제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\left(\frac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$= \left(2^{2-\sqrt{2}}\right)^{2+\sqrt{2}}$

$= 2^{2^2-2}$

$= 4$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$r>0$

$$a_2+a_4=30, \quad a_4+a_6=\frac{15}{2}$$

r^2

$r^2=\frac{1}{4}$

를 만족시킬 때, a_1 의 값은? [3점]

즉, $r=\frac{1}{2}$

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

$\Rightarrow a\cdot\frac{1}{2}+a\cdot\frac{1}{8}=30$

$\times 8$

$\Rightarrow \cancel{5}a=\cancel{30}\times 8$

6

$\Rightarrow a=48$

4. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=x^2 f(x)$$

라 하자. $f(2)=1$, $f'(2)=3$ 일 때, $g'(2)$ 의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

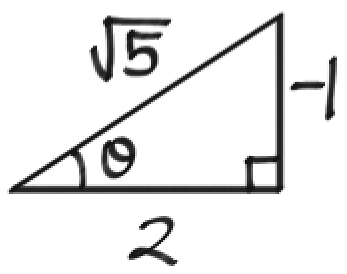
$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$

$\Rightarrow g'(2)=16$

5. $\tan\theta < 0$ 이고 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$-\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$



$\Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

6. 함수 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + ax + 5$ 는 $x = 1$ 에서 극대이고, $x = b$ 에서 극소이다. $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$f'(x) = 6x^2 - 18x + a$

$x = 1 : a - 12 = 0$

$\Rightarrow f'(x) = 6(x^2 - 3x + 2)$

$= 6(x-1)(x-2)$ 즉, $b = 2$

7. 모든 항이 양수이고 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$ 이

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = 2$$

를 만족시킬 때, a_4 의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$a_n = dn \ (d > 0)$

$2 = \sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{a_{k+1} - a_k}$

$= \frac{\sqrt{16d} - \sqrt{d}}{d}$

$= \frac{3}{\sqrt{d}}$ 즉, $d = \frac{9}{4}$

8. 점 $(0, 4)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 그은 접선의 x절편은? [3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

접점 : (t, t^3-t+2)

접선 : $y=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t+2$

$=(3t^2-1)x\underbrace{-2t^3+2}_{=4}$

즉, $t=-1$

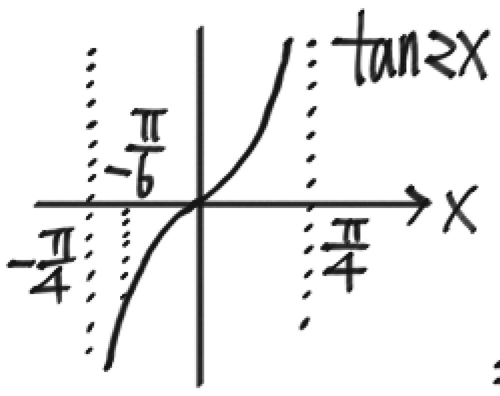
$\Rightarrow$ 접선 : $y=2x+4$

9. 함수

$$f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$$ 주기 : $\frac{\pi}{2}$

가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $a\times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$



$\Rightarrow b<\frac{\pi}{4}$,

$\Rightarrow f$: 감소

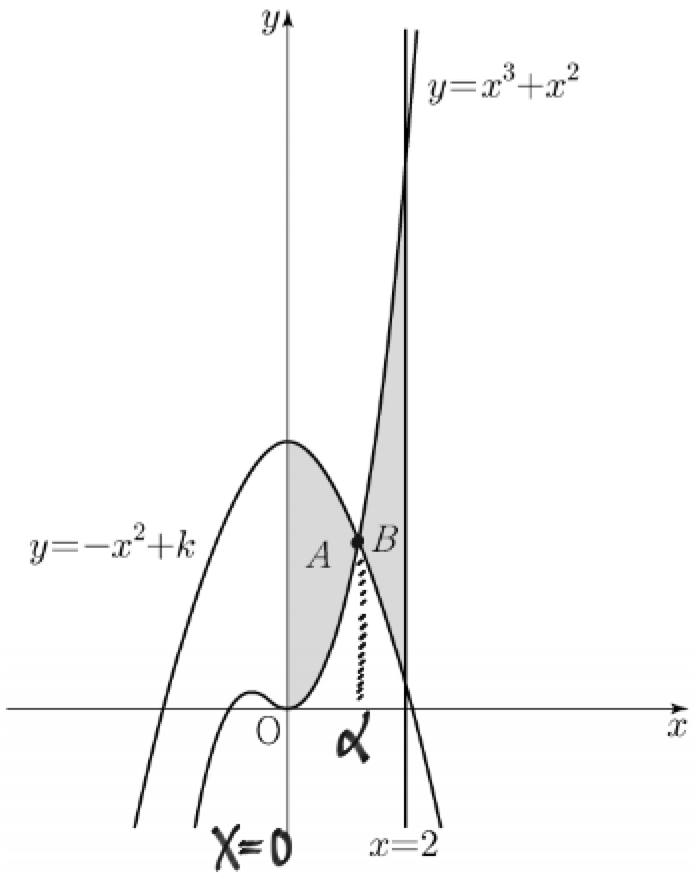
즉, $f(-\frac{\pi}{6})=a+3=7$ 즉, $a=4$

$f(b)=4-\sqrt{3}\tan 2b=3$

$\Rightarrow \tan 2b=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 즉, $b=\frac{\pi}{12}$

10. 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, 상수 k의 값은? (단, $4<k<5$) [4점]

① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$



$0=B-A=\int_0^2 (x^3+2x^2-k)dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-kx\right]_0^2$

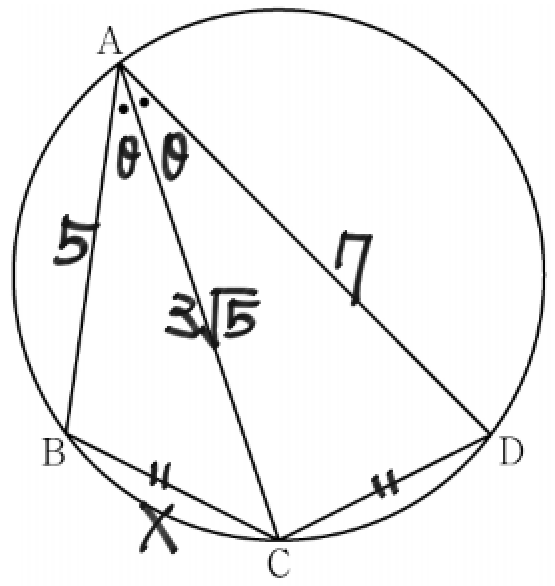
$=4+\frac{16}{3}-2k$

즉, $k=\frac{14}{3}$

11. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AD}}=7$, $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는? [4점]



① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ ④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

1. $x^2=25+45-2\cdot5\cdot3\sqrt{5}\cos\theta$

$=49+45-2\cdot7\cdot3\sqrt{5}\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta=\frac{24}{2\cdot2\cdot3\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \begin{cases}\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{x}{2R}\\ x^2=10\end{cases}$

즉, $R=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $n-1\le x<n$일 때, $|f(x)|=|6(x-n+1)(x-n)|$이다.
> (단, n은 자연수이다.)

