+\log5$

$\therefore\ \log200<\log n<\log500$

따라서 양의 정수 n은 $201,202,\cdots,499$로 299 개다.

i), ii)에 의하여 양의 정수 n의 개수는 $29+299=328$이다.

10. [출제의도] 로그방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

로그의 진수조건에 의하여

$x>0,\ y>3$

그런데 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않으므로

$\log_2(x+1)+\log_2(y-3)=0$

$\log_2(x+1)(y-3)=0$

$(x+1)(y-3)=1$

$\therefore xy-3x+y-4=0$ … ㉠

또, 행렬 B의 역행렬이 존재하지 않으므로

$(1+\log_3x)-\log_3y=0$

$\log_3\frac{3x}{y}=0$

$\therefore\ \frac{3x}{y}=1$

$\therefore\ y=3x$ … ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면

$\therefore\ xy=4$

11. [출제의도] 행렬의 연산에 대한 성질을 이용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A(-B)=E$ 이므로 $A^{-1}=-B$

$BA=-A^{-1}A=-E=AB$

ㄱ. $A^2+B^2=(A+B)^2-AB-BA$

$=3E$ (참)

ㄴ. 모든 자연수 n 에 대하여

$A^{n+2}+B^{n+2}$

$=(A^{n+1}+B^{n+1})(A+B)-A^{n+1}B-B^{n+1}A$

$=A^{n+1}+B^{n+1}-A^nAB-B^nBA$

$=A^{n+1}+B^{n+1}+A^n+B^n$ (참)

ㄷ. ㄴ을 이용해서

$A^3+B^3=A^2+B^2+A+B=3E+E=4E$

$A^4+B^4=A^3+B^3+A^2+B^2=4E+3E=7E$

$A^5+B^5=A^4+B^4+A^3+B^3=7E+4E=11E$

$\vdots$

$A^9+B^9=A^8+B^8+A^7+B^7=76E$ (참)

[다른 풀이]

ㄱ. $B=E-A$ 이므로

$AB=A(E-A)=A-A^2=-E$ 에서

$A^2=A+E \quad \cdots$ ㉠

같은 방법으로

$B^2=B+E \quad \cdots$ ㉡

그러므로

$A^2+B^2=A+E+B+E$

$=(A+B)+2E=3E$

ㄴ. ㉠의 양변에 A^n을 곱하면

$A^{n+2}=A^{n+1}+A^n \quad \cdots$ ㉢

㉡의 양변에 B^n을 곱하면

$B^{n+2}=B^{n+1}+B^n \quad \cdots$ ㉣

㉢과 ㉣에서

$A^{n+2}+B^{n+2}=A^{n+1}+B^{n+1}+A^n+B^n$

12. [출제의도] 분수방정식의 근을 구하는 과정을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{a}{2x^2}$ 의 양변에

분모의 최소공배수 $2x^2(x-1)(x+1)$을 곱하면

$2x^2(x+1)-2x^2(x-1)=a(x^2-1)$

$4x^2=ax^2-a$

$(a-4)x^2=a$

ⅰ) $a=4$인 경우

$0\cdot x^2=4$이므로 해가 존재하지 않는다.

ⅱ) $a\neq 4$인 경우

$x^2=\dfrac{a}{a-4} \quad \cdots$ ㉠

(1) $\dfrac{a}{a-4}\geq 0$이면 실근이 존재하지만

이 해가 모두 무연근이어야 하므로

㉠에서 $x=0$이면 $a=0$

㉠에서 $x=-1$ 또는 $x=1$이면 $a-4=a$이므로

실수 a가 존재하지 않는다.

(2) $\dfrac{a}{a-4}<0$이면 실근이 존재하지 않으므로

$a(a-4)<0$

$0<a<4$

따라서 정수 a는 $1, 2, 3$이다.

ⅰ), ⅱ)에서 정수 a는 $0, 1, 2, 3, 4$로 5개다.

13. [출제의도] 로그함수를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $T=0$ 일 때 $P=4.8$ 이므로 $a+\dfrac{b}{c}=\log 4.8$ 이다.

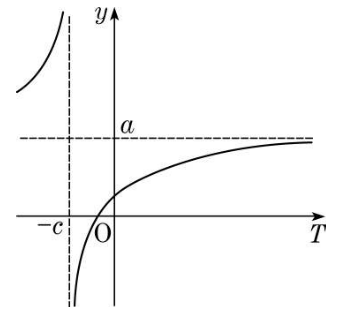
그런데 $\log 4<\log 4.8<\log 5$ 에서

$2\log 2<\log 4.8<1-\log 2$ 이므로

$0.602<a+\dfrac{b}{c}<0.699$ (참)

ㄴ. $y=\log P$ 라 하면 $y=a+\dfrac{b}{c+T}$ 의 그래프는 점근선이 $T=-c$, $y=a$이다. 그런데 주어진 표를 이용하면 T 의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로 분수함수의 그래프는 그림과 같아야 한다.

