2023학년도 대학수학능력시험 모의고사 해설지

제 2 교시

수학 영역

〔공통〕

1	②	2	⑤	3	⑤	4	②	5	⑤
6	②	7	②	8	③	9	①	10	④
11	③	12	④	13	④	14	⑤	15	①
16	7	17	7	18	6	19	21	20	12
21	19	22	50						

〔미적분〕

23	①	24	③	25	②	26	⑤	27	②
28	③	29	3	30	12				

[출제의도] 지수법칙을 적용할 수 있는가?

1. $(3^3\times 9^{-\sqrt{2}})^{3+2\sqrt{2}}$의 값은? 〔2점〕

$(3^3\times 9^{-\sqrt{2}})^{3+2\sqrt{2}} = 3^{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = 3$

[출제의도] 다항함수를 미분할 수 있는가?

2. 함수 $f(x)=x^3+2x^2+3$에 대하여 $f'(1)$의 값은? 〔2점〕

$f'(x)=3x^2+4x$, $f'(1)=7$

[출제의도] 등비수열의 일반항을 쓸 수 있는가?

3. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2=1,\ a_4\times a_5=4\sqrt{2}$$

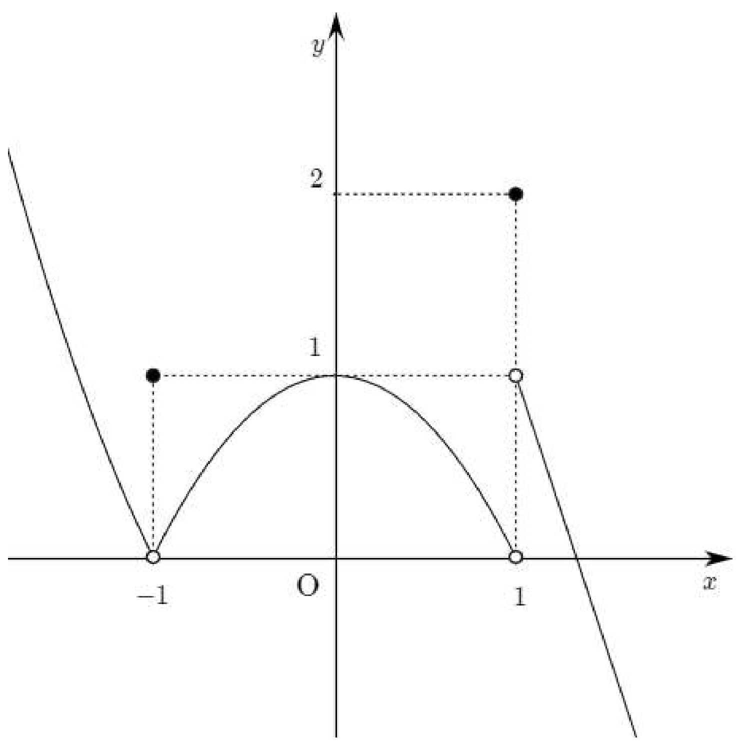
이 성립할 때, a_7의 값은? 〔3점〕

$a_n=a\times r^{n-1}$이라 놓자. $ar=1$, $a^2r^7=4\sqrt{2}$

따라서, $r^5=4\sqrt{2}$, $a_7=a_2\times r^5=4\sqrt{2}$

[출제의도] 함수의 그래프를 이용해 극한값을 구할 수 있는가?

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? 〔3점〕

그림에서 $\lim_{x\to -1} f(x)=0$, $\lim_{x\to 1+} f(x)=1$

$\lim_{x\to -1} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x) = 1$

[출제의도] 수열의 합으로부터 일반항을 구할 수 있는가?

5. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{S_n\}$을

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

라 할 때, $S_n=2n^2-4n$이다. a_{10}의 값은? 〔3점〕

$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-4n-2(n-1)^2+4(n-1)=4n-6\ (n\geq 2)$

$a_{10}=34$

[별해] S_n이 상수항 없는 이차식이므로 a_n은 등차수열이다.

a_n의 공차는 S_n의 이차항 계수의 두 배이므로 $a_n=4n-6$, $a_{10}=34$

[출제의도] 삼각함수로 이루어진 방정식을 풀 수 있는가?

6. $0\leq x\leq 2\pi$에서 $\sin^3 x-\sin x\cos^2 x=0$의 모든 근의 합은? 〔3점〕

$\sin x(\sin^2 x-\cos^2 x)=0$에서, $\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로,

$\sin x(2\sin^2 x-1)=0$, $\sin x=0$ 또는 $\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

주어진 범위에서 근은 $0, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, 2\pi$이므로

구하는 값은 7π

[별해] 대칭성을 이용하면 $\pi\times 3+\frac{\pi}{2}\times 2+\frac{3}{2}\pi\times 2=7\pi$임을 쉽게 알 수 있다.

[출제의도] 극한값을 통해 함수를 추론할 수 있는가?

7. 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$$

이고, $f(1)=3$일 때, $f'(1)$의 값은? [3점]

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$에서, $f(0)=0, f'(0)=1$이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 놓으면 $f(0)=c=0, f'(0)=b=1$

$f(1)=1+a+b+c=2+a=3,\ a=1$

$f(x)=x^3+x^2+x,\ f'(x)=3x^2+2x+1, f'(1)=6$

[출제의도] 적분의 의미를 이해하고 있는가?

8. 2보다 큰 실수 a에 대해 함수

$$f(x)=\int_0^x t(t-2)(t-a)dt$$

의 극댓값이 6일 때, a의 값은? [3점]

정적분으로 정의된 함수이므로 일단 $f(0)=0$을 챙기고 미분해보면,

$f'(x)=x(x-2)(x-a)$이므로 $x=2$에서 극대가 된다.

$f(2)=\int_0^2 t(t-2)(t-a)dt=\int_0^2 (t^3-(a+2)t^2+2at)dt=\frac{4}{3}a-\frac{4}{3}=6$

이상에서 $a=\frac{11}{2}$임을 알 수 있다.

[출제의도] 미분, 적분을 활용하여 속도, 가속도의 관계를 파악할 수 있는가?

Comment. 운동 방향은 $v(t)$의 부호가 변할 때 바뀐다. 속도가 0인데

운동방향은 바뀌지 않는다면?

9. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 속도 v가

$$v=4t^3+at+b\ \ (a, b\text{는 상수})$$

이다. P는 $t=0$일 때 출발한 후 운동방향을 바꾸지 않으며 $t=1$에서 P의 속도가 0이다. $t=0$에서 $t=1$까지 P가 이동한 거리는? [4점]

운동 방향이 바뀌지 않는데 $t=1$일 때 속도가 0이려면 가속도도 0이여야 한다.

$v(1)=4+a+b=0,\ v'(1)=12+a=0.$

$a=-12,\ b=8$

0에서 1까지 P의 이동거리는 $\int_0^1|v(t)|dt=[t^4-6t^2+8t]_0^1=3$

[출제의도] 지수로 표현된 관계식을 해석할 수 있는가?

Comment. 등비수열은 재배열해도 등비수열이다!!

10. 양수 a와 실수 b, $c(b \neq c)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a^b = 3^c$
(나) $b^2 = ac$
(다) $9^{a-b} = 3^{b-c}$

$a+b+c$의 값은? [4점]

$3^{2(a-b)} = 3^{b-c}$에서

$2(a-b) = b-c$, $\dfrac{b-c}{a-b} = 2$

여기서 (나) 조건에 의해 a, b, c가 등비수열을 이루므로
공비를 r이라 하면

$b = ar, c = ar^2$이므로, $\dfrac{ar-ar^2}{a-ar} = r = 2$이다.