열린구간 $(0,4)$에서 정의된 함수 $\int_0^4=\int_0^x+\int_x^4$

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt-\int_x^4 f(t)\,dt = 2\int_0^x f\,dt-\int_0^4 f\,dt$$

극소

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

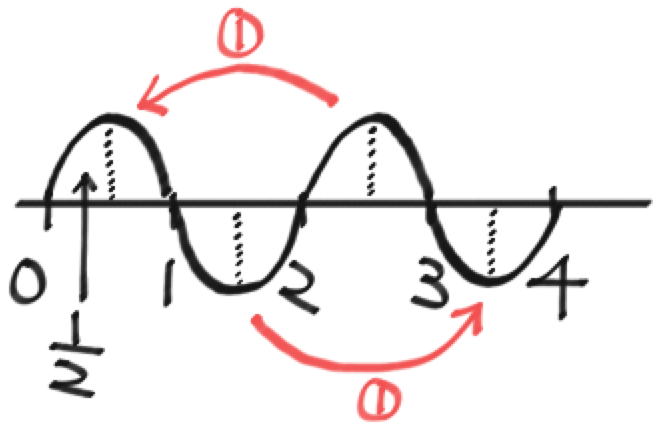
1. $|f(x)|$:

넓이 : $6\cdot\frac{1^3}{6}=1$

2. $x=2$: ① $\int_0^2 f(t)dt=\int_2^4 f(t)dt$

② $g'(x)=2f(x)$: $-\quad 2 \quad +$

$\Rightarrow f(x)$:



$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)dx=-\frac{1}{2}$

13. 자연수 $m\,(m \geq 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f(m)$의 값은? [4점]

① 37　② 42　③ 47　④ 52　⑤ 57

$m^{\frac{12}{n}}$: 정수 $(n \geq 2)$

① m : 제곱수 (4, 9)

⇒ $\frac{24}{n}$: 자연수

⇒ n : $24 = 2^3 \cdot 3^1$의 약수 (1제외)

즉, $f(m) = (3+1)(1+1) - 1 = 7$

② m : 세제곱수 (8)

⇒ $\frac{36}{n}$: 자연수

⇒ n : $36 = 2^2 \cdot 3^2$의 약수 (1제외)

즉, $f(8) = (2+1)(2+1) - 1 = 8$

③ 그 외 (2, 3, 5, 6, 7)

⇒ $\frac{12}{n}$: 자연수

⇒ n : $12 = 2^2 \cdot 3^1$의 약수 (1제외)

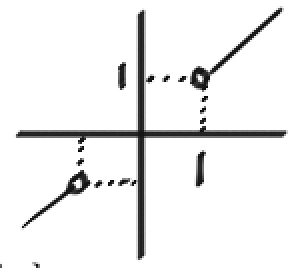
즉, $f(m) = (2+1)(1+1) - 1 = 5$

⇒ $\sum_{m=2}^{9} f(m) = 7 \times 2 + 8 + 5 \times 5$

$= 47$

14. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x) = \begin{cases} x & (x < -1 \text{ 또는 } x > 1) \\ f(x) & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$$



함수 $h(x) = \lim_{t \to 0+} g(x+t) \times \lim_{t \to 2+} g(x+t)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $h(1) = 3$

ㄴ. 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 감소하고 $g(-1) = -2$이면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

1. $\lim_{t \to 0^+} g(x+t)$

$= g(x^+) = \begin{cases} x & (x < -1,\ x \geq 1) \\ f(x) & (-1 \leq x < 1) \end{cases}$

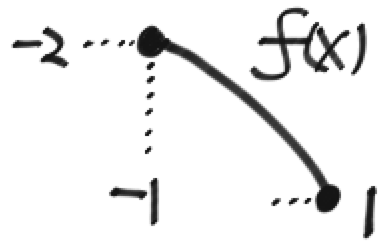
$\Rightarrow g(x+2^+) = \begin{cases} x+2 & (x < -3,\ x \geq -1) \\ f(x+2) & (-3 \leq x < -1) \end{cases}$

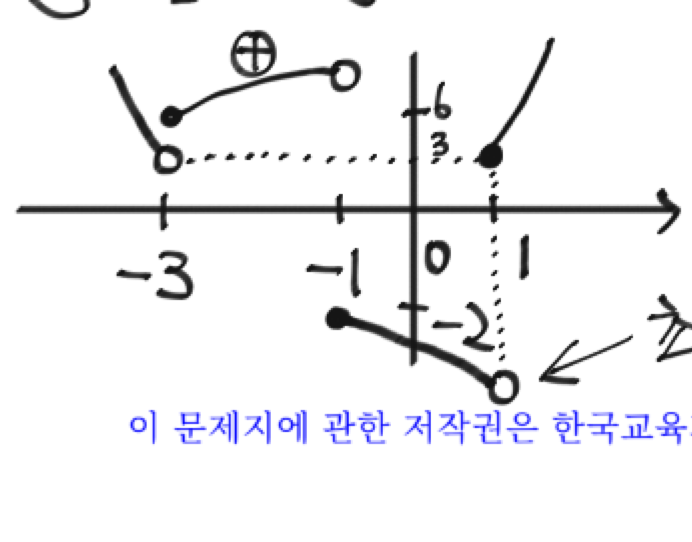
$\Rightarrow h(x) = \begin{cases} x(x+2) & (x < -3,\ x \geq 1) \\ x f(x+2) & (-3 \leq x < -1) \\ (x+2) f(x) & (-1 \leq x < 1) \end{cases}$

ㄱ. (O)

ㄴ. $x = -3, -1, 1$에서 장담X (X)

ㄷ. f : 감소, $f(-1) = -2$





최소X (X)

15. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

> (가) $a_7=40$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$
>
> 이다.

① 216 ② 218 ③ 220 ④ 222 ⑤ 224

$a_7 \to a_6 \to a_5$

$a_7 = 40 = 39+1$

120 ($360 \cdots$, $\beta \cdots$)

α, $40-\alpha$

1. $a_6=120$: $a_8=160$, $a_9=200$

2. $a_6=\alpha<40$

① $\alpha=3n-1$: $a_8=39+3n$

$(n<14)$ $a_9=13+n$ (O)

② $\alpha\neq 3n-1$: $a_8=39+\alpha$

$a_9=79+\alpha$ (X)

$\Rightarrow a_5 \quad a_4 \qquad a_6 \quad a_5+a_4$

$41-3n$

$3(41-3n)$: $40=4(41-3n)$

$n=\frac{31}{3}$ (X)

$6n-42$: $41-3n=2n-14$

$(n>7)$ $\quad a_5 \quad \frac{1}{3}a_4$

즉, $n=11$

$\Rightarrow M=200$, $m=24$

단답형

16. 방정식

$$\log_2(3x+2)=2+\log_2(x-2)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점] 10

$x>2$

$3x+2=4(x-2) \Rightarrow x=10$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=4x^3-2x$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점] 15

$f(x)=x^4-x^2+3$

$\Rightarrow f(2)=15$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55,\quad \sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}b_k$의 값을 구하시오. [3점]

22

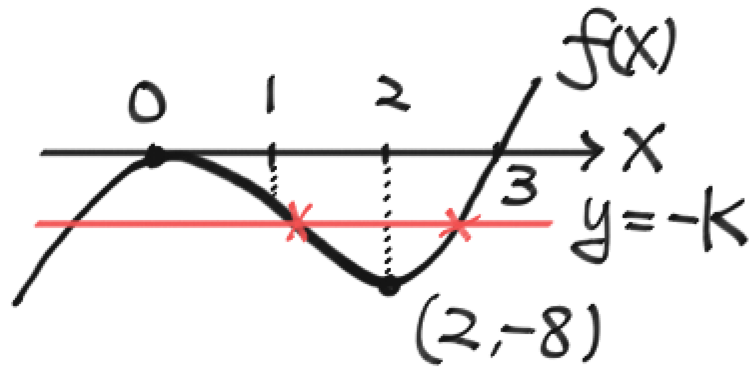
$$\sum_{k=1}^{5}a_k=\frac{55-5\cdot5}{3}=10$$

19. 방정식 $2x^3-6x^2+k=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. [3점]

7

$$f(x)=2x^3-6x^2$$
$$=2x^2(x-3)$$

$\Rightarrow$



$\Rightarrow 0<k<8$

20. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq0)$에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0\leq t\leq2$일 때, $v(t)=2t^3-8t$이다. $\Rightarrow V(2)=0$
>
> (나) $t\geq2$일 때, $a(t)=6t+4$이다.