$\therefore\ b<0$ (참)



ㄷ. ㄴ의 $y=a+\dfrac{b}{c+T}$ 의 그래프에서 $T>-c$인 모든 실수 T에 대하여 $y<a$이다.

$\therefore\ \log P<a$

따라서 $P<10^a$ 이다. (참)

14. [출제의도] 지수함수를 이해하고 지수방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\mathrm{P}(k, a^k)$, $\mathrm{Q}(k, a^{2k})$, $\mathrm{R}(k, k)$ 라 하면

$k=2$ 일 때 $a^{2k}=k$ 이므로 $a^4=2$

$\therefore\ a=\sqrt[4]{2}$ ($\because\ a>1$)

$\therefore\ a^x=2^{\frac{x}{4}},\quad a^{2x}=2^{\frac{x}{2}}$

ㄱ. $k=4$ 이면 $(\sqrt[4]{2})^8=4$ 이므로 $a^{2k}=k$ 이다.

따라서 점 Q와 점 R는 일치한다. (참)

ㄴ. $\overline{\mathrm{PQ}}=\left|2^{\frac{k}{2}}-2^{\frac{k}{4}}\right|=12$ 이다.

이때 $2^{\frac{k}{4}}=t\ (t>0)$라 하면

$t^2-t=12$ 또는 $t^2-t=-12$ 이다.

ⅰ) $t^2-t=12$ 인 경우 $(t-4)(t+3)=0$ 에서

$t>0$이므로 $t=4$

$\therefore\ 2^{\frac{k}{4}}=4$

$\therefore\ \dfrac{k}{4}=2$

$\therefore\ k=8$

ⅱ) $t^2-t=-12$ 인 경우 $t^2-t+12=0$ 의 판별식이 음수이므로 $t>0$ 조건을 만족시키는 실수 t 가 존재하지 않는다. 따라서, k도 존재하지 않는다.

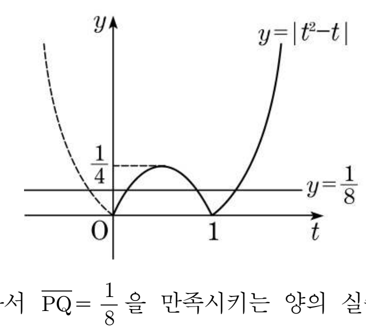
ⅰ), ⅱ)에 의하여 $k=8$ 이므로 $\mathrm{Q}(8, 16)$, $\mathrm{R}(8, 8)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{QR}}=8$ (참)

ㄷ. $\overline{\mathrm{PQ}}=\left|2^{\frac{k}{2}}-2^{\frac{k}{4}}\right|$ 에서 $2^{\frac{k}{4}}=t\ (t>0)$라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=|t^2-t|$ 이다.

이때 $y=|t^2-t|=\left|\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right|$의 그래프는 다음과 같다.



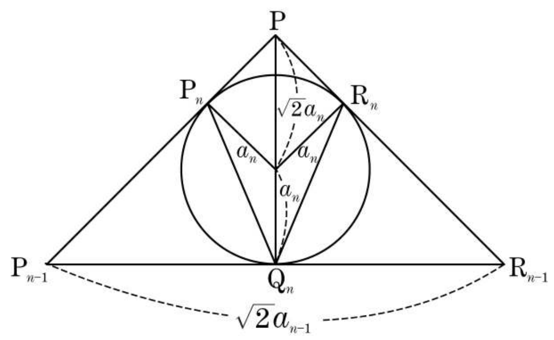
따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{8}$ 을 만족시키는 양의 실수 t의 값은 3개이므로 실수 k 의 값도 3 개이다. (거짓)

15. [출제의도] 무한등비급수를 활용하여 수학내적문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

삼각형 PQR 의 내접원의 반지름을 a_1이라 하면

$\sqrt{2}a_1+a_1=\sqrt{2}$ 에서 $a_1=2-\sqrt{2}$ 이고

$S_1=\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{2}-2)\times 1=\sqrt{2}-1$



삼각형 $\mathrm{PP}_{n-1}\mathrm{R}_{n-1}$의 내접원의 반지름을 a_n이라 하면

$\sqrt{2}a_n+a_n=\dfrac{\sqrt{2}a_{n-1}}{2}$

$\therefore\ a_n=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}a_{n-1}$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 이 공비가 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$인 등비수열을

이루므로 수열 $\{S_n\}$은 공비가 $\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$

인 등비수열을 이룬다.

