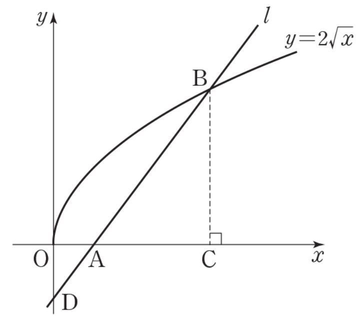
14강 - Ⅰ.적분법 05.부피와 적분 [유제02~유제10]

유제 2014학년도 6월 평가원 B형 9번

02 점 $A(1,\ 0)$을 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 곡선 $y=2\sqrt{x}$와 만나는 점을 B, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C, 직선 l이 y축과 만나는 점을 D라 하자.

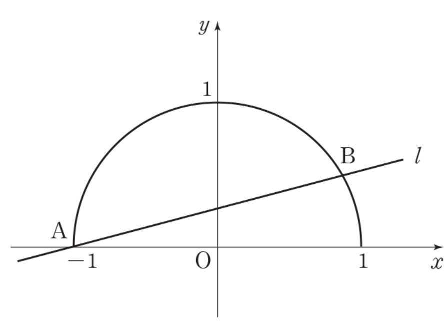


$\overline{AB} : \overline{AD}=3 : 1$일 때, 점 B의 x좌표를 a라 하자. x축, 직선 $x=a$, 곡선 $y=2\sqrt{x}$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는? [3점]

① 32π ② 33π ③ 34π ④ 35π ⑤ 36π

유제

03 그림과 같이 반원 $C_1 : x^2+y^2=1\ (y\geq 0)$과 이 반원 위의 서로 다른 두 점 $A(-1,\ 0)$, B를 지나는 직선 l이 있다. 직선 l의 기울기가 $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점이다.)



보기

ㄱ. 직선 l과 x축이 이루는 예각의 크기는 $15°$이다.

ㄴ. 점 B의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

ㄷ. 반원 C_1과 직선 l로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는 $\frac{\pi}{12}(7+4\sqrt{3})$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

유제 2010학년도 9월 평가원 가형 21번

04 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여

$$\int_0^x (x-t)\{f(t)\}^2\,dt=6\int_0^1 x^3(x-t)^2\,dt$$

를 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=1$, x축, y축으로 둘러싸인 도형을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 $a\pi$라 할 때, a의 값을 구하시오. [4점]

유제

05 역함수가 존재하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0$, $f(1)=3$

(나) $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{3}{4}$

곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=3$으로 둘러싸인 부분을 y축의 둘레로 회전시킨 회전체의 부피는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

기본문제

두 곡선으로 둘러싸인 도형의 회전체의 부피

3 다음 물음에 답하시오.

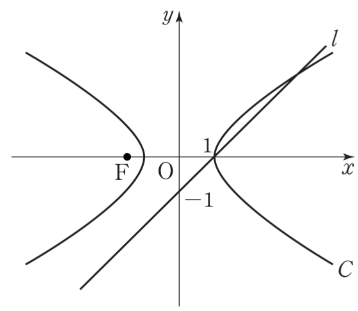
(1) 좌표평면에서 두 곡선 $y=x^2$, $y^2=x$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 구하시오.

(2) $0\le x\le\pi$에서 곡선 $y=x+\sin x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분을 x축 둘레로 회전시킨 입체의 부피를 $\frac{q}{p}\pi^2$이라 할 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

유제

2014학년도 수능 B형 13번

06 그림과 같이 직선 l : $x-y-1=0$과 한 초점이 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$ (단, $c<0$)인 쌍곡선 C : $x^2-2y^2=1$이 있다.



직선 l과 쌍곡선 C로 둘러싸인 부분을 y축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는? [3점]

① $\frac{5}{3}\pi$ ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ $\frac{4}{3}\pi$ ④ $\frac{7}{6}\pi$ ⑤ π

유제

07 곡선 $y=\sqrt{x+4}$와 직선 $y=\frac{1}{4}x+k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피의 최댓값은 $\frac{q}{p}\pi$이다. 이때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

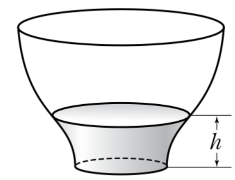
유제

08 곡선 $y=\cos x$를 직선 $y=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이동한 곡선을 $y=f(x)$라 할 때, 두 곡선 $y=\cos x$, $y=f(x)$와 두 직선 $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{5}{3}\pi$으로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피가 $\pi\left(\frac{q}{p}\pi+2\sqrt{3}\right)$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

기본 문제

부피와 정적분의 응용

4 그림과 같은 용기에 깊이가 h가 되도록 물을 넣으면 그 때의 물의 부피 V는 $V=h^3-3h^2+4h$로 나타내어진다고 한다. 수면의 넓이가 최소일 때의 물의 깊이는? (단, $0<h<5$이다.)

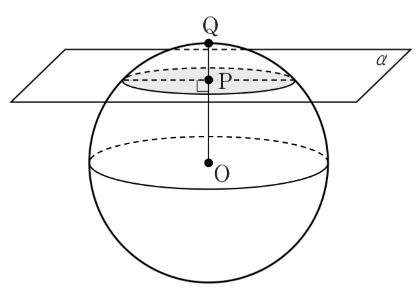


① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$
④ 2 ⑤ $\frac{8}{3}$

유제

09 그림과 같이 중심이 O인 구를 평면 α로 자른 단면은 반지름의 길이가 4인 원이고, 점 O에서 평면 α에 내린 수선의 발을 P, 반직선 OP가 구와 만나는 점을 Q라고 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}=2$이다. 평면 α에 의해 잘려진 두 입체도형 중 부피가 작은 것을 A라고 할 때, A의 부피는 $\frac{q}{p}\pi$이다. 이때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



유제

10 함수 $f(x)=x^3+x$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킨 회전체의 부피를 V_1이라 하고, 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 직선 $x=2$으로 둘러싸인 부분을 y축의 둘레로 회전시킨 회전체의 부피를 V_2라 할 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 방정식 $f(x)=g(x)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. $V_1=\frac{92}{105}\pi$

ㄷ. $V_2=\frac{328}{105}\pi$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