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [4점]

17

$$V(t)=\begin{cases}2t^3-8t & (0\leq t\leq2)\\ 3t^2+4t-20 & (t>2)\end{cases}$$

$$3t^2+4t-20=(t-2)(3t+10)$$

$$\Rightarrow 거리=\int_0^3|V(t)|dt$$
$$=\int_0^2(8t-2t^3)dt$$
$$+\int_2^3(3t^2+4t-20)dt$$
$$=\left[4t^2-\frac{1}{2}t^4\right]_0^2$$
$$+\left[t^3+2t^2-20t\right]_2^3$$
$$=8-15+24$$
$$=17$$

$x^3 + \cdots$

21. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |3^{x+2}-n| & (x<0) \\ |\log_2(x+4)-n| & (x\ge 0)\end{cases}$$

$\to x=0: |9-n|$

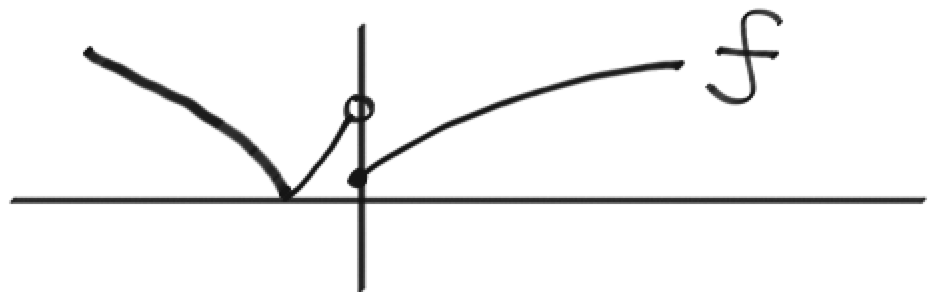
$\to x=0: |2-n|$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

33

1. $n \le 2$

$: f(x)=\begin{cases} |3^{x+2}-n| & (x<0) \\ \log_2(x+4)-n & (x\ge 0)\end{cases}$

$\Rightarrow$ 

$\Rightarrow g(t)\le 3$ (X)

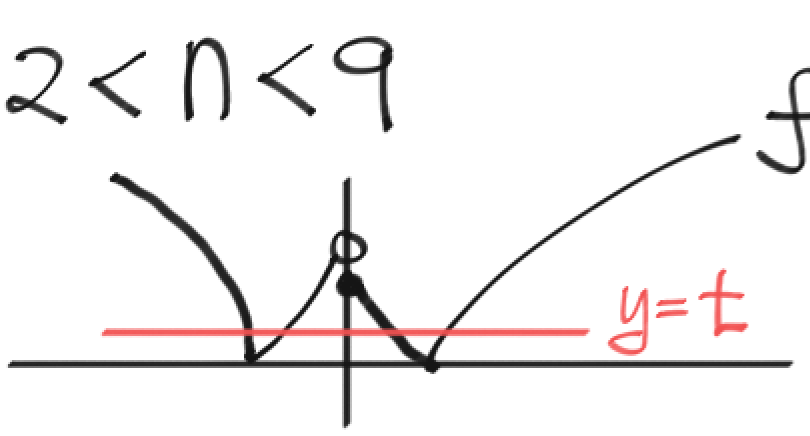
2. $n \ge 9$

$: f(x)=\begin{cases} n-3^{x+2} & (x<0) \\ |\log_2(x+4)-n| & (x\ge 0)\end{cases}$

$\Rightarrow$ 

$\Rightarrow g(t)\le 3$ (X)

3. $2<n<9$

$\Rightarrow$ 

(OK)

즉, $n=3, 4, 5, 6, 7, 8$

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.
>
> (다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

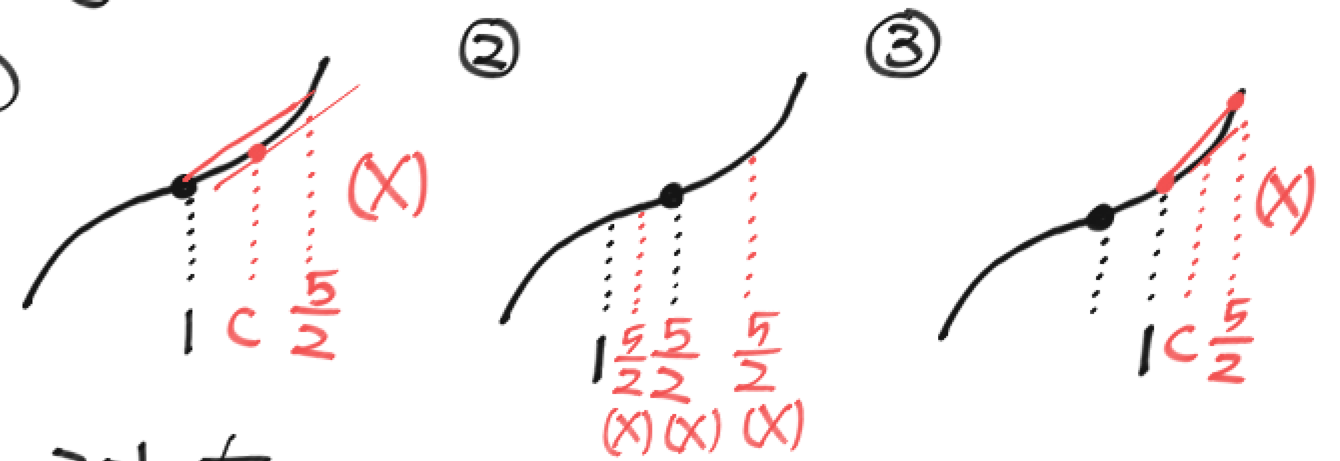
13

1. (가) $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(g(x))$ $\left(\begin{matrix} g(x)\ge\frac{5}{2} \\ g(\alpha)=\frac{5}{2}\end{matrix}\right)$

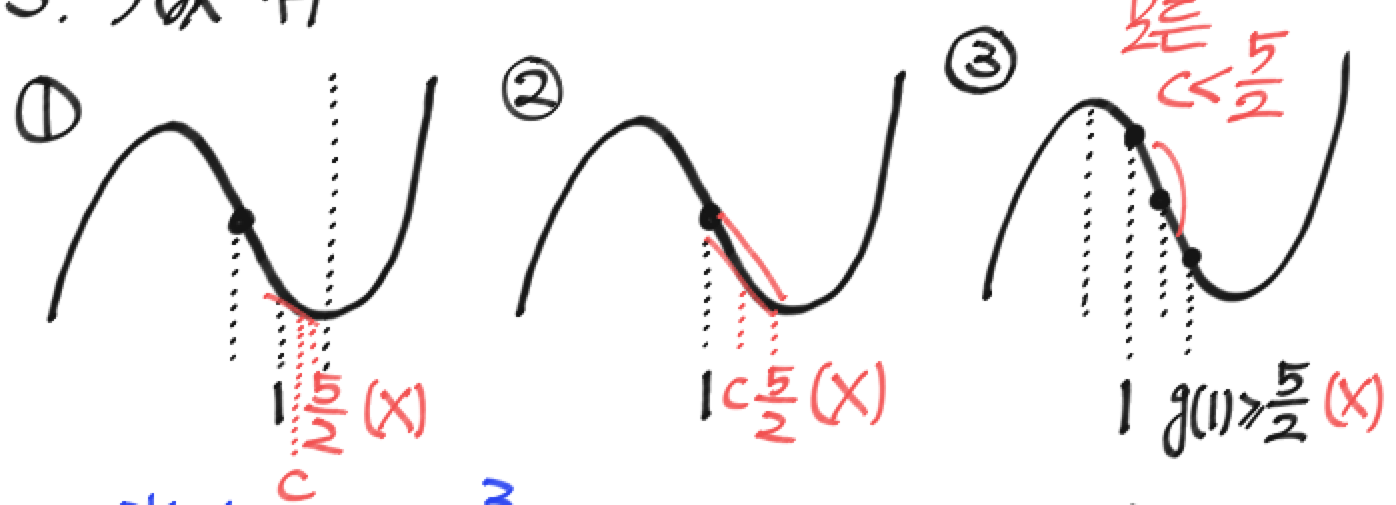
(나) $\quad = f'(c)$

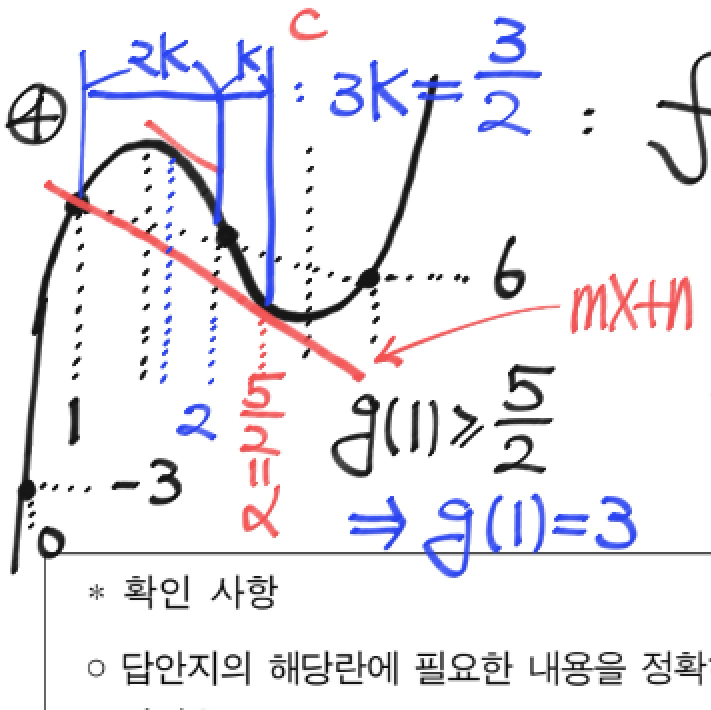
$\xrightarrow{x\to 1} f'(1)=f'(g(1))$ $\left(g(1)\ge\frac{5}{2}\right)$