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\sqrt{2}-1}{1-\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{6-2\sqrt{2}}{7}$

$\therefore\ p+q=\dfrac{4}{7}$

16. [출제의도] 함수의 연속의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=-1$ (참)

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\{f(x)+g(x)\}=(-1)+1=0$이고

$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\{f(x)+g(x)\}=1+(-1)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=0$이다.

$x=1$에서 함숫값 $f(1)+g(1)=0$이다.

$\displaystyle\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=f(1)+g(1)$이므로

$f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. (반례) $\displaystyle\lim_{x\to1-0}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to1-0}f(x)=-1$이고

$\displaystyle\lim_{x\to1+0}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to-1+0}f(x)=-1$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1}(f\circ g)(x)=-1$,

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(0)=0$이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to1}(f\circ g)(x)\neq(f\circ g)(1)$이므로

함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

17. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용한 증명을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\displaystyle\sum_{i=1}^{2k+1}(i+k^2)$

$\displaystyle=\sum_{i=1}^{2k-1}(i+k^2)+\sum_{i=2k}^{2k+1}(i+k^2)$

$\displaystyle=\sum_{i=1}^{2k-1}(i+k^2)+(2k+k^2)+(2k+1+k^2)$

$\displaystyle=\sum_{i=1}^{2k-1}\{i+(k-1)^2+(2k-1)\}+(2k^2+4k+1)$

$\displaystyle=\sum_{i=1}^{2k-1}\{i+(k-1)^2\}+\sum_{i=1}^{2k-1}(2k-1)+(2k^2+4k+1)$

이므로 $f(k)=2k^2+4k+1$이다.

한편

$\displaystyle\sum_{i=1}^{2k-1}\{i+(k-1)^2\}+\sum_{i=1}^{2k-1}(2k-1)+(2k^2+4k+1)$

$\displaystyle=(k-1)^3+k^3+\sum_{i=1}^{2k-1}(2k-1)+(2k^2+4k+1)$

$=(k-1)^3+k^3+(2k-1)^2+(2k^2+4k+1)$

$=k^3-3k^2+3k-1+k^3+4k^2-4k+1+2k^2+4k+1$

$=k^3+k^3+3k^2+3k+1$

$=k^3+(k+1)^3$

그러므로 $g(k)=k^3+(k+1)^3$이다.

$\therefore\ \dfrac{g(4)}{f(4)}=\dfrac{189}{49}=\dfrac{27}{7}$

18. [출제의도] 함수에서 접선의 뜻을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

두 접점의 좌표를

$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^3-3\alpha^2+2\alpha)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^3-3\beta^2+2\beta)$라 하면

ㄱ. $y'=3x^2-6x+2$이므로 기울기가 m인 접선의 두 접점의 x좌표는 $3x^2-6x+2-m=0$을 만족하므로 $\alpha+\beta=2$이다. (참)

ㄴ. 기울기가 m인 접선의 두 접점이 존재하므로 α, β는 서로 다른 실수이다.

$3x^2-6x+2-m=0$ 이 서로 다른 실근을 가지므로

$3^2-3(2-m)>0$

$\therefore\ m>-1$ (참)

ㄷ. 두 접선은 평행하므로 두 접선 사이의 거리가 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 되기 위해서는 두 접점 P, Q를 지나는 직선과 접선이 수직이어야 한다. 즉, 기울기의 곱은 -1이다.

$m\times\dfrac{(\alpha^3-3\alpha^2+2\alpha)-(\beta^3-3\beta^2+2\beta)}{\alpha-\beta}=-1$

$m\{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+2\}=-1$

$m\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+2\}=-1$

그런데, α, β는 $3x^2-6x+2-m=0$ 의 두 근이므로 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\dfrac{2-m}{3}$

$\therefore\ m\left(\dfrac{2-m}{3}\right)=1$

$\therefore\ m^2-2m+3=0$

판별식 $\dfrac{D}{4}=1^2-3=-2<0$이므로 실수 m이 존재하지 않는다.

따라서 두 접선 사이의 거리와 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 같아지는 실수 m은 존재하지 않는다. (거짓)

19. [출제의도] 수열의 규칙성을 찾고 수열의 극한을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

n 행에 있는 유리수들은

$$\frac{1}{2^n},\ \frac{3}{2^n},\ \frac{5}{2^n},\ \cdots,\ \frac{2^n-1}{2^n}$$

이고, 분자를 나열한 수열이 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열이므로 n 행의 총 항수를 k라 하면 $2k-1=2^n-1$에서 $k=2^{n-1}$이다.