$b = 2a, c = 4a$

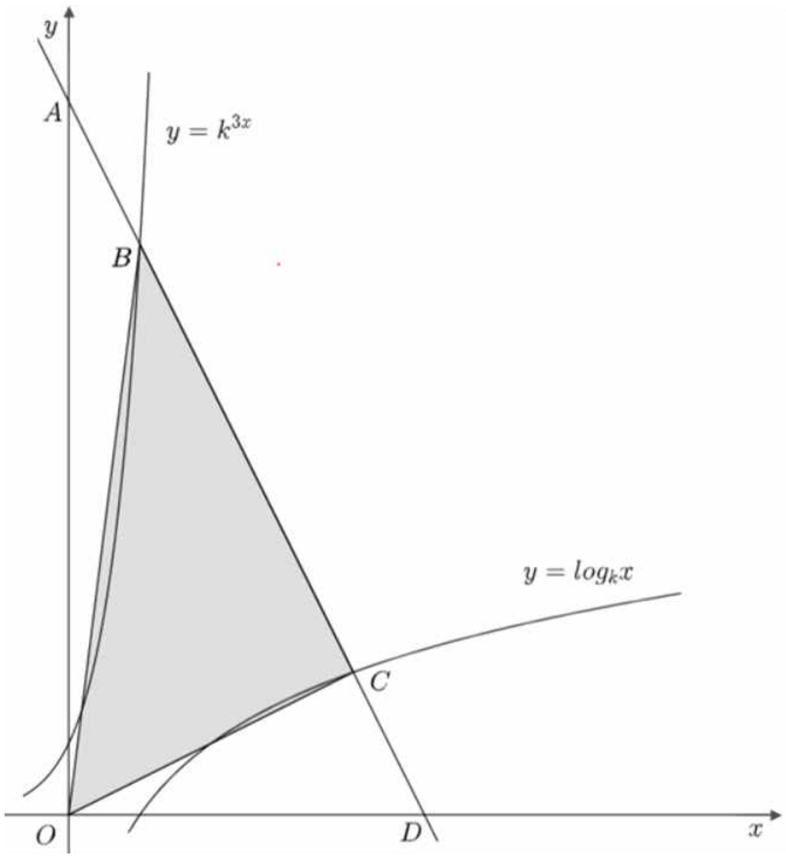
(가) 조건에서 $a^{2a} = 3^{4a}$. 따라서 $a = 9$

$a+b+c = 7a = 63$

[출제의도] 로그와 지수의 성질을 이용하여 그래프의 교점을 찾을 수 있는가?

Comment. 적절한 좌표 설정만 한다면....

11. 1보다 큰 상수 k에 대하여 기울기가 -2인 직선 l과 y축, $y = k^{3x}$, $y = \log_k x$, x축이 만나는 점을 각각 A, B, C, D 라 하자. $\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}}$ 일 때, 삼각형 OBC의 넓이는?(단, O는 원점이다.) [4점]



점 A, B, C, D의 좌표를 각각 $(0, 10a)$, $(a, 8a)$, $(4a, 2a)$, $(5a, 0)$이라 하자.

각각의 함수에 점 B, C를 대입하면 $k^{3a} = 8a$, $\log_k 4a = 2a$.

$\log_k 4a = 2a \Leftrightarrow k^{2a} = 4a$ 에서

$k^a = 2$, $k = 1$, $a = 2$.

직선 l의 방정식은 $2x - y - 10 = 0$이므로 원점에서 직선 l까지의 거리는 $2\sqrt{5}$ 이다.

$\overline{\mathrm{BC}} = 3\sqrt{5}$ 이므로, $\triangle\mathrm{OBC} = 15$

[출제의도] 절댓값이 포함된 함수와 발산하는 점이 포함된 함수의 미분 가능성을 판단할 수 있는가?

Comment. 그냥 첨점이라면 인수 하나면 충분하지만, 발산한다면...?

12. 최고차항의 계수가 a인 사차함수 $f(x)$에 대해 함수 $g(x)$를

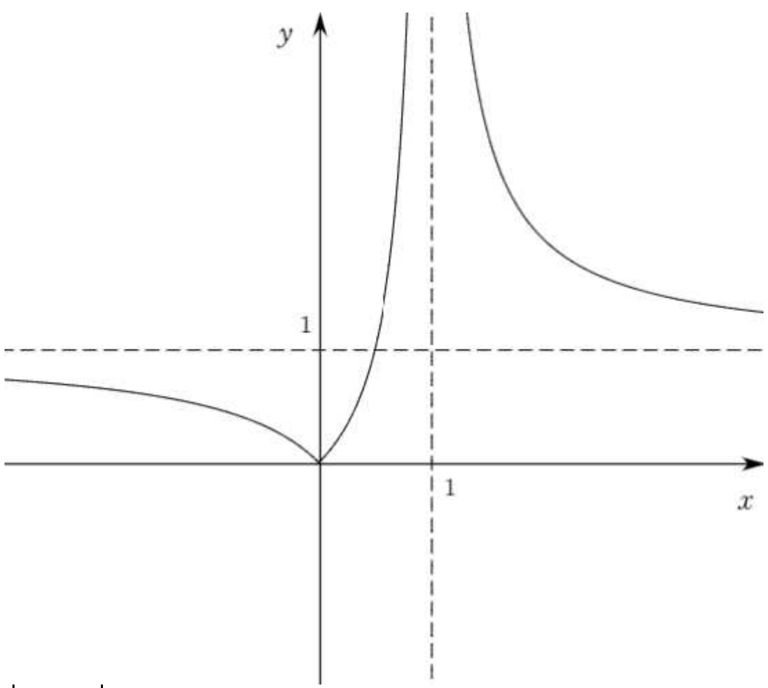
$$g(x)=f(x)\left|\frac{x}{x-1}\right|$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $g(x)$의 최솟값은 $-\frac{1}{4}$이다.

$g(2)$의 값은? [4점]

$y=\left|\frac{x}{x-1}\right|$의 그래프는 다음과 같다.



$\left|\frac{x}{x-1}\right|$는 $x=0$에서 첨점(연속이지만 미분가능하지 않음)을 가지고
$x=1$에서 발산한다.

곱함수의 미분가능성을 적용하면, $f(x)$는 0에서 인수 1개를 가져야 한다.

$x=1$에서는 간단하게 판단할 수 없으므로 식을 써보자.

$\left|\frac{x}{x-1}\right|=\begin{cases}\frac{x}{x-1} & (x\leq 0,\ x>1)\\ -\frac{x}{x-1} & (0<x\leq 1)\end{cases}$ 이다.

$f(x)=x(x-1)^p h(x)$ $(h(1)\neq 0)$로 놓고 $g(x)$가 미분가능하도록 p의 값을 결정해보자.

일단 연속이여야 하므로
$\lim_{x\to 1-}\frac{x^2(x-1)^p h(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}-\frac{x^2(x-1)^p h(x)}{x-1}$에서
$p\geq 2$이여야 함을 알 수 있다.

미분가능성을 확인해보자.