2. $f(x)$ 항상 증가



3. 극값 有



④ 

$: f(x)=(x-\frac{5}{2})^2(x-1)+mx+n$

$f(0)=n-\frac{25}{4}=-3$

즉, $n=\frac{13}{4}$

$f(3)=\frac{1}{2}+3m+\frac{13}{4}=6 \Rightarrow m=\frac{3}{4}$

$f(4)=\frac{27}{4}+3+\frac{13}{4}=13$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. 다항식 $(x^3+3)^5$의 전개식에서 x^9의 계수는? [2점]

① 30 ② 60 ③ 90 ④ 120 ⑤ 150

$_5C_3(X^3)^3 \cdot 3^2 \Rightarrow 90$

24. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 4000 이상인 홀수의 개수는? [3점]

① 125 ② 150 ③ 175 ④ 200 ⑤ 225

_ _ _ _

4, 5 1, 3, 5

$2 \times 5 \times 5 \times 3 = 150$

25. 흰색 마스크 5개, 검은색 마스크 9개가 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 3개의 마스크를 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 마스크 중에서 적어도 한 개가 흰색 마스크일 확률은? [3점]

① $\frac{8}{13}$ ② $\frac{17}{26}$ ③ $\frac{9}{13}$ ④ $\frac{19}{26}$ ⑤ $\frac{10}{13}$

$a_1 \cdots a_5,\ b_1 \cdots b_9$

$\text{all}: {}_{14}C_3 = \frac{14\cdot 13\cdot 12}{6}$

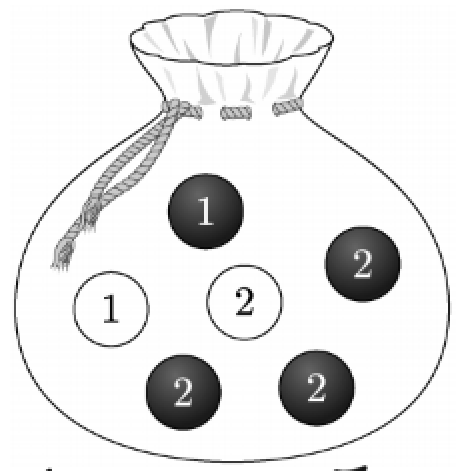
$= 7\cdot 13\cdot 2^2$

$\text{not}: {}_9C_3 = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{6} = 84$

$P = 1 - \frac{3\cdot 7\cdot 2^2}{13\cdot 7\cdot 2^2} = \frac{10}{13}$

26. 주머니에 1이 적힌 흰 공 1개, 2가 적힌 흰 공 1개, 1이 적힌 검은 공 1개, 2가 적힌 검은 공 3개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 3개의 공 중에서 흰 공이 1개이고 검은 공이 2개인 사건을 A, 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수를 모두 곱한 값이 8인 사건을 B라 할 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{20}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{13}{20}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{3}{4}$



$P(A) = \frac{\overset{\text{ㅎ}}{{}_2C_1}\cdot \overset{\text{ㄱ}}{{}_4C_2}}{{}_6C_3} = \frac{12}{20}$

$P(B) = \frac{\overset{\text{ㅎ}}{{}_1C_1}\cdot \overset{\text{ㄱ}}{{}_3C_2} + \overset{\text{ㄱ}}{{}_3C_3}}{{}_6C_3} = \frac{4}{20}$

$P(A\cap B) = \frac{3}{20}$

27. 어느 회사에서 생산하는 샴푸 1개의 용량은 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 16개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $746.1 \le m \le 755.9$이다. 이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 n개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구하는 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$일 때, $b-a$의 값이 6 이하가 되기 위한 자연수 n의 최솟값은? (단, 용량의 단위는 mL이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 70 ② 74 ③ 78 ④ 82 ⑤ 86

$X \sim N(m, \sigma^2)$

$n=16$ $\begin{cases} \bar{x} = 751 \\ \dfrac{19\cancel{6}}{10\cancel{0}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{\cancel{16}}} = \dfrac{\cancel{49}}{\cancel{10}} \end{cases}$

$\Rightarrow \sigma = 10$

$b-a = \cancel{2} \cdot \dfrac{\overset{86}{\cancel{258}}}{10\cancel{0}} \cdot \dfrac{\cancel{10}}{\sqrt{n}} \le \overset{3}{\cancel{6}}$

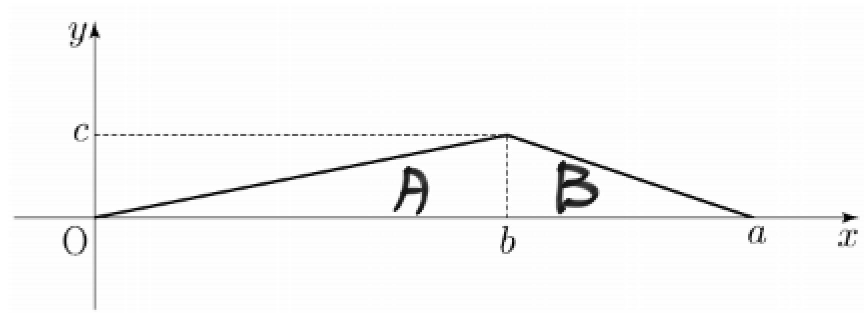
$\Rightarrow \sqrt{n} \geq 8.6$

$\Rightarrow n \geq (8+0.6)^2$

$= 64+9.6+0.36$

$= 73.96$

28. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le a$이고, X의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같다.



$\mathrm{P}(X \le b) - \mathrm{P}(X \ge b) = \dfrac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X \le \sqrt{5}) = \dfrac{1}{2}$일 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

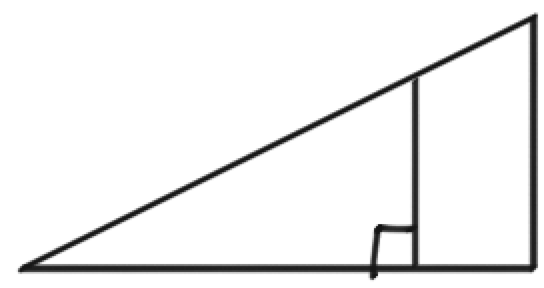
① $\dfrac{11}{2}$ ② 6 ③ $\dfrac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\dfrac{15}{2}$

1. $\dfrac{1}{2}ac = 1 \Rightarrow ac = 2$

2. $\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow A = \dfrac{5}{8}, B = \dfrac{3}{8}$

$\Rightarrow b = \dfrac{5}{8}a$

3.



$C : y = \dfrac{8c}{5a}x$

0 $\sqrt{5}$ $\dfrac{5}{8}a$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{5} \cdot \dfrac{8c}{5a} \cdot \sqrt{5}$

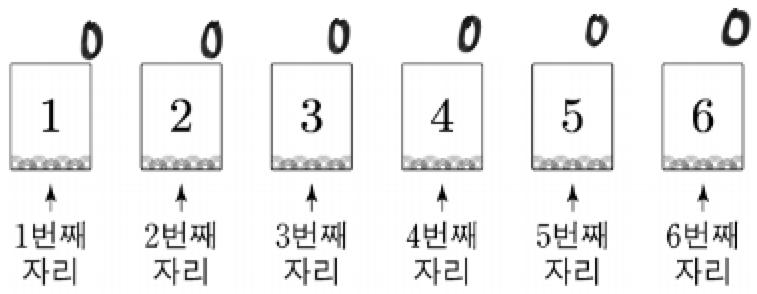
$\Rightarrow a = 8c$ 즉, $c = \dfrac{1}{2}$

$a = 4$

$b = \dfrac{5}{2}$

단답형

29. 앞면에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있고 뒷면에는 모두 0이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드가 그림과 같이 6 이하의 자연수 k에 대하여 k번째 자리에 자연수 k가 보이도록 놓여 있다.