$\therefore\ a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n}$

$\therefore\ b_n=\dfrac{1}{2^n}\times\dfrac{2^{n-1}\{1+(2^n-1)\}}{2}=\dfrac{2^n}{4}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{(2^n+1)a_n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2^n}{4}}{(2^n+1)\dfrac{2^n-1}{2^n}}$

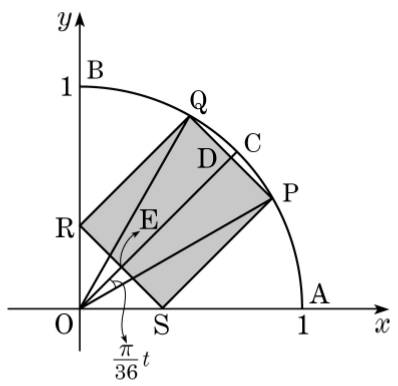
$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\times2^n}{4(2^n+1)(2^n-1)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n}{4(4^n-1)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4\left\{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}}=\dfrac{1}{4}$

20. [출제의도] 도형의 넓이의 순간변화율을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

내접하는 사각형의 x축, y축 위의 두 꼭짓점을 각각 S, R라 하고 선분 OC와 선분 PQ, 선분 RS의 교점을 각각 D, E라 하자.



삼각형 DOP에서

$\overline{\mathrm{DP}}=\overline{\mathrm{OP}}\sin\dfrac{\pi}{36}t=\sin\dfrac{\pi}{36}t$

$\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OP}}\cos\dfrac{\pi}{36}t=\cos\dfrac{\pi}{36}t$

$\angle\mathrm{EOS}=\dfrac{\pi}{4}$이므로 $\overline{\mathrm{OE}}=\overline{\mathrm{ES}}\,(=\overline{\mathrm{DP}})$

이다. 그러므로 □PQRS의 넓이 $S(t)$는

$S(t)=\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{PS}}$

$=2\overline{\mathrm{DP}}\cdot(\overline{\mathrm{OD}}-\overline{\mathrm{OE}})$

$=2\sin\dfrac{\pi}{36}t\left(\cos\dfrac{\pi}{36}t-\sin\dfrac{\pi}{36}t\right)$

$=2\sin\dfrac{\pi}{36}t\cos\dfrac{\pi}{36}t-2\sin^2\dfrac{\pi}{36}t$

$=\sin\dfrac{\pi}{18}t-2\sin^2\dfrac{\pi}{36}t$

$S'(t)=\dfrac{\pi}{18}\left(\cos\dfrac{\pi}{18}t-2\sin\dfrac{\pi}{36}t\cos\dfrac{\pi}{36}t\right)$

$=\dfrac{\pi}{18}\left(\cos\dfrac{\pi}{18}t-\sin\dfrac{\pi}{18}t\right)$

$S'(6)=\dfrac{\pi}{18}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=\dfrac{1-\sqrt{3}}{36}\pi$

21. [출제의도] 수열의 일반항을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_n=\overline{\mathrm{OP}_n}$이라 하자.

$y_n=a_n\sin\dfrac{n-1}{3}\pi$에서

$y_1=0,\ y_2>0,\ y_3>0,\ y_4=0,\ y_5<0,\ y_6<0,\ y_7=0,$ … 으로 y_n의 부호가 주기적으로 바뀐다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 몇 개의 항을 구하면

$a_1=1$	$a_2=1$	$a_3=\dfrac{1}{2}$
$a_4=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$	$a_5=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$	$a_6=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}\right)$
$a_7=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}\right)^2$	$a_8=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}\right)^2$	…

으로 동경 OP_1에서 동경 OP_7까지 동경이 2π만큼 회전하면 a_7은 a_1의 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}\right)^2$배이다.

즉, 2π만큼씩 회전할 때마다 그 이전 길이의 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$배가 된다.

$a_{n+6}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2a_n$인 관계가 성립하므로

$a_{50}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2a_{44}=\cdots=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{16}a_2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{16}$

22. [출제의도] 거듭제곱근의 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(좌변)$=\sqrt[n]{2}\times\sqrt[n]{8}=\sqrt[n]{16}$

(우변)$=\sqrt[8]{2}=\sqrt[8\times4]{2^4}=\sqrt[32]{16}$

따라서 $n=32$이다.

[다른 풀이]

$2^{\frac{1}{n}}\times2^{\frac{3}{n}}=2^{\frac{4}{n}}=2^{\frac{1}{8}}$

따라서 $\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{8}$이므로 $n=32$이다.