$g(x)=\begin{cases}x^2(x-1)^{p-1}h(x) & (x\leq 0, x>1)\\ -x^2(x-1)^{p-1}h(x) & (0\leq x\leq 1)\end{cases}$

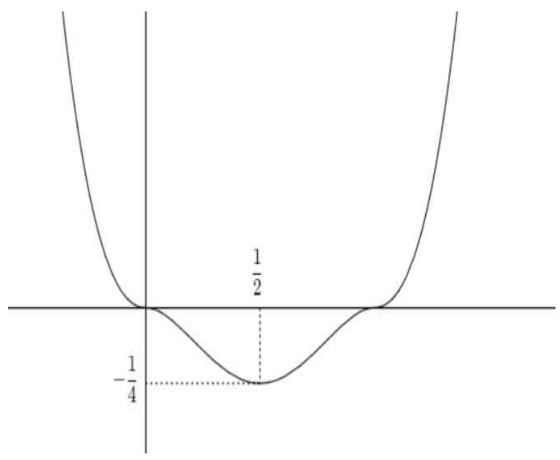
에서 $p=2$이면

$g(x)=\begin{cases}x^2(x-1)h(x) & (x\leq 0, x>1)\\ -x^2(x-1)h(x) & (0\leq x\leq 1)\end{cases}$이고

$g'(1^-)=-h(1)\neq g'(1^+)=h(1)$ (모순)

이상에서 $p\geq 3$이여야 하고, $f(x)$는 사차함수이니 $3\geq p$이여야 한다. $\therefore p=3,\ f(x)=ax(x-1)^3$
그리고 처음 설정했던 $h(x)=a$임을 알 수 있다.

이제 $g(x)=\begin{cases}ax^2(x-1)^2 & (x\leq 0, x>1)\\ -ax^2(x-1)^2 & (0\leq x\leq 1)\end{cases}$임을 알 수 있고 그래프를 그려보면 다음과 같다.



그림에서 알 수 있듯 $h(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $-\frac{1}{4}$를 가진다.

대입하면 $h(\frac{1}{2})=-\frac{1}{16}a=-\frac{1}{4}$
$\therefore a=4,\ h(2)=16$

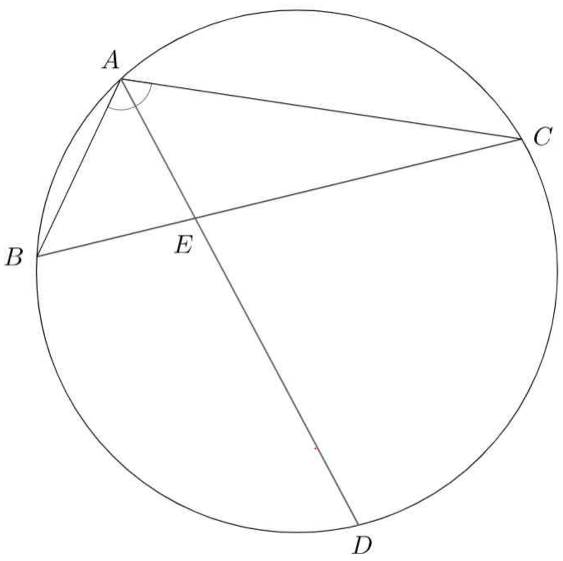
※ 미분가능성은 다음과 같이 확인할 수도 있다.
$\lim_{x\to 1-}\frac{ax^2(x-1)^p h(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1+}-\frac{ax^2(x-1)^p h(x)}{(x-1)^2}$

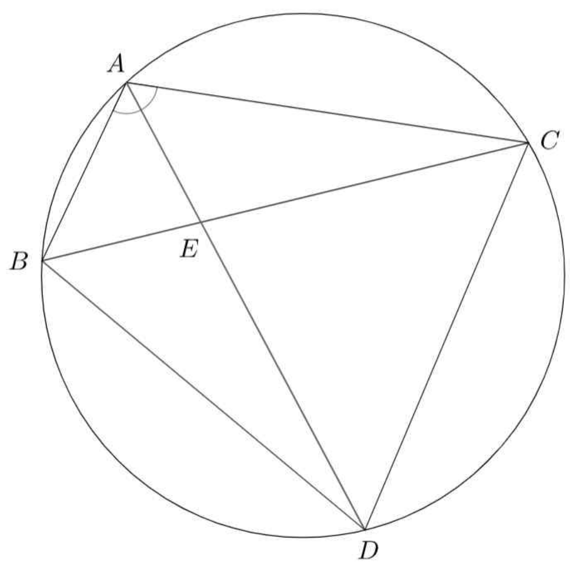
이는 미분계수의 정의에 식을 집어넣고 정리한 결과이다.
역시 이 식이 성립하려면 $p\geq 3$이여야만 한다.

[출제의도] 도형에서 사인법칙, 코사인법칙을 적용할 수 있는가?

Comment. 중학교에서 배운 원의 성질을 잊지 말자.

13. $2\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이고 반지름이 $\frac{25}{8}$인 원에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. $\angle\mathrm{BAC}$의 이등분선이 원과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라고 하자. $\overline{\mathrm{BD}}=5$일 때, $\overline{\mathrm{AE}}$의 길이는? (단, $\angle\mathrm{BAC}>\frac{\pi}{2}$) [4점]





$\overline{\mathrm{BD}}=5$ 이므로, 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\angle\mathrm{BCD}}=\frac{25}{8}\times2,\ \sin\angle\mathrm{BCD}=\frac{4}{5}$

$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{DAC}$ 이므로
$\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{DBC}$(원주각)이고 $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}=5,\ \overline{\mathrm{BC}}=6$

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=1:2$이므로 $\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{EC}}=1:2\ \therefore\overline{\mathrm{BE}}=2,\overline{\mathrm{EC}}=4$

$\overline{\mathrm{ED}}^2=\overline{\mathrm{CD}}^2+\overline{\mathrm{EC}}^2-2\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{EC}}\times\cos\angle\mathrm{ECD}=17$
(코사인법칙)
네 점 A, B, C, D는 원 위의 점이므로
$\overline{\mathrm{BE}}\times\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{DE}},\ \therefore\overline{\mathrm{AE}}=\frac{8\sqrt{17}}{17}$

[출제의도] 미분가능성을 이용하여 주기적으로 반복되는 그래프를 추론하고 정적분의 값을 구할 수 있는가?
Comment. 그래프를 잘 잡고 나면 남은 것은 계산 뿐이다. 그런데 설마 삼차함수의 계수를 미지수로 잡고 직접 계산하여 하진 않겠지? 삼차함수에는 대칭성이 있다!

14. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

이라 하자. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0\le x<k$에서 $f(x)$의 그래프는 삼차함수의 그래프의 일부이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-k)+k$이 성립한다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

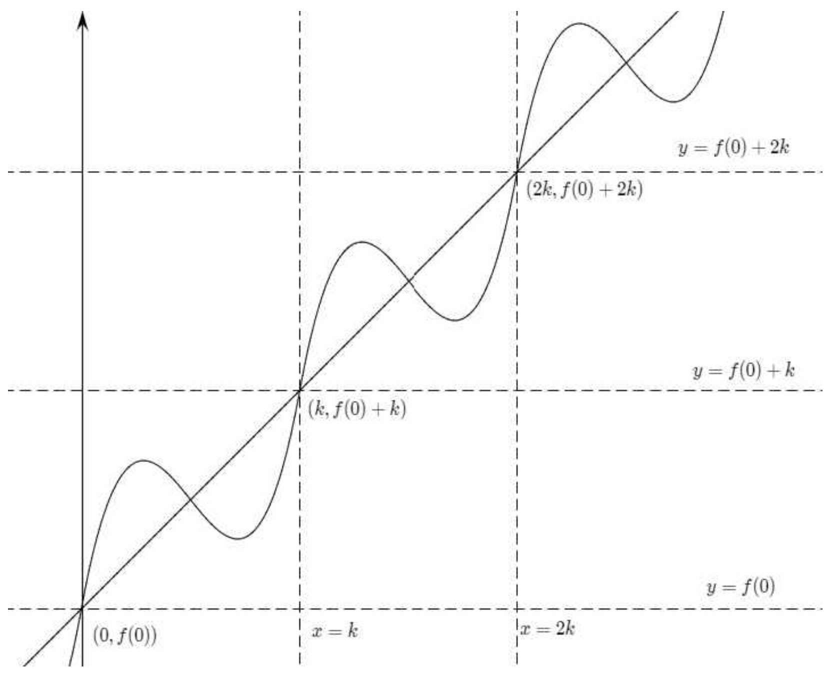
<보 기>

ㄱ. $f\left(\frac{k}{2}\right)=\frac{f(0)+f(k)}{2}$
ㄴ. $f(k)=0$ 일 때, $g(2k)=0$이다.
ㄷ. $\sum_{n=1}^{10}g(nk)=0$ 일 때, $f(3k)+f(4k)=0$이다.

주어진 함수 $f(x)$는 미분가능해야 하므로
다음과 같은 두 식을 써볼 수 있다.

$f(0)+k=f(k),\ f'(0)=f'(k)$

이를 통해 $f(x)$의 그래프가 다음과 같음을 알 수 있다.



ㄱ.
$f'(0)=f'(k)$에서
$f'(x)$는 이차함수이므로 $f'(x)$가 $x=\frac{k}{2}$에 대해 대칭임을 알 수 있다.
따라서 $f(x)$는 점 $(\frac{k}{2}, f(\frac{k}{2}))$에 대해 대칭이다.
이 말은 곧 모든 실수 x에 대해 $f(\frac{k}{2}-x)+f(\frac{k}{2}+x)=2f(\frac{k}{2})$ 임을 의미하고 여기에 $x=\frac{k}{2}$를 대입하면
$f(0)+f(k)=2f(\frac{k}{2})$ (참)

이후 선지를 판별하기 위해 다음과 같은 사실까지 파악해 놓아야 한다.

$f(x)$는 모든 정수 n에 대해 점 $(\frac{nk}{2}, f(\frac{n}{2}k))$에 대한 대칭이다.
또한, $f(nk)=f(0)+nk$로 표현할 수 있다.

ㄴ.
$f(k)=0$에서 $f(0)=-k$임을 알 수 있다.
이 경우 그래프는 점 $(k,0)$에 대해 대칭이므로
$g(2k)=\int_0^{2k} f(x)dx=0$ (참)

ㄷ.
$f(0)=a$라 놓자
$g(k)=\int_0^k f(x)dx$인데, $f(x)$가 점 $(\frac{k}{2}, f(\frac{k}{2}))$에 대칭이므로
$g(k)=k\times f(\frac{k}{2})=k(a+\frac{k}{2})$이다.
같은 방식으로
$g(2k)=2k\times f(k)=2k(a+k)$
$g(3k)=3k\times f(\frac{3k}{2})=3k(a+\frac{3}{2}k)$
⋮
$g(nk)=nk(a+\frac{n}{2}k)=\frac{k^2}{2}n^2+akn$임을 알 수 있다.
따라서
$\sum_{n=1}^{10} g(nk)=\frac{k^2}{2}\times 385+55ak=0$에서
$a=-\frac{7}{2}k$이다.

따라서 $f(3k)+f(4k)=(a+3k)+(a+4k)=2a+7k=0$ (참)

[출제의도] 수열의 점화식을 통해 수열을 파악하고 초기항을 추론할 수 있는가?
Comment. 수열은 수열 그 자체로도 함수로도 볼 수 있어야 한다. 또, 수열이 일정 주기로 반복되려면 어떤 조건을 만족시켜야 하는지도 생각해볼만한 주제다.

15. 수열 $\{a_n\}$이 $0\le a_1\le 2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (0\le a_n<1)\\ 4-2a_n & (1\le a_n\le 2)\end{cases}$$

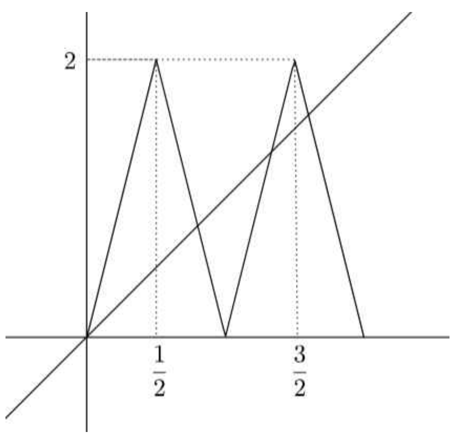
을 만족한다. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+p}$를 만족시키는 p의 최솟값이 m이 되도록 하는 a_1값의 개수를 b_m이라 하자. 예를 들어, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+1}$를 만족시키는 a_1은 0, $\frac{4}{3}$뿐이므로 $b_1=2$이다. $\sum_{k=1}^{5} b_k$의 값은? [4점]

$0\le x\le 2$에서 정의된 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}2x & (0\le x<1)\\ 4-2x & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

라 하자. 여기서 $a_{n+1}=f(a_n)$임을 알 수 있다.
편의상 함수 f를 n번 합성한 것을 $f^n(x)$라 하자.
다음과 같이 정의한다는 말이다. $f^1(x)=f(x)$, $f^{n+1}(x)=f^n(f(x))$
그럼 $a_{n+1}=f(a_n), a_{n+2}=f^2(a_n)\cdots a_{n+p}=f^p(a_n)$임을 알 수 있다.

즉, 모든 자연수 n에 대해 $a_{n+p}=a_n$을 만족시키는 a_1은 곧 $f^p(x)=x$의 근이 되어야 한다.
$f^1(x)=x$의 근은 0, $\frac{4}{3}$임을 확인할 수 있으므로, $b_1=2$.
$f^2(x)=f(f(x))=x$의 근을 찾기 위해 $f(f(x))$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



그림에서 알 수 있듯이 근은 모두 4개인데, 여기서 $x=0$, $x=\frac{4}{3}$인 것은 세면 안된다. ($a_n=a_{n+1}$이 되므로 2가 주기의 최솟값이 아니다.)
따라서 $b_2=4-2=2$이다.

$f^3(x)$의 그래프도 그려보면 $f^3(x)=x$의 근은 모두 8개이고, b_2를 구

할 때와 같은 방식으로 0, $\frac{4}{3}$를 제외하면

$b_3=8-2=6$ 이다.

$f^3(x)$까지 그려보았다면 (혹은 $f^2(x)$까지만 그리고도) $f^n(x)$의 그래프의 규칙성을 느낄 수 있다. $f^n(x)$의 그래프는 2^{n-1}개의 봉우리를 가지는 그래프이다. 따라서 $f^n(x)=x$의 근은 2^n개가 된다.

수열의 주기성에 주목하였다면, $m=4$일때는 꽤나 특이한 일이 벌어질 것임을 파악할 수 있다. $a_{n+4}=a_n$인 수열은 $a_{n+2}=a_n$인 수열의 부분집합이고 우리가 찾는 것은 최소인 p이므로, b_2일 때에 해당하는 값은 제외해야 한다.