이 6장의 카드와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k이면 k번째 자리에 놓여 있는 카드를 한 번 뒤집어 제자리에 놓는다.
>
> 49

위의 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수일 때, 주사위의 1의 눈이 한 번만 나왔을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

all: 홀 홀 홀 : $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

홀 짝 짝 : ${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow$ all : $\frac{1}{2}$

want : 1, 홀 홀 : $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$

1등장순서

1, 짝 짝 : $3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$

$\Rightarrow$ want : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow \mathbb{P} = \frac{13}{36}$

30. 집합 $X=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) 9 이하의 모든 자연수 x에 대하여 $f(x) \le f(x+1)$이다.
>
> (나) $1 \le x \le 5$일 때 $f(x) \le x$이고, $6 \le x \le 10$일 때 $f(x) \ge x$이다.
>
> (다) $f(6) = f(5) + 6$
>
> 100

1. (가)

$1 \le f(1) \le \cdots \le f(5) \le f(6) \le \cdots \le f(10) \le 10$

2. (나) $f(1) \le 1 \Rightarrow f(1) = 1$

$f(10) \ge 10 \Rightarrow f(10) = 10$

$f(5) \le 5 < 6 \le f(6)$

3. (다) a_n : n의 개수

$f(5)$	$f(6)$	$f(2)$ $f(3)$ $f(4)$	$f(7)$ $f(8)$ $f(9)$
1	7	$1 \times 1 \times 1$	$a_7+a_8+a_9+a_{10}=3$, $a_7 \le 1$, $a_8=3$; $a_7=0$: ${}_3H_3 - 1 = 9$; $a_7=1$: ${}_3H_2 - 1 = 5$; $a_8=2$
2	8	$a_1+a_2=3$, ${}_2H_3 = 4$	$a_8+a_9+a_{10}=3$, $a_8 \le 2$, ${}_3H_3 - 1 = 9$
3	9	$a_1+a_2+a_3=3$, $a_3 \le 2$, $\Rightarrow 9$	$\Rightarrow 4$
4	10	14	$1 \times 1 \times 1$

$\Rightarrow 14+36+36+14 = 100$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)(\sqrt{x+4}+2)}{x} = 4$$

24. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{3k}{n}}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{13}{9}$ ③ $\frac{14}{9}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

$$= \int_1^4 \sqrt{x}\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4$$

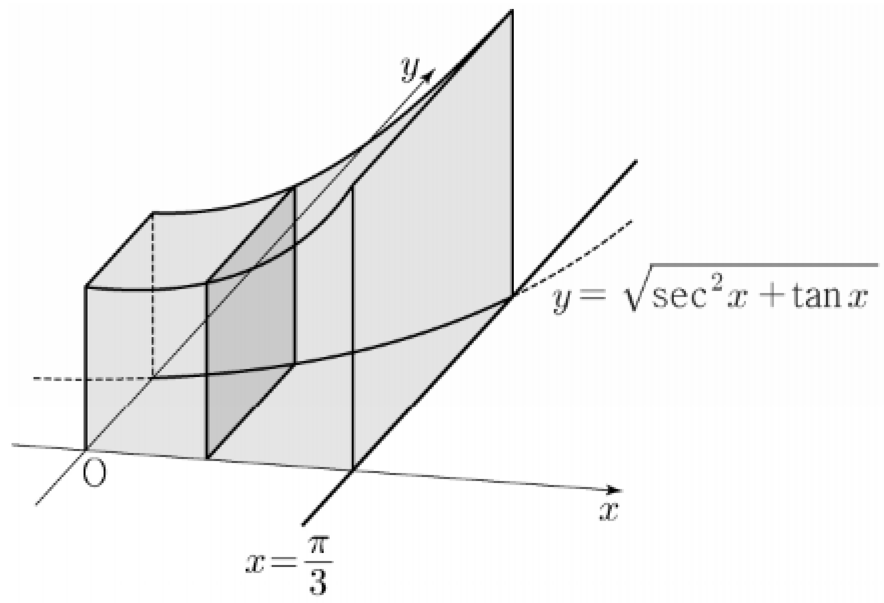
$$= \frac{16-2}{3}$$

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n + 1}{3^n + 2^{2n-1}} = 3$일 때, a_2의 값은? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

$a_n = 6 \cdot 4^n$

26. 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{\sec^2 x + \tan x}$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{3}\right)$와 x축, y축 및 직선 $x = \frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\ln 2}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln 2$ ③ $\sqrt{3} + \frac{\ln 2}{2}$

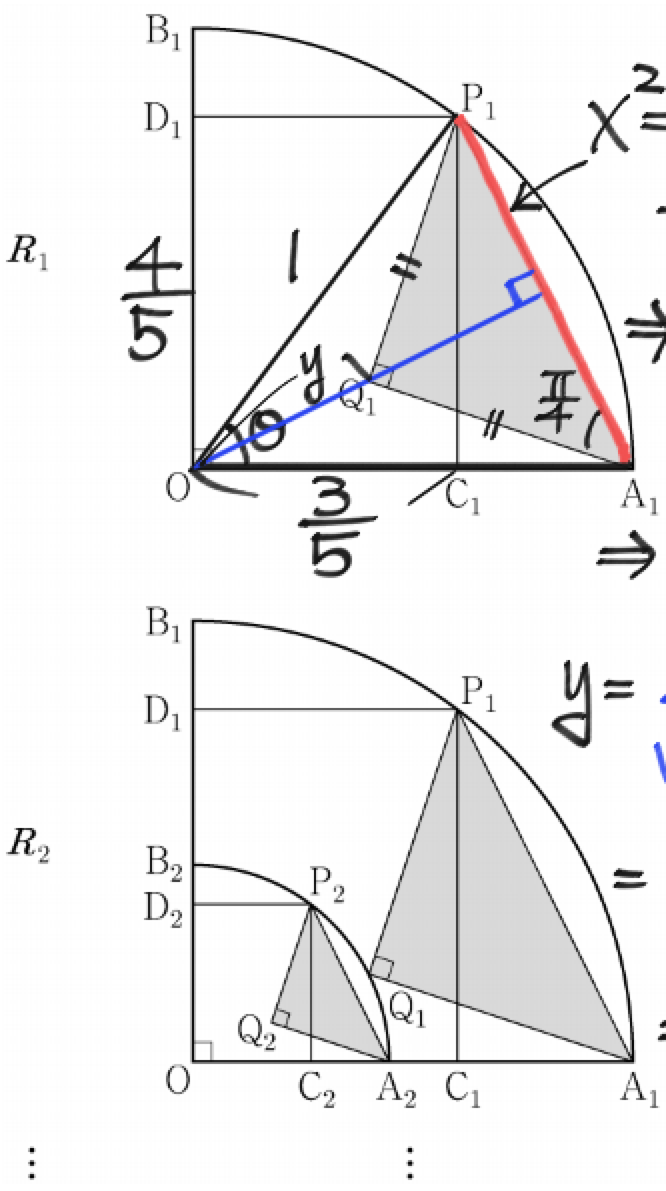
④ $\sqrt{3} + \ln 2$ ⑤ $\sqrt{3} + 2\ln 2$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sec^2 x + \frac{\sec x \tan x}{\sec x}\right) dx$$

$$= \left[\tan x + \ln|\sec x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \sqrt{3} + \ln 2$$

27. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1B_1이 있다. 호 A_1B_1 위에 점 P_1, 선분 OA_1 위에 점 C_1, 선분 OB_1 위에 점 D_1을 사각형 $OC_1P_1D_1$이 $\overline{OC_1}:\overline{OD_1}=3:4$인 직사각형이 되도록 잡는다.
부채꼴 OA_1B_1의 내부에 점 Q_1을 $\overline{P_1Q_1}=\overline{A_1Q_1}$, $\angle P_1Q_1A_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 이등변삼각형 $P_1Q_1A_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2와 선분 OB_1 위의 점 B_2를 $\overline{OQ_1}=\overline{OA_2}=\overline{OB_2}$가 되도록 잡고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{OQ_1}$, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 점 P_2, C_2, D_2, Q_2를 잡고, 이등변삼각형 $P_2Q_2A_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



$x^2 = 1+1-2\cdot1\cdot1\cdot\frac{3}{5}$
$\Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{5}}$
$\Rightarrow S_1 = \frac{1}{5}$