23. [출제의도] 무리방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$3^x=t\,(t>0)$라 하면 $t-\sqrt{t+2}=4$

$\therefore\ t-4=\sqrt{t+2}\ \ (t>4)$

양변을 제곱하여 정리하면

$t^2-9t+14=0$

$(t-2)(t-7)=0,\ t=2,\ 7$

$\therefore t=7\ \ (\because t>4)$

$3^\alpha=7$

$\therefore 9^\alpha=(3^\alpha)^2=49$

24. [출제의도] 삼각함수의 합성을 이용하여 최댓값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\beta+\cos\beta$

$=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(\beta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\left\{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\beta+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\dfrac{\pi}{6}$

$=\sqrt{6}\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

그러므로 $\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$일 때

최댓값 $M=\sqrt{6}$이고, $M^2=6$

[참고]

$\alpha=\dfrac{5}{12}\pi$이고 $\beta=\dfrac{\pi}{12}$일 때

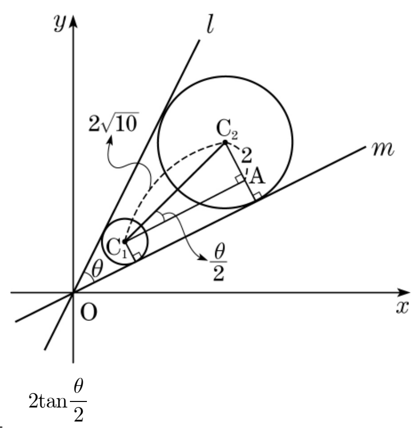
두 식 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\pi}{4}$과 $\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{\pi}{6}$를 만족시킨다.

25. [출제의도] 삼각함수와 관련된 수학내적문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그림에서 $\overline{\mathrm{AC}_2}=2$, $\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}=2\sqrt{10}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}_1}=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-2^2}=\sqrt{36}=6$

$\angle\mathrm{C}_2\mathrm{C}_1\mathrm{A}=\dfrac{\theta}{2}$이므로 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$



$\tan\theta=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$

$=\dfrac{\dfrac{2}{3}}{1-\dfrac{1}{9}}=\dfrac{3}{4}$

$\therefore 120\tan\theta=90$

26. [출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$y=0$을 대입하면

$f(x)=f(x)f(0)+4f(x)+4f(0)+12$

$\{f(x)+4\}\{f(0)+3\}=0$

$f(0)=-3$

$f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x)f(h)+4f(x)+4f(h)+12-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x)f(h)+3f(x)+4f(h)+12}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\{f(x)+4\}\{f(h)+3\}}{h}$

$$=\{f(x)+4\}\lim_{h\to0}\frac{f(h)+3}{h}$$
$$=\{f(x)+4\}\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=\{f(x)+4\}f'(0)$$
$$=2\{f(x)+4\}$$
$\therefore f'(\ln2)=2\{f(\ln2)+4\}=8$

[다른 풀이]

(가)에서 양변에 4를 더하여 인수분해하면

$f(x+y)+4=\{f(x)+4\}\{f(y)+4\}$

$f(x)+4=g(x)$라 하면

$g(x+y)=g(x)g(y)$ ⋯㉠

㉠에서 $y=0$이라 하면

$g(x)=g(x)g(0)$

$g(x)\{1-g(0)\}=0$

$g(0)=1$

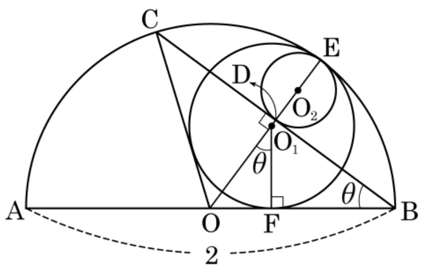
$$g'(x)=g'(x)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{g(x)g(h)-g(x)}{h}$$
$$=g(x)\lim_{h\to0}\frac{g(h)-1}{h}$$
$$=g(x)\lim_{h\to0}\frac{g(h)-g(0)}{h}$$
$$=g(x)\,g'(0)\ \ (\because g'(0)=f'(0)=2)$$
$$=2g(x)=2\{f(x)+4\}$$

따라서

$f'(\ln2)=2\{f(\ln2)+4\}=2\times4=8$

27. [출제의도] 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 O_1에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 F, 직선 O_1O_2와 현 BC, 호 BC의 교점을 각각 D, E라 하자.



$\overline{O_1F}=\overline{O_1E}=f(\theta)$, $\angle OO_1F=\theta$

$\overline{OE}=\overline{OO_1}+\overline{O_1E}=\dfrac{f(\theta)}{\cos\theta}+f(\theta)=1$

$f(\theta)=\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$\overline{OD}=\sin\theta$, $\overline{ED}=1-\sin\theta$ 이므로

$g(\theta)=\dfrac{1-\sin\theta}{2}$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{g(\theta)}{\{f(\theta)\}^2}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{1-\sin\theta}{2}}{\left(\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)^2}$$
$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{(1-\sin\theta)(1+\cos\theta)^2}{2\cos^2\theta}$$