$b_4=16-2-2=12$ (0, $\frac{4}{3}$, b_2일때의 값 제외)

$m=5$일때는 특이할 것이 없으므로, $b_5=32-2=30$

5개뿐이니 그냥 더하자.

$\therefore \sum_{k=1}^{5} b_k=2+2+6+12+30=52$

[출제의도] 함수의 극한을 계산할 수 있는가?

16. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x-2}$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)}=7$$

[출제의도] 지수함수의 평행이동을 할 수 있는가?

17. 좌표평면에서 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프는 점 $(3,7)$을 지나고 점근선의 방정식은 $y=5$이다. $m+n$의 값을 구하시오. [3점]

$y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 $2^{x-m}+n$이다. 점근선은 $y=n=5$, 점 $(3,7)$을 대입하면 $2^{3-m}+5=7$에서 $m=2$이다.

$\therefore m+n=7$

[출제의도] 미분을 활용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

18. 곡선 $f(x)=x^3-2x^2+5$와 이차함수 $g(x)=x^2+k$에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오. [3점]

$f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2+5=k.$

이 방정식의 실근의 개수가 2이려면

k가 x^3-3x^2+5의 극댓값이거나 극솟값이여야 한다.

x^3-3x^2+5의 극댓값은 5, 극솟값은 1이므로 모든 실수 k의 값의 합은 6

[출제의도] 수열의 합을 구할 수 있는가?

19. 방정식 $x^2-(2n+1)x+(n^2+n)=0$의 두 실근을 각각 α_n, β_n $(\alpha_n<\beta_n)$라 하자. $\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}-\frac{1}{\beta_n}\right)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

$x^2-(2n+1)x+(n^2+n)=0$에서

$(x-n-1)(x-n)=0$

$\alpha_n=n,\ \beta_n=n+1$

이때, $\alpha_{n+1}=\beta_n$임을 기억하자.

$$\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}-\frac{1}{\beta_n}\right)=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}-\frac{1}{\alpha_{n+1}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_2}\right)+\left(\frac{1}{\alpha_2}-\frac{1}{\alpha_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\alpha_{10}}-\frac{1}{\alpha_{11}}\right)=\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_{11}}$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$$

$\therefore p+q=21$

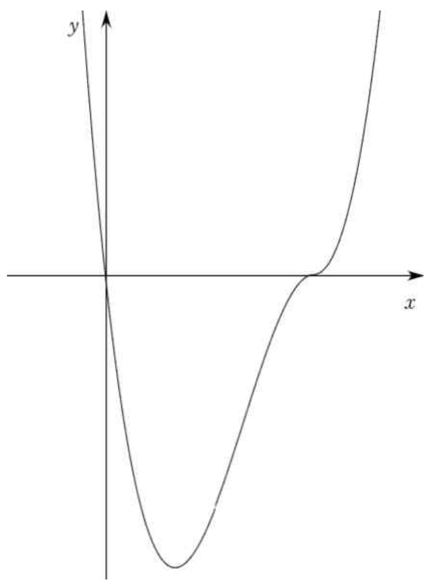
[출제의도] 미분가능성을 이용하여 함수의 개형을 추론할 수 있는가?
Comment. 삼차함수는 최댓값이나 최솟값을 갖지 않는다. 그렇다면 어딘가에서 한번 꺾여야 된다는 건데.... 어딘지는 너무나 뻔하다.

20. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대해

$$\{f(x)-a\}^2=\{g(x)\}^2$$

를 만족한다. $g(x)$의 최솟값이 -4일 때, 가능한 모든 a값의 합은 8이고 곱은 k이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]

주어진 관계식에서 $g(x)=f(x)-a \,\mathrm{or}\, a-f(x)$이다.
$f(x)-a=h(x)$라 하자.
만약 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 계속 $h(x)$이거나 $-h(x)$면, $g(x)$는 최솟값을 갖지 않는다.
따라서 $g(x)$는 어떤 점에서 $h(x)$에서 $-h(x)$로 바뀌거나 그 반대로 바뀌어야 한다.
$g(x)$가 변하는 지점을 $x=\alpha$라 하면, 미분가능해야 하므로 함수가 바뀌는 점은 $h(\alpha)=0$이고, 동시에 $h'(\alpha)=0$인 점이여야 한다.
그런 점이 존재하려면, a가 $f(x)$의 극댓값이거나 극솟값이여야 한다.
$f(x)$의 극솟값을 p라 놓자. $a=p$일 때 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



편의상 $f(0)=p$로 잡아도 일반성을 잃지 않는다.
즉, $h(x)$와 x축의 교점 중 중근이 아닌 것을 0으로 잡겠다는 것이다.
$f(x)=p$의 0이 아닌 한 근을 k라 잡으면 $f(x)=x(x-k)^2+p$

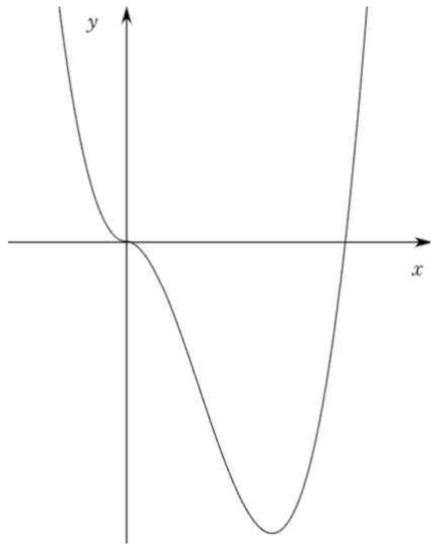
이때 $g(x)=\begin{cases}-x(x-k)^2 & (x\le k)\\ x(x-k)^2 & (x>k)\end{cases}$ 가 된다.

$g(x)$의 최솟값은 $x=\dfrac{k}{3}$일 때 가지므로

$g(\dfrac{k}{3})=-4$에서, $k=3$

여기서, $f(x)$의 극댓값이 $p+4$가 됨을 알 수 있다.

아까 a는 $f(x)$의 극댓값이나 극솟값이여야 한다고 했으므로
$a=p+4$인 경우 $g(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



이 경우 역시 조건을 만족시키므로
a의 값으로 가능한 것은 $p,\ p+4$이다.
따라서, $p+p+4=8$에서 $p=2$이고, 가능한 모든 a값은 $2, 6$이다.
$\therefore 12$

[출제의도] 역함수의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?
Comment. 역함수라고 해서 당황하지 말자, $y=x$에 대해 대칭하면 그 것이 곧 역함수이다. 아래 문제의 경우 좌표를 전부 뒤바꾸어서 $f(x)$에 대해 생각하는게 간편하다.

