23

함수 $f(x)=x^3+x^2+ax+b$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$$

라 하자. [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

[보기]

ㄱ. 함수 $h(x)$가 $h(x)=(x-1)f(x)$이면 $h'(x)=g(x)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값 0을 가지면 $\int_0^1 g(x)dx=-1$ 이다.

ㄷ. $f(0)=0$이면 방정식 $g(x)=0$은 열린 구간 $(0,1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Sol1)

ㄱ. $h(x)=(x-1)f(x)$
$h'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$
$=g(x)$

ㄴ. $f(-1)=f'(-1)=0$
$f(-1)=-a+b=0$
$f'(-1)=1+a=0$
$\therefore a=b=-1$
$\therefore f(x)=x^3+x^2-x-1$

$g(x)=(x^3+x^2-x-1)+(x-1)(3x^2+2x-1)$
$=4x^4-4x$

$\int_0^1 g(x)dx = x^5-2x^2 \Big|_0^1 = -1$

ㄷ. $\int g(x)dx = (x-1)f(x) + C = G(x)$

$G(0) = G(1) = C$

∴ 롤의 정리에 의하여 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나의 실근 가짐.

sol2) ㄱ을 이용하기

ㄴ.

$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

$h'(x) = g(x)$ (∵ ㄱ) 참고)

$\therefore \int_0^1 g(x)dx = h(1) - h(0)$

$h(1) = 0,\ h(0) = -f(0) = 1$

$\therefore \int_0^1 g(x)dx = 0 - 1 = -1$

ㄷ.

$h'(x) = g(x) \longrightarrow h(x)$: 미.가.

$f(0) = 0 \longrightarrow h(0) = 0$

$h(1) = 0$

$\longrightarrow$ 롤의 정리에 의하여 $g(x)$는 $(0, 1)$에서 실근을 가짐. (∵ $h'(x) = g(x)$)

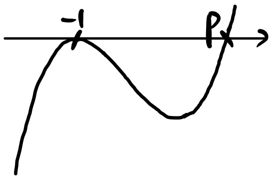
23

sol3) ㄴ) 다르게 풀기

ㄴ.

$f(-1)=f'(-1)=0$

$\longrightarrow f(x)=(x+1)^2(x-p)$



근과 계수 관계 : $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$

$-1-1+p=-1$

$\therefore p=1$

$\therefore f(x)=(x+1)^2(x-1)$

⋮

＊참고 ; 롤의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고
열린구간 (a,b)에서 미분가능할 때

$f(a)=f(b)$ 이면
$f'(c)=0$ 인 c가 적어도 (a,b)에 존재한다.