$\dfrac{\pi}{2}-\theta=t$라 하면, $\theta=\dfrac{\pi}{2}-t$이고

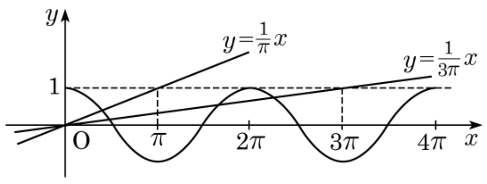
$\sin\theta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$, $\cos\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$

$\theta\to\dfrac{\pi}{2}-0$일때 $t\to+0$이다.

$$(\text{주어진 식})=\lim_{t\to+0}\frac{(1-\cos t)(1+\sin t)^2}{2\sin^2t}$$
$$=\lim_{t\to+0}\frac{(1-\cos t)(1+\sin t)^2}{2(1-\cos^2t)}$$
$$=\lim_{t\to+0}\frac{(1+\sin t)^2}{2(1+\cos t)}$$
$$=\frac{1}{4}=\frac{q}{p}$$

따라서 $p=4$, $q=1$이므로 $p^2+q^2=17$이다.

28. [출제의도] 무한급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

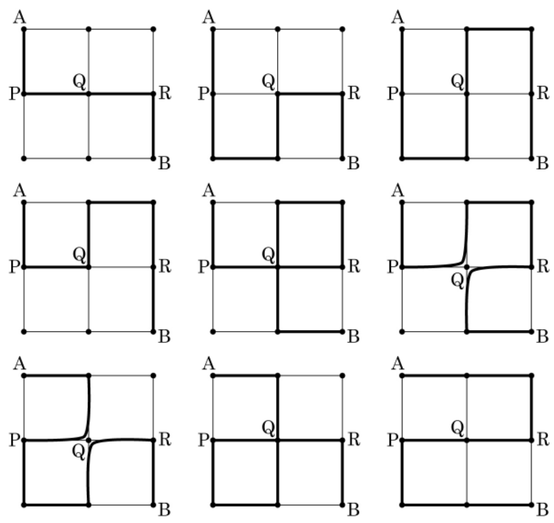


그림에서 $a_n=2n-1(n\ge1)$

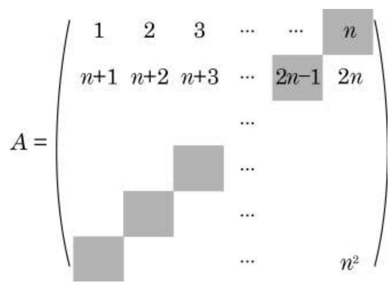
$$\sum_{n=1}^{24}\frac{500}{(a_n+1)(a_n+3)}=\sum_{n=1}^{24}\frac{500}{2n(2n+2)}$$
$$=\sum_{n=1}^{24}\frac{125}{n(n+1)}$$
$$=125\sum_{n=1}^{24}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=120$$

29. [출제의도] 그래프의 경로를 이해하는가를 묻는 문제이다.

그림과 같이 P, Q, R 순으로 지나는 경로가 4개, P, Q, R, Q 순으로 지나는 경로가 2개, Q, P, Q, R 순으로 지나는 경로가 2개, R, Q, P 순으로 지나는 경로가 1개로 모두 9개다.



30. [출제의도] 수열의 규칙성을 찾아 수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.



$f(k)=(k-1)n+n-k+1$

$\quad=(n-1)k+1$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)=\sum_{k=1}^{n}\{(n-1)k+1\}$$
$$=(n-1)\frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$=\frac{1}{2}n(n^2+1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{12\sum_{k=1}^{n}f(k)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n(n^2+1)}{n^3}=6$$

수리'나'형 정답

1	④	2	②	3	①	4	④	5	①
6	⑤	7	③	8	①	9	②	10	②
11	⑤	12	③	13	⑤	14	②	15	④
16	④	17	⑤	18	③	19	①	20	③
21	②	22	32	23	105	24	97	25	65
26	5	27	570	28	120	29	9	30	6

해 설

1~2. '가'형과 동일

3. [출제의도] 수열의 극한을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

모든 자연수 n에 대하여 $\cos n\pi=(-1)^n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n\cos n\pi}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}\cos n\pi}{1+\frac{1}{n^2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=1$$

[다른 풀이]

모든 자연수 n에 대하여 $-1\le\cos n\pi\le1$이므로

$-\dfrac{n}{n^2+1}\le\dfrac{n}{n^2+1}\cos n\pi\le\dfrac{n}{n^2+1}$

그런데 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=0$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\cos n\pi=0$

또, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}=1$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+\cos n\pi)}{n^2+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\cos n\pi$$
$$=1$$

4. [출제의도] 지수법칙을 이해하여 주어진 식의 값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$3^x=t$라 하면 $t>0$이고

$3^{1-x}=\dfrac{3}{3^x}=\dfrac{3}{t}$, $9^x=3^{2x}=t^2$, $9^{1-x}=\dfrac{9}{9^x}=\dfrac{9}{t^2}$

$$\therefore\ 9^x+9^{1-x}=t^2+\frac{9}{t^2}=\left(t+\frac{3}{t}\right)^2-2\cdot t\cdot\frac{3}{t}$$
$$=10^2-6=94$$

[참고]

산술평균과 기하평균 사이의 관계에 의해

모든 실수 x에 대하여

$3^x+3^{1-x}\ge2\sqrt{3^{x+(1-x)}}=2\sqrt{3}$

5. [출제의도] 그래프를 행렬로 나타낼 수 있는가를 묻는 문제이다.