$y = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

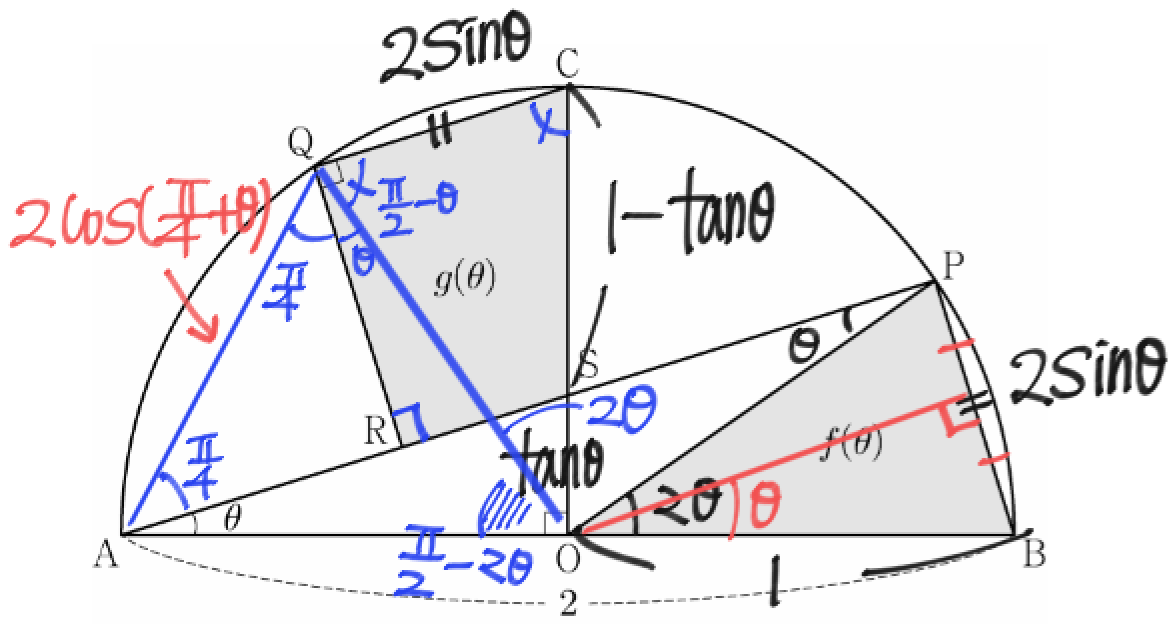
즉, 공비 $= \frac{1}{5}$

⋮ ⋮

① $\frac{9}{40}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{11}{40}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{13}{40}$

$\Rightarrow \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$

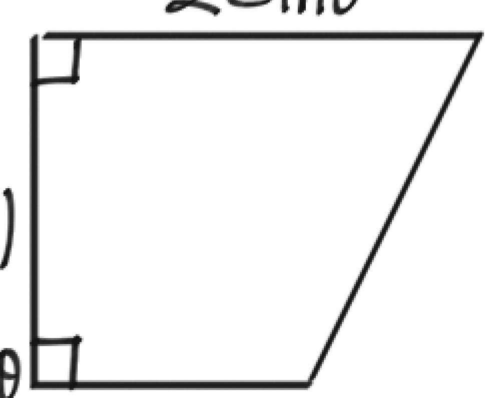
28. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 $\angle AOC=\frac{\pi}{2}$인 점 C가 있다. 호 BC 위에 점 P와 호 CA 위에 점 Q를 $\overline{PB}=\overline{QC}$가 되도록 잡고, 선분 AP 위에 점 R를 $\angle CQR=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡는다. 선분 AP와 선분 CO의 교점을 S라 하자. $\angle PAB=\theta$일 때, 삼각형 POB의 넓이를 $f(\theta)$, 사각형 CQRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(\theta) = \frac{1}{2}\sin2\theta = \sin\theta\cos\theta$

$g(\theta)$:



$\sec\theta - \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)$
$= \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta + \sin\theta$
$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \sin\theta$

$\Rightarrow 2g(\theta) = (\cos\theta-\sin\theta)(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}+3\sin\theta)$
$= -2\sin^2\theta - \frac{\sin^3\theta}{\cos\theta} + 3\cos\theta\sin\theta$

$\Rightarrow 3f(\theta)-2g(\theta) \xrightarrow{\theta\to0} 2\theta^2+\theta^3$

단답형

29. 세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+6}{e^{x}}=1$
>
> (나) $f(\ln 2)=0$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_{0}^{14}g(x)dx=p+q\ln 2$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

26

1. (가) $e^{x}=t$

$: \lim_{t\to0^{+}}\frac{at^{2}+bt+c+6}{t}=1$

$\Rightarrow b=1,\ c=-6$

2. (나) $4a+2-6=0\Rightarrow a=1$

3. $f(x)=e^{2x}+e^{x}-6$

$f(\alpha)=14\Rightarrow(e^{\alpha}+5)(e^{\alpha}-4)=0$

$\Rightarrow \alpha=2\ln 2$

$\Rightarrow\int_{0=f(\ln 2)}^{14=f(2\ln 2)}f^{-1}(x)dx$

$=14\cdot2\ln2-\int_{\ln2}^{2\ln2}(e^{2x}+e^{x}-6)dx$

$=28\ln2-\left[\frac{1}{2}e^{2x}+e^{x}-6x\right]_{\ln2}^{2\ln2}$

$=34\ln2-8-4+2+2$

$=34\ln2-8$

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=e^{\sin\pi x}-1$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)=g(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.
>
> (나) 열린구간 $(0, 3)$에서 방정식 $h(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

$f(3)=\frac{1}{2}$, $f'(3)=0$일 때, $f(2)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

31

1. $f(x)=a(x-3)^{2}(x-\alpha)+\frac{1}{2}\ (a>0)$

2. (가) $h(0)=g(f(0))=0$

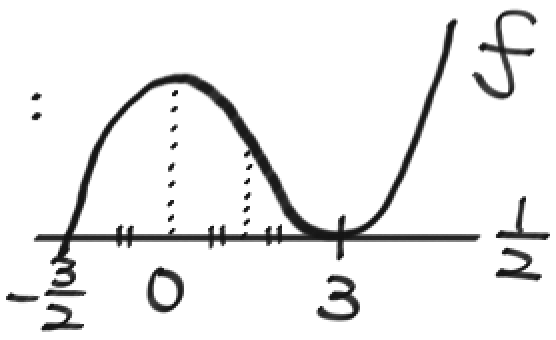
$\Rightarrow \sin\pi f(0)=0$ 즉, $f(0)$: 정수

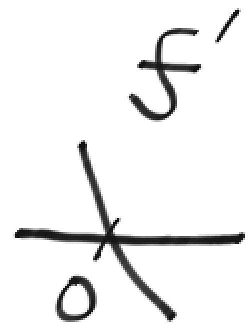
$h'(x)=e^{\sin\pi f(x)}\cdot\cos\pi f(x)\cdot\pi f'(x)$

$\oplus$

$x=0$: 1 or -1

즉 $f'(0)=0$:



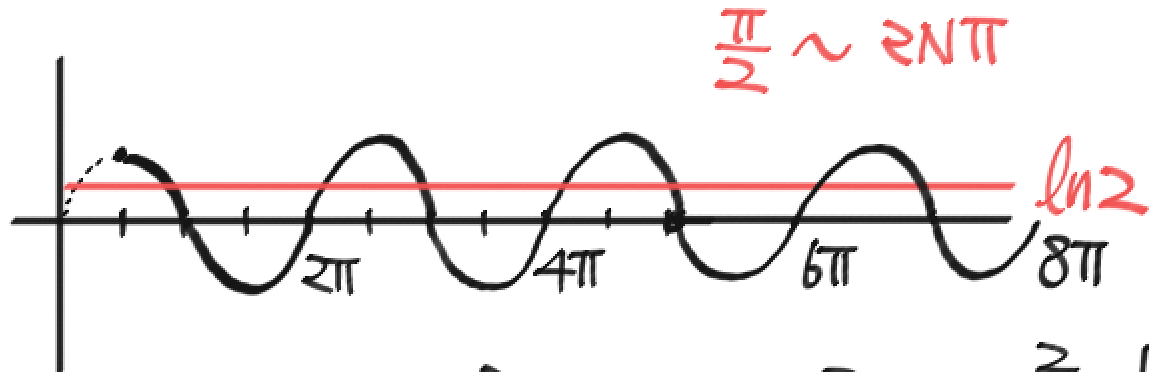


$\Rightarrow f(0)=2N$ (N: 정수)

3. (나) $h(x)=1\Rightarrow\sin\pi f(x)=\ln2$

$\frac{\pi}{2}\sim2N\pi$

$\Rightarrow$



$\Rightarrow f(0)=8$, 즉 $f(x)=a(x+\frac{3}{2})(x-3)^{2}+\frac{1}{2}$

$\hookrightarrow a=\frac{5}{9}$

$\Rightarrow f(2)=\frac{5}{9}\cdot\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=\frac{44}{18}=\frac{22}{9}$

