21

2019학년도 수능(나형) 30번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,0)$에서의 접선은 모두 x축이다.
(나) 점 $(2,0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 2이다.
(다) 방정식 $f(x)=g(x)$는 오직 하나의 실근을 가진다.

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$$g(x) \le kx-2 \le f(x)$$

를 만족시키는 실수 k의 최댓값과 최솟값을 각각 α, β라 할 때, $\alpha-\beta=a+b\sqrt{2}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점] 5

sol.)

가) $\longrightarrow f(x)=x^2(x-a)$
$g(x)=-(x-2)^2$

나) $\longrightarrow y=f'(t)(x-t)+f(t)$
$0=f'(t)(2-t)+f(t)$
$=(3t^2-2at)(2-t)+t^2(t-a)$
$=t\{-2t^2+(a+6)t-4a\}=0$
$\longrightarrow$ 서로 다른 두 실근을 가져야 함.
$\longrightarrow$ 0 과 0이 아닌 중근 or 0 중근과 다른 실근

i) 0과 0이 아닌 중근
$D=(a+6)^2-32a=0$
$a=2$ or 18
I) $a=2 \longrightarrow f(x)=x^2(x-2)$
II) $a=18 \longrightarrow f(x)=x^2(x-18)$

21

ii) 0 중근과 다른 실근

$-4a=0 \longrightarrow a=0$

$-2t^2+6t=-2t(t-3)$

$a=0 \longrightarrow f(x)=x^3$

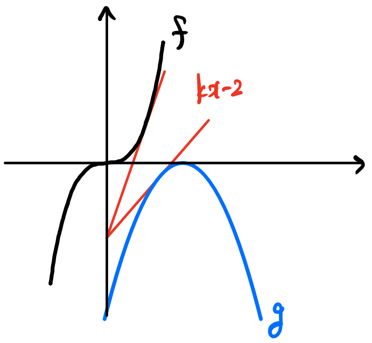
다)

$f(x)=x^2(x-a)$

$a\geq 2$ 면 $f(x)=g(x)$는 세 실근을 가지니 모순

$\therefore f(x)=x^3$

$-(x-2)^2 \leq kx-2 \leq x^3$



i) $y=kx-2$ 가 $y=f(x)$에 접할 때 (k 최대)

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

$=3t^2(x-t)+t^3$

$2=-3t^3+t^3$

$=-2t^3$

$t^3=-1 \longrightarrow t=1$

$\therefore max(k)=3t^2$

$=3$

21

ii) $y=kx-2$ 가 $y=g(x)$ 에 접할 때 (k 최소)

$kx-2=-(x-2)^2$
$x^2+(k+4)x+2=0$
$D=(k+4)^2-8=0$
$\therefore k=4-2\sqrt{2}$ ($\because 4+2\sqrt{2}>3$)

$\therefore \alpha=3,\ \beta=4-2\sqrt{2}$

$\alpha-\beta=-1+2\sqrt{2}$
$\therefore a=-1,\ b=2$
$\therefore a^2+b^2=5$

sol2)
$g(x)=-(x-2)^2$
$f(x)=x^2(x-a)$

다) $\longrightarrow$ $a\geq 2$ 라면 서로 다른 세 실근
$0<a<2$ 라면 점 $(2,0)$ 에서 그은 접선의 개수 : 3개
$a<0$ 라면 점 $(2,0)$ 에서 그은 접선의 개수 : 3개
$\therefore a=0$
$\therefore f(x)=x^3$

⋮

*참고 : 변곡점 (미적분)

- 변곡점의 판정

① $f(x)$ (직선 X, 곡선)

$P(a, f(a))$ 점대칭 $\longrightarrow$ f는 $x=p$ 변곡점

② f 미·가· (직선 X, 곡선)

f'으로 판정 1st. f'극점 $\longrightarrow$ f 변곡점

2nd. 미가 f는 절대로 극점이면서 변곡점일 수 X

  $f'(a)=0$ $\longrightarrow$ $x=a$ 극점 $\longrightarrow$ 변곡점 X

  $f'(a)=0$ $\longrightarrow$ $x=a$ 극점 X $\longrightarrow$ 변곡점

  $f'(a)\neq 0$: 이계도함수로 판별

곱: $(x-a)^{짝수}\cdot f(x)$ $(f(a)\neq 0)$: $(a,0)$ 극점

$(x-a)^{홀수}\cdot f(x)$ $(f(a)\neq 0)$: $(a,0)$ 변곡점

홀수 ≥3

21

2019학년도 수능(나형) 30번

*참고 : 접선 수 변화 경계

- 곡선 그 자체
- 변곡점, 변곡접선
- 점근선