그래프의 꼭짓점 사이의 연결 관계를 행렬로 나타내었을 때, 행렬의 모든 성분의 합은 그래프의 변의 개수의 2배이다. 주어진 그래프의 변의 개수가 7이므로 성분의 합은 14이다.

[다른 풀이]

구하는 행렬은

$$\begin{pmatrix}0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\1&1&0&1&0\\1&1&1&0&0\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

이므로 모든 성분의 합은 14이다.

6. **[출제의도] 로그의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

$\log_a 2=\log_b 5=\log_c 10=\log_{abc} x=\frac{1}{k}$ 이라고 하면,

$\log_2 a=\log_5 b=\log_{10} c=\log_x abc=k$ 이다. 따라서,

$a=2^k,\ b=5^k,\ c=10^k$ 이므로 $ab=c$ 이다.

$\therefore\ k=\log_x abc=\log_x c^2$

이때, $k=\log_x c^2=\log_x 10^{2k}=k\log_x 100$ 이므로

$x=100$

[다른 풀이]

$$\frac{\log 2}{\log a}=\frac{\log 5}{\log b}=\frac{\log 10}{\log c}=\frac{\log 2+\log 5+\log 10}{\log a+\log b+\log c}$$
$$=\frac{\log 100}{\log abc}=\log_{abc}100$$

$\therefore\ x=100$

7. **[출제의도] 행렬을 이용하여 연립일차방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$\begin{pmatrix}5&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$를 정리하면

$\begin{pmatrix}5-k&2\\2&5-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

행렬 $\begin{pmatrix}5-k&2\\2&5-k\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$(5-k)^2-2^2=0$ $\quad\therefore\ k=3,\ 7$

따라서 모든 상수 k의 합은 10이다.

8. **[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수의 대소를 비교할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$c=\frac{x+1}{x}$이라 하면 $\log_a c>\log_b c>0$이다.

$\frac{1}{\log_c a}>\frac{1}{\log_c b}>0$이므로 $0<\log_c a<\log_c b$이다.

그런데 $c>1$이므로 $1<a<b$이다.

9~11. '가'형과 동일

12. **[출제의도] 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-r}=3$이므로 $r=\frac{2}{3}$이다.

수열 $\{a_{3n-2}\}$는 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{8}{27}$인 등비수열이고

수열 $\{a_{3n-1}\}$은 첫째항이 $\frac{2}{3}$이고 공비가 $\frac{8}{27}$인 등비수열이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n-2}-a_{3n-1})=\frac{1}{1-\frac{8}{27}}-\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{8}{27}}$$
$$=\frac{9}{19}$$

13~15. '가'형과 동일

16. **[출제의도] 수열의 규칙성을 찾고 수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$a_n=\overline{\mathrm{OA}_n},\ b_n=\overline{\mathrm{OB}_n}$이라 하면

$a_n=1+(n-1)a,\ b_n=1+(n-1)b$이므로

$S_n=\frac{1}{2}a_nb_n\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}(an+1-a)(bn+1-b)$

이다. 그런데

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(a+\frac{1-a}{n}\right)\left(b+\frac{1-b}{n}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}ab=5\sqrt{3}$$

이므로 $ab=20$이다. 따라서 양의 정수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 6이다.

17. '가'형과 동일

18. **[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하여 수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$a_n=3^{n-1},\ b_n=n(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1=n!$

$1\le n\le4$ 일 때 $a_n\ge b_n$이므로 $c_n=b_n$

$n\ge5$일 때 $a_n<b_n$이므로 $c_n=a_n$

n	1	2	3	4	5	$\cdots$
a_n	1	3	9	27	81	$\cdots$
b_n	1	2	6	24	120	$\cdots$
c_n	1	2	6	24	81	$\cdots$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{50}2c_n=2\left(\sum_{n=1}^{4}n!+\sum_{n=5}^{50}3^{n-1}\right)$$
$$=2\left\{1+2+6+24+\frac{3^4(3^{46}-1)}{3-1}\right\}$$
$$=3^{50}-15$$