21. 정의역이 $\{x|-1<x<1\}$인 함수 $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 곡선 $y=g(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(a, g(a))$와 $\mathrm{Q}(b, g(b))$ $(0<a<b)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $ab=1$
(나) $g(b)-g(a)=\frac{1}{3}$

삼각형 OPQ의 넓이가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$g(a)=\alpha, g(b)=\beta$라 하자.
그럼 역함수 관계이므로 $f(\alpha)=a, f(\beta)=b$이다.
$ab=1$에서, $\tan(\frac{\pi}{2}\alpha)\times\tan(\frac{\pi}{2}\beta)=1$이다.
그런데 탄젠트가 서로 역수 관계가 성립한다는 것은 x좌표를 더해서 $\frac{\pi}{2}$가 된다는 것과 같은 말이다.
($\tan(\frac{\pi}{2}-x)=\frac{1}{\tan x}$임을 상기하자.)
따라서, $\frac{\pi}{2}\alpha+\frac{\pi}{2}\beta=\frac{\pi}{2}$이고, $\alpha+\beta=1$이다.
그럼 $\beta-\alpha=\frac{1}{3}$이므로 $\beta=\frac{2}{3}$, $\alpha=\frac{1}{3}$이다.
이어서, $a=\tan(\frac{\pi}{2}\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{3}$이고, $b=\tan(\frac{\pi}{2}\beta)=\sqrt{3}$ 이다.
정리하면 $\mathrm{P}=(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3})$, $\mathrm{Q}=(\sqrt{3}, \frac{2}{3})$이다.
한 점이 원점이므로 신발끈 공식을 이용하여 간단히 넓이를 구할 수 있다. 삼각형의 넓이를 구해주면 $\frac{1}{2}\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{2}{3}-\sqrt{3}\times\frac{1}{3}\right|=\frac{\sqrt{3}}{18}$이므로 $p+q=19$.

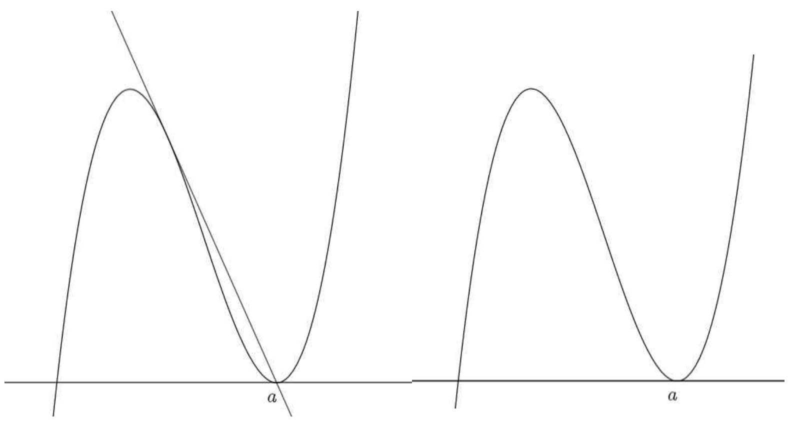
[출제의도] 조건을 통해 삼차함수의 개형을 추론할 수 있는가?
Comment. 어디서 많이 본 것 같다고 생각하고 그렇게 풀기 시작하면... 망한다. 항상 조건을 잘 읽자. 또, 삼차함수에서는 항상 비율관계, 근과 계수의 관계를 자유자재로 활용할 수 있어야 한다.

22. 최고차항의 계수가 1이고, $f(a)=f'(a)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대해 방정식
$$f(x)=t(x-a)$$
의 서로 다른 모든 실근의 곱을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 0이 아닌 실수 α에 대해 $t=\alpha$에서만 $g(t)$가 불연속이다.
(나) $g(\alpha)=\frac{9}{2}$

$f(2)$의 최댓값을 구하시오 (단, a는 상수이다.) [4점]

주어진 상황을 해석하기 위해 케이스를 분류해보자.
case1) $x=a$에서 극솟값을 갖는 경우



$g(t)$가 불연속일 수 있는 상황은 주어진 방정식의 실근의 개수가 변화하는 상황이다. 따라서 주어진 조건에 따라 그래프를 그려보면 다음과 같은 두 상황에서 $g(t)$가 불연속일 수 있음을 알 수 있다. 그런데, $\alpha\neq0$이므로 왼쪽의 상황이 불연속이고 오른쪽 상황은 연속이여야 한다.

$f(x)=0$의 a가 아닌 실근을 b라 하자. 그럼, t가 0^-일때의 극한값은 $a\times a^{-}\times b^{+}$이고, $t=0$일때의 함숫값은 ab, t가 0^+일때의 극한값은 $a\times a^{+}\times b^{-}$이다. 따라서, $a^2b=ab$이고,
$a=0$ or $a=1$ or $b=0$이면 된다.

만약 $a=0$이면 $g(t)=0$이므로 (가) 조건에 모순.

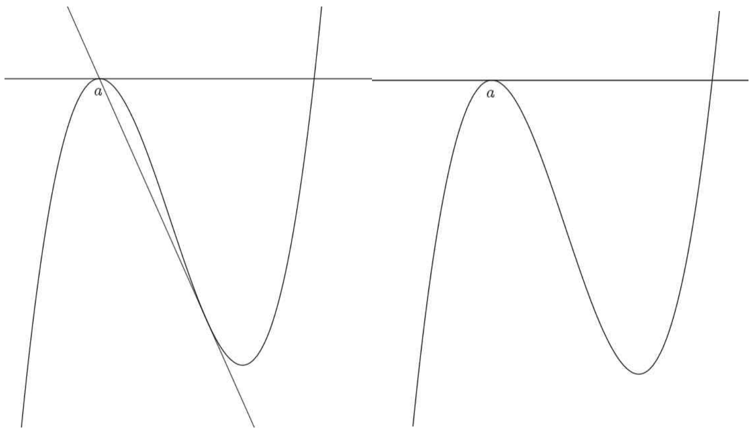
$a=1$인 경우 $f(x)=\alpha(x-a)$의 a가 아닌 교점을 c라 하면 (가) 조건에 의해 $c=\frac{9}{2}$인데, 이는 모순이다.

따라서 $b=0$이여야 한다.
그럼 $f(x)=x(x-a)^2$이다. 왼쪽 그래프에서 접점의 좌표를 알아내자.
역시 접점의 좌표를 c라 하면 $2c+a=2a$에서 $c=\frac{a}{2}$

(근과 계수의 관계)

따라서 $g(\alpha)=\frac{a^2}{2}=\frac{9}{2}$이므로 $a=3$ 이 경우 $f(2)=2$

case2) $x=a$에서 극댓값을 갖는 경우



case1)과 같은 방식으로 $f(x)=0$의 a가 아닌 근을 b라 하면

$a=0$ or $a=1$ or $b=0$이다.

case1)과 마찬가지로 $a=0$일 수 없다.

$a=1$인 경우 $f(x)=\alpha(x-a)$의 a가 아닌 교점을 c라 하면 (가) 조건에 의해 $c=\frac{9}{2}$이다.

$1+\frac{9}{2}\times 2=1\times 2+b$에서, $b=8$이고 $f(x)=(x-1)^2(x-8)$이다.

이 경우 $f(2)=-6$이다.

$b=0$인 경우 case1)과 같은 방식으로 $c=\frac{a}{2}$고 $g(\alpha)=\frac{a^2}{2}=\frac{9}{2}$인데, 이때 a는 음수이므로 $a=-3$이고, $f(x)=x(x+3)^2$이다. 이 경우 $f(2)=50$으로 최대이다.

case3) $x=a$에서 삼중근을 가지는 경우

$t=0$ 이외에서 불연속점이 생기지 않으므로 (가) 조건에 모순

$\therefore 50$

[출제의도] 지수, 로그함수의 극한을 계산할 수 있는가?

23. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\ln(1+6x)}$ 의 값은? [2점]

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\ln(1+6x)}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{\ln(1+6x)}\times\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

[출제의도] 음함수의 미분을 활용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

24. 곡선 $x^2-xy^2+y=3$ 위의 점 $(2,1)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

양변을 미분하면

$2x-y^2-2xy\times\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}=0$

$(2,1)$을 대입하면 $3-3\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{dy}{dx}=1$

[출제의도] 적분을 활용하여 곡선과 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

25. 곡선 $y=\ln x^2$와 x축, 직선 $y=2$으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [3점]

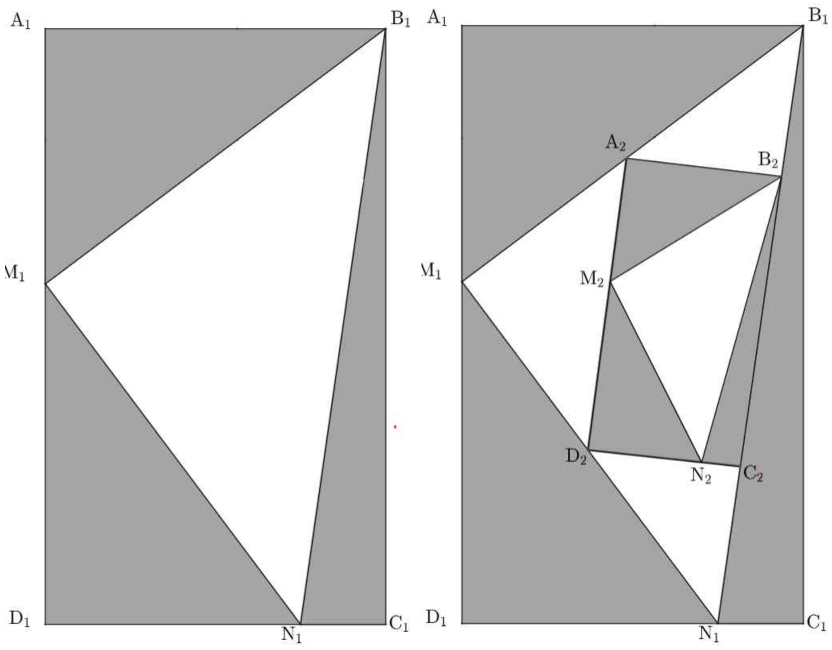
주어진 곡선은 $y=2\ln|x|$로 고쳐쓸 수 있다. 따라서, 구하고자 하는 값은 $y=2\ln x$와 x축, 직선 $y=2$으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

$y=2\ln x$에서 $x=e^{\frac{y}{2}}$

따라서 $2\int_0^2 e^{\frac{y}{2}}dy=4(e-1)$

[출제의도] 도형을 활용하여 등비급수의 값을 구할 수 있는가?

26. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=7$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1을 $3:4$으로 내분하는 점을 M_1이라 하고, 선분 C_1D_1을 $1:3$으로 내분하는 점을 N_1이라 하자. 삼각형 $B_1M_1N_1$의 외부와 사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 B_1M_1위의 점 A_2, 선분 B_1N_1위의 두 점 B_2, C_2와 M_1N_1위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:7$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 색칠하여 얻은 도형을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



$\overline{M_1B_1}=5$, $\overline{M_1N_1}=5$, $\overline{B_1N_1}=5\sqrt{2}$이므로 $B_1M_1N_1$은 직각이등변 삼각형이다. 빠르게 첫 번째 도형의 넓이부터 구해보면 $28-\frac{25}{2}=\frac{31}{2}$

그 다음 $\overline{A_2B_2}=4a$, $\overline{A_2D_2}=7a$로 놓으면, 삼각형 $B_1A_2B_2$, 삼각형 $N_1D_2C_2$ 모두 직각이등변 삼각형이므로, $\overline{N_1C_2}=4a$, $\overline{B_1B_2}=4a$이다.

따라서 $15a=5\sqrt{2}$에서, $a=\frac{\sqrt{2}}{3}$이다.

따라서 첫 항은 $\frac{31}{2}$이고 공비는 $\frac{2}{9}$이다.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{31}{2}}{1-\frac{2}{9}}=\frac{279}{14}$$

[출제의도] 미분계수를 구할 수 있는가?

Comment. 미지수를 설정해도 좋고 역함수로 풀어도 좋다. 둘다 해보자.

27. 함수 $f(x)=\sin^2x\,(0\le x\le\pi)$에 대하여 $f(x)=t$의 두 실근의 차를 $g(t)$라 하자. $g'(\frac{1}{2})\times g(\frac{1}{2})$의 값은? [3점]

(첫 번째 풀이) $f(x)=t$의 한 근을 $a\ (0<a<\frac{\pi}{2})$라 하자.

그럼 나머지 한근은 $\pi-a$이다.

따라서 $g(t)=\pi-2a$

$\sin^2a=t$에서 양변을 t로 미분하면 $2\sin a\cos a\frac{da}{dt}=1$

$a=\frac{\pi}{4}$이면 $\sin^2a=\frac{1}{2}$이므로

$g(\frac{1}{2})=\pi-2a=\frac{\pi}{2}$

$g'(\frac{1}{2})=-2\frac{da}{dt}=-\frac{1}{\sin a\cos a}=-2$

$\therefore g(\frac{1}{2})\times g'(\frac{1}{2})=-\pi$

(두 번째 풀이) $0\leqq x<\frac{\pi}{2}$에서의 $f(x)$의 역함수를 $h(x)$라 하면

$f(x)=t$의 두 근은 각각 $h(t)$와 $\pi-h(t)$이다.

따라서, $g(t)=\pi-2h(t)$이다.

$h(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}$이므로, $g(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}$이다.

$g'(\frac{1}{2})=-2h'(\frac{1}{2})=\frac{-2}{f(\frac{\pi}{4})}=-2$

$\therefore g(\frac{1}{2})\times g'(\frac{1}{2})=-\pi$

[출제의도] 합성함수의 미분을 통해 함수를 추론할 수 있는가?
Comment. 이 문제에서 극대 또는 극소가 될 수 있는 경우는 $f(x)=n\pi$이거나 $f'(x)=0$이면 된다. $f(x)=n\pi$인 경우들에서 무조건 극값이 2개가 나오는데, 총 극값이 2개라고 한다. 그럼...?

28. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\cos f(x)$$

이다. $g(x)$가 $x>0$에서 극대 또는 극소를 가지는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 집합 $\{g(\alpha_n) \mid n$은 자연수$\}$의 원소의 개수는 2이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f(\alpha_{10})$

$|f(\alpha_{30})-f(\alpha_1)|$의 값은? [4점]

$g'(x)=-\sin f(x) \times f'(x)$에서 $g(x)$가 극값을 가지는 x값은 $\sin f(x)=0$을 만족시키거나, $f'(x)=0$을 만족시킨다.
즉, $f(x)=n\pi$(n은 정수)이거나, $f'(x)=0$이면 된다.

(나) 조건에서 이차함수는 $x=\alpha_{10}$에서 최소를 가지고 $f'(\alpha_{10})=0$임을 알 수 있다.

(가) 조건은 $g(x)$의 극값이 두 개라는 조건과 같다.

$f(x)=n\pi$ 일 때, $g(x)=\pm 1$이므로, 두 극값은 1, -1이여야 한다.
($f(x)$가 이차함수이므로, $f(x)=n\pi$의 근이 없을 수는 없다.)