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

홀수형

5지선다형

$y=z=0$

23. 좌표공간의 점 A$(2,\ 2,\ -1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하자. 점 C$(-2,\ 1,\ 1)$에 대하여 선분 BC의 길이는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$B(2,-2,1) \Rightarrow \overline{BC}=5$

24. 초점이 F$\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$이고 준선이 $x=-\frac{1}{3}$인 포물선이 점 $(a,\ 2)$를 지날 때, a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$y^2=\frac{4}{3}x$

$\Rightarrow 4=\frac{4}{3}a$

25. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$일 때, 이 타원의 두 초점 사이의 거리는? (단, a, b는 양수이다.) [3점]

① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{7}$

$$\begin{cases} \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \\ \frac{2x}{a^2}+\frac{1}{b^2}y=1 \Rightarrow -\frac{1}{2}=\frac{-2b^2}{a^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2=4b^2$$

$$\Rightarrow b^2=2,\ a^2=8$$

26. 좌표평면에서 세 벡터

$$\vec{a}=(2,\ 4),\quad \vec{b}=(2,\ 8),\quad \vec{c}=(1,\ 0)$$

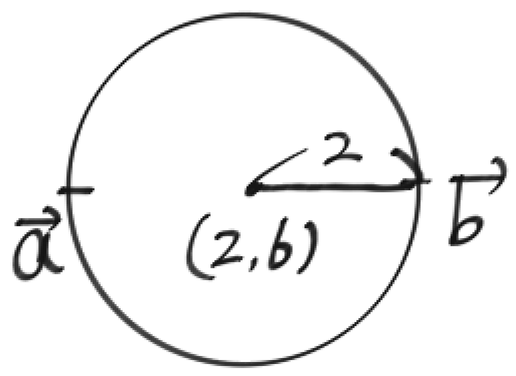
에 대하여 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$가

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0,\quad \vec{q}=\frac{1}{2}\vec{a}+t\vec{c}\ (t\text{는 실수})$$

를 만족시킬 때, $|\vec{p}-\vec{q}|$의 최솟값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

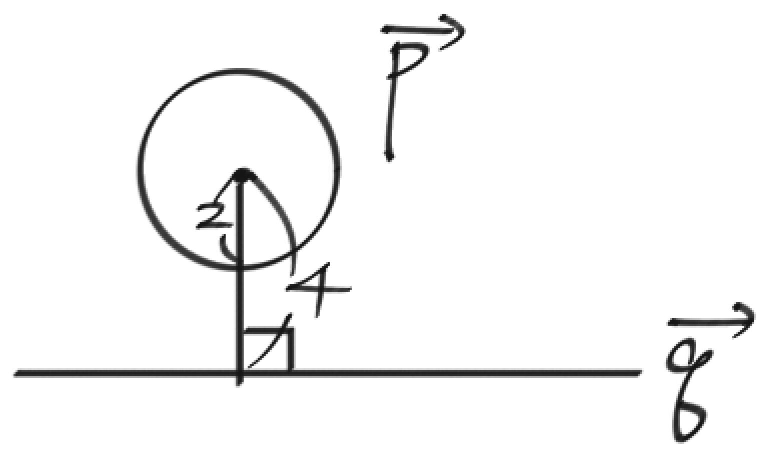
$\vec{p}$:



$(x-2)^2+(y-6)^2=4$

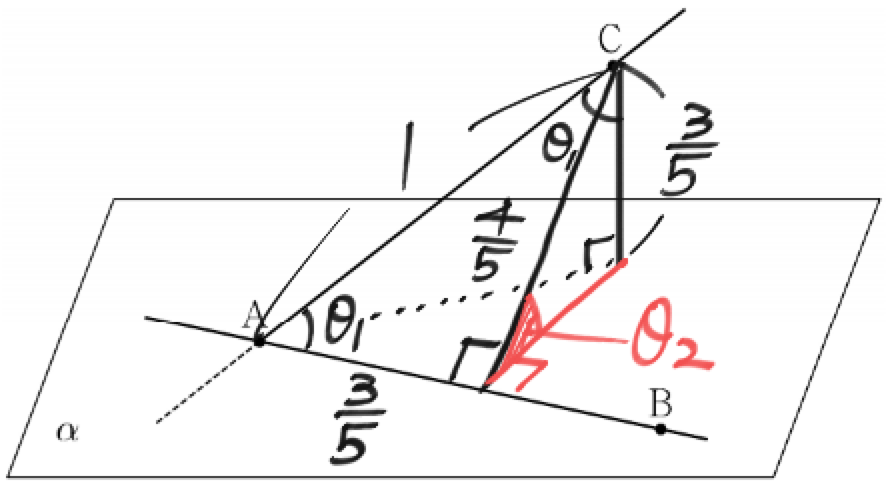
$\vec{q}$: $(1,2)+t(1,0) \Rightarrow y=2$

→



27. 좌표공간에 직선 AB를 포함하는 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 C에 대하여 직선 AB와 직선 AC가 이루는 예각의 크기를 θ_1이라 할 때 $\sin\theta_1 = \frac{4}{5}$이고, 직선 AC와 평면 α가 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2} - \theta_1$이다. 평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ_2라 할 때, $\cos\theta_2$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{6}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{8}$



$\sin\theta_2 = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{7}}{4}$

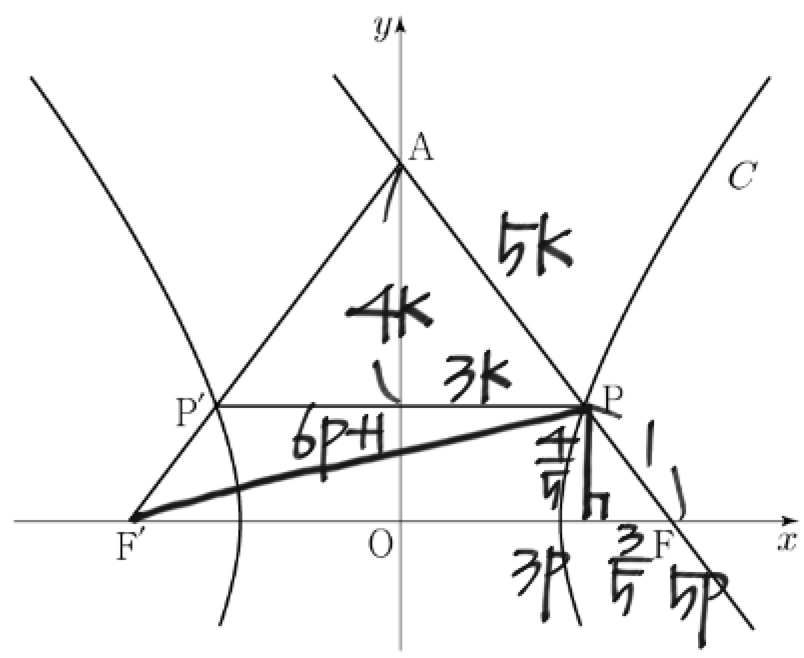
28. 두 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 C와 y축 위의 점 A가 있다. 쌍곡선 C가 선분 AF와 만나는 점을 P, 선분 AF$'$과 만나는 점을 P$'$이라 하자.
직선 AF는 쌍곡선 C의 한 점근선과 평행하고

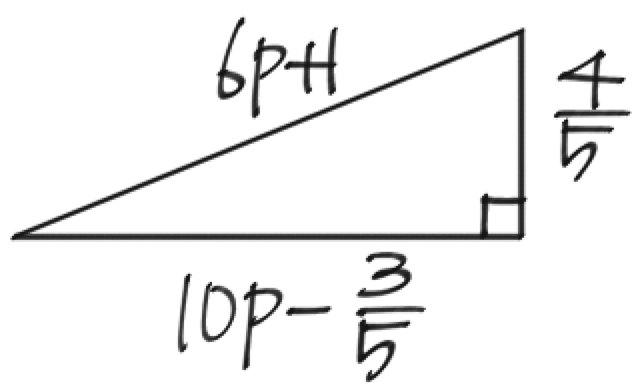
$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PP'}} = 5 : 6$, $\overline{\mathrm{PF}} = 1$

일 때, 쌍곡선 C의 주축의 길이는? [4점]