19. '가'형과 동일

20. **[출제의도] 수열을 귀납적인 방법을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$a_1=1,\ \ b_1=1$ 이고,

$a_{n+1}=a_n+b_n,\ \ b_{n+1}=a_n$ 이므로

$a_2=2,\ b_2=1$

$a_3=3,\ b_3=2$

$a_4=5,\ b_4=3$

$a_5=8,\ b_5=5$

$a_6=13,\ b_6=8$

$a_7=21,\ b_7=13$

$\therefore a_7+b_7=34$

[다른 풀이]

$a_1=1,\ \ b_1=1$ 이고, $a_{n+1}=a_n+b_n,\ \ b_{n+1}=a_n$ 이므로

$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$로 나타낼 수 있다. 이 때,

$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ 이라 하면,

$A^2=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix},\ A^3=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix},\ A^4=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix},$

$A^5=\begin{pmatrix}8&5\\5&3\end{pmatrix},\ A^6=\begin{pmatrix}13&8\\8&5\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}a_7\\b_7\end{pmatrix}=A^6\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&8\\8&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\13\end{pmatrix}$

$\therefore a_7+b_7=34$

21~22. '가'형과 동일

23. **[출제의도] 등비수열을 이용하여 등차수열의 합을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$a_n=5^n$이므로

$$\sum_{n=1}^{20}\log_{25}a_n=\sum_{n=1}^{20}\log_{25}5^n$$
$$=\sum_{n=1}^{20}\frac{n}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{20(20+1)}{2}=105$$

24. **[출제의도] 계차수열을 이용하여 수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$b_n=\frac{4}{n(n+2)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$
$$=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=a_1+2\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=a_1+2\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{a_1+2\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=a_1+3=100$$

이므로 $a_1=97$이다.

25. **[출제의도] 수열의 합을 이용하여 수열의 일반항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$S_n={}_{n+2}\mathrm{C}_3=\frac{(n+2)(n+1)n}{6}$이다.

$n=1$일 때, $a_1=S_1=1$이고

$n\ge2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=\frac{(n+2)(n+1)n}{6}-\frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}$$

이므로

$n\ge1$일 때, $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$이다.

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}(a_{k+1}-a_k)$$
$$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{11}-a_{10})$$
$$=a_{11}-a_1$$
$$=66-1=65$$

[다른 풀이]

$$\sum_{k=1}^{10}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=1}^{10}a_{k+1}-\sum_{k=1}^{10}a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{11}a_k-\sum_{k=1}^{10}a_k-a_1$$
$$=S_{11}-S_{10}-S_1$$
$$={}_{13}\mathrm{C}_3-{}_{12}\mathrm{C}_3-{}_3\mathrm{C}_3$$
$$={}_{12}\mathrm{C}_2-{}_3\mathrm{C}_3=65$$

[참고]

$n\ge1$이고 $1\le k\le n$일 때,

${}_{n+1}\mathrm{C}_k={}_n\mathrm{C}_k+{}_n\mathrm{C}_{k-1}$

26. **[출제의도] 수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$A_n=\frac{6n(1+6n)}{2}=3n(6n+1)$

$B_n=A_n-\sum_{k=1}^{2n}3k$

$=3n(6n+1)-3n(2n+1)=12n^2$

이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n(6n+1)}{12n^2}=\frac{3}{2}$

$\therefore p+q=5$

27. **[출제의도] 수열의 규칙성을 찾고 수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$a_n=k$(k는 자연수)라 하면

$k-\frac{1}{2}<\sqrt{n}<k+\frac{1}{2}$

$k^2-k+\frac{1}{4}<n<k^2+k+\frac{1}{4}$

그런데 n은 자연수이므로 $a_n=k$을 만족하는 n은 k^2-k+1부터 k^2+k까지 모두 $2k$개다. 즉,

$a_1=a_2=1$

$a_3=a_4=a_5=a_6=2$

$a_7=a_8=a_9=a_{10}=a_{11}=a_{12}=3$

$\vdots$

$a_{73}=a_{74}=\cdots=a_{90}=9$

$$\sum_{n=1}^{90}a_n=1\cdot2+2\cdot4+3\cdot6+\cdots+9\cdot18$$
$$=\sum_{k=1}^{9}k\cdot2k=2\sum_{k=1}^{9}k^2$$
$$=2\times\frac{9\cdot10\cdot19}{6}=570$$

[참고]

두 정수 $a,\ b\ (a<b)$에 대하여

$a<n<b$을 만족시키는 정수 n의 개수는 $b-a-1$

$a\le n<b$을 만족시키는 정수 n의 개수는 $b-a$

$a<n\le b$을 만족시키는 정수 n의 개수는 $b-a$

$a\le n\le b$을 만족시키는 정수 n의 개수는 $b-a+1$

28~30. '가'형과 동일