만약 $f(\alpha_1) \neq n\pi$라면, $g(\alpha_1)$이 1, -1이 아닌 다른 극값을 가지게 되므로, $f(\alpha_1)=n\pi$임을 알 수 있다.

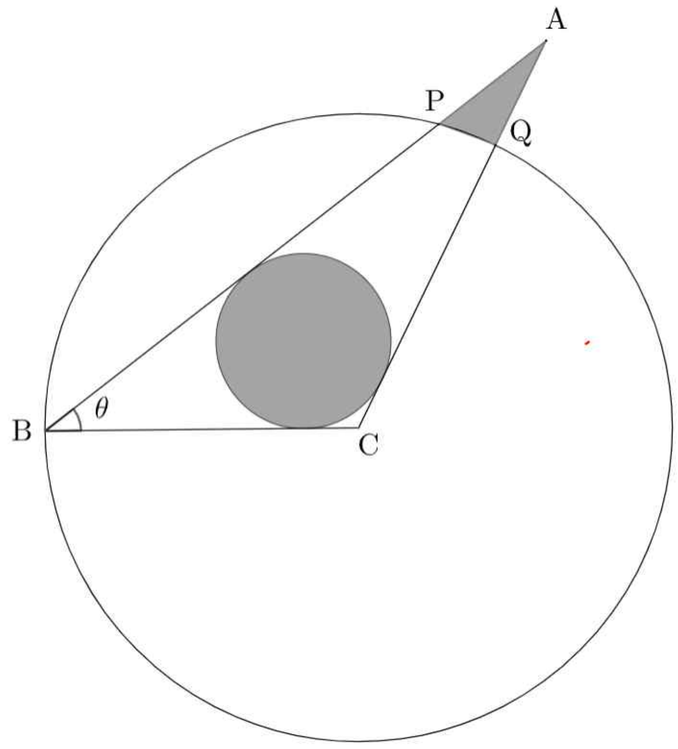
함숫값의 차만 알면 되므로 $f(\alpha_{10})=0$라 두어도 된다.

$f(\alpha_{10})=0$이므로
$f(\alpha_{11})=\pi, f(\alpha_{12})=2\pi \cdots f(\alpha_n)=(n-10)\pi \ (n>10)$
$f(\alpha_9)=\pi, f(\alpha_8)=2\pi \cdots f(\alpha_n)=(-n+10)\pi \ (n<10)$

$\therefore |f(\alpha_{30})-f(\alpha_1)|=11\pi$

[출제의도] 도형에서 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는가?
Comment. 새로운 미지수를 잡는데 주저하지 말자. 그게 설령 각이라 할지라도. 나머지는 코사인법칙과 내접원에 대한 기본에 입각하여 생각하면 어렵지 않게 해결할 수 있다.

29. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=1$, $\angle ABC=\theta$인 삼각형 ABC가 있다. 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원과 삼각형 ABC가 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 ABC의 내접원의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 APQ의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{f(\theta) \times \theta^3}{g(\theta)} = \dfrac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



일단 AC의 길이부터 구해보면 코사인법칙에 의해
$\overline{AC}^2 = 2^2+1^2-4\cos\theta$에서, $\overline{AC}=\sqrt{5-4\cos\theta}$
따라서, $\overline{AQ}=\sqrt{5-4\cos\theta}-1$
또, $\overline{BP}=2\cos\theta$이므로, $\overline{AP}=2-2\cos\theta$이다.
여기서 $\angle BAC=\alpha$로 놓자. 이 각과의 θ의 관계를 밝히기 위해 사인법칙을 적용해주면, $\dfrac{\sqrt{5-4\cos\theta}}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\alpha}$, $\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}=\sin\alpha$이다.

따라서 $g(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\sin\alpha\times(2-2\cos\theta)\times(\sqrt{5-4\cos\theta}-1)$이고,

정리하면, $g(\theta)=\dfrac{\sin\theta(2-2\cos\theta)(\sqrt{5-4\cos\theta}-1)}{2\sqrt{5-4\cos\theta}}$

미리 수렴시킬 수 있는 것은 수렴시키자. 정리하면

$g(\theta)=\dfrac{\theta^5}{2}$으로 정리할 수 있다.

삼각형 ABC의 반지름을 $r(\theta)$라 두면,

$\dfrac{1}{2}\times 2\times 1\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}(2+1+\sqrt{5-4\cos\theta})r(\theta)$

$r(\theta)=\dfrac{2\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}+3}$이므로,

$f(\theta)=\{r(\theta)\}^2\pi=\left\{\dfrac{2\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}+3}\right\}^2\pi$

역시 미리 수렴시켜 정리하면 $f(\theta)=\dfrac{\theta^2}{4}\pi$

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{f(\theta)\times\theta^3}{g(\theta)}=\dfrac{1}{2}\pi,\ p+q=3$

[출제의도] 치환적분, 부분적분을 할 수 있는가?
Comment. 부정적분은 미분하고 대입하고 관찰한다. 역함수가 등장하면 기하적 관점과 치환적분을 모두 고려할 수 있다. 이 문제에서는 기하적 관점을 적용하긴 어려워 보인다. 그럼 남은 길은 하나다.

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^{\ln x}\frac{1}{f(e^t)}dt$$

라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $nf(n)=2n-1\ (n=1,2)$
(나) $g(5)=2$
(다) 모든 실수 x에 대해 $f(x+1)-f(x)=\alpha$

$f(x)$의 역함수를 $h(x)$라 할 때 $\int_1^3 g(h(x))dx=a-\ln b$ 이다. $a+b+2\alpha$의 값을 구하시오. (단 a,b는 자연수이다.) [4점]

(가) 조건에서 $f(1)=1,\ f(2)=\dfrac{3}{2}$

$f(x+1)-f(x)=\alpha$에서 $\alpha=\dfrac{1}{2}$임을 알 수 있다.

이로써 우리는 $f(x)$의 정수에서의 함숫값을 알 수 있게 되었다.
이제 본격적으로 적분을 해보자.

$g(x)=\displaystyle\int_0^{\ln x}\frac{1}{f(e^t)}dt$ 에서 $g(1)=0$임을 알수 있다.

$e^t=u$로 치환하면, $e^t\dfrac{dt}{du}=1,\ dt=\dfrac{1}{e^t}du=\dfrac{1}{u}du$

$g(x)=\displaystyle\int_0^{\ln x}\frac{1}{f(e^u)}du=\int_1^x\frac{1}{uf(u)}du,\ g'(x)=\frac{1}{xf(x)}$

$g'(x)f(x)=\dfrac{1}{x}$

$\displaystyle\int_1^3 g(h(x))dx$ 에서 $h(x)=t$로 치환하면,

$h(x)=t, f(t)=x, f'(t)\dfrac{dt}{dx}=1, dx=f'(t)dt$

$\displaystyle\int_1^3 g(h(x))dx=\int_{h(1)}^{h(3)}g(t)f'(t)dt$

위에서 구한 식을 이용하면

$f(1)=1,\ f(2)=\dfrac{3}{2}\ \cdots f(5)=3$임을 알 수 있다.

$\therefore h(1)=1,\ h(3)=5$

부분적분을 이용하여 적분해주면,

$$\int_1^5 g(t)f'(t)dt = g(5)f(5)-g(1)f(1)-\int_1^5 g'(t)f(t)dt$$

$\therefore 2\times3-0-\int_1^5 \frac{1}{x}dx = 6-\ln5$

$a=5, b=6 \ \therefore a+b+2\alpha=12$