$\hookrightarrow \begin{cases} a = 3p \\ b = 4p \end{cases}$

① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{29}{12}$ ⑤ $\frac{5}{2}$





$36p^2 + 12p + \cancel{1} = 100p^2 - 12p + \cancel{1}$

$\Rightarrow p = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow 6p = \frac{9}{4}$

단답형

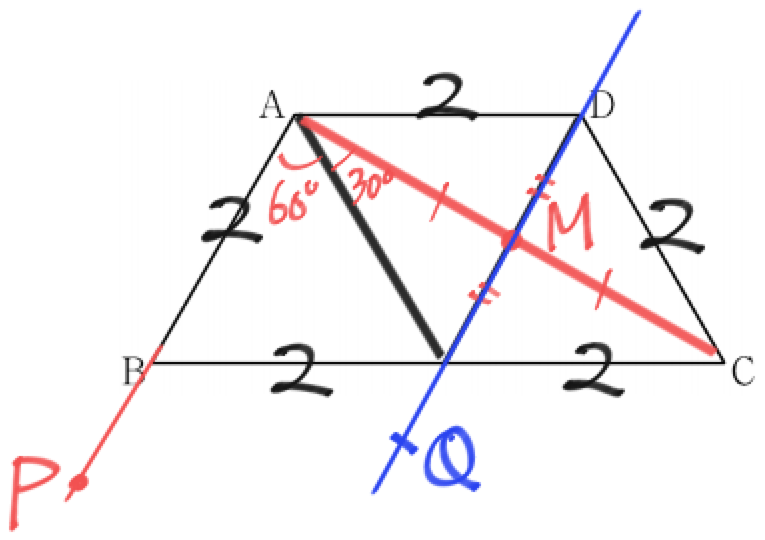
29. 평면 α 위에 $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{AD}=2$, $\angle ABC=\angle BCD=\frac{\pi}{3}$ 인 사다리꼴 ABCD가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{DQ}$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\overrightarrow{AC}=2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BP})$

(나) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PQ}=6$

(다) $2\times\angle BQA=\angle PBQ<\frac{\pi}{2}$

12



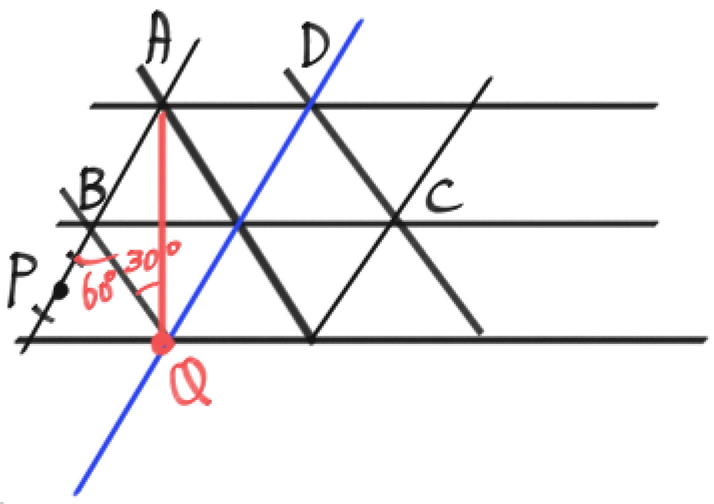
(가) $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DM}$

(나) $6=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AQ}-\cancel{\overrightarrow{AP}})$

$2\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$

(다)



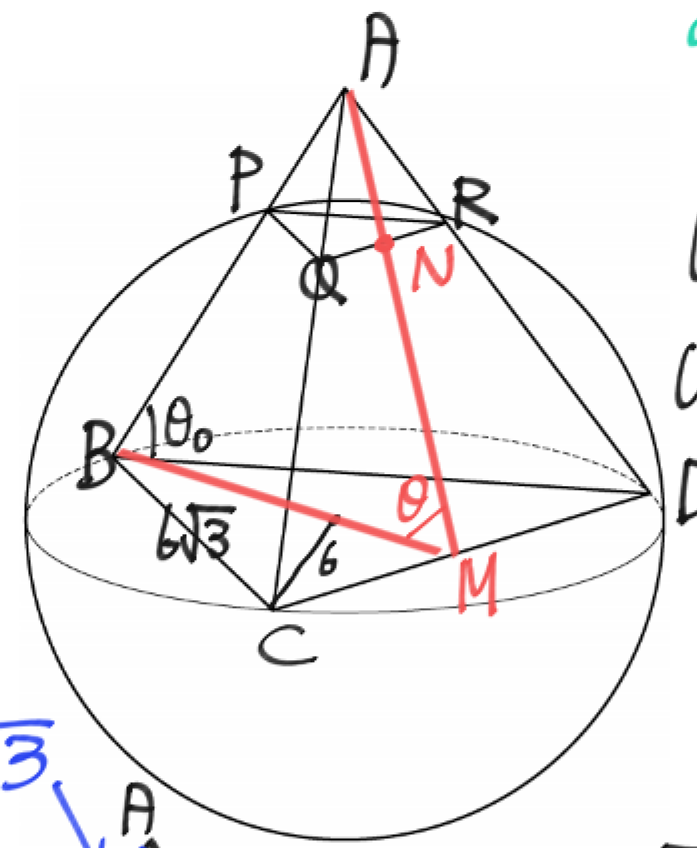
$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{DQ}$

$=\left(-\frac{9}{2}\vec{e_1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e_2}\right)\cdot\left(-2\vec{e_1}-2\sqrt{3}\vec{e_2}\right)$

$=12$

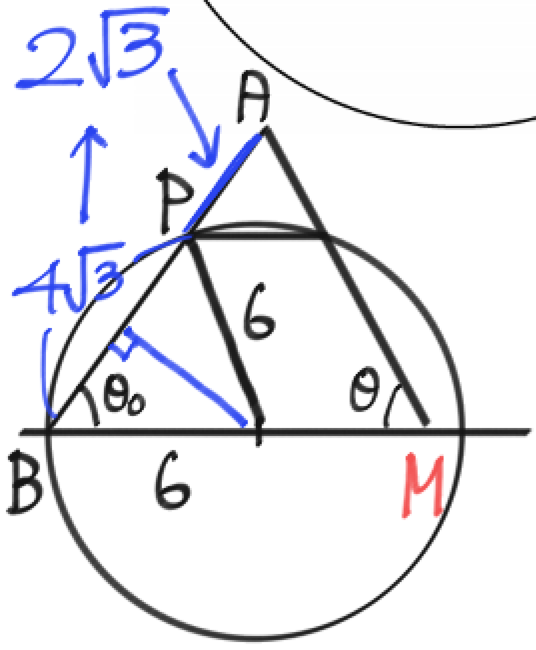
30. 좌표공간에 정사면체 ABCD가 있다. 정삼각형 BCD의 외심을 중심으로 하고 점 B를 지나는 구를 S라 하자.
구 S와 선분 AB가 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P,
구 S와 선분 AC가 만나는 점 중 C가 아닌 점을 Q,
구 S와 선분 AD가 만나는 점 중 D가 아닌 점을 R라 하고,
점 P에서 구 S에 접하는 평면을 α라 하자.
구 S의 반지름의 길이가 6일 때, 삼각형 PQR의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 k이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]

24



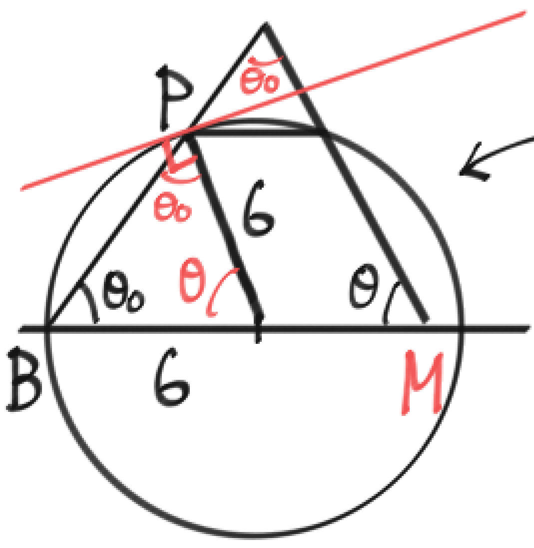
$\cos\theta=\frac{1}{3}$

$\cos\theta_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$



$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2\sqrt{3})^2$

$=3\sqrt{3}$



이면각: $\frac{\pi}{2}-\theta$

$\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\sin\theta$

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

즉, $k=2\sqrt{6}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.