1.

$$\left(\frac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}=\left(2^{2-\sqrt{2}}\right)^{2+\sqrt{2}}=2^2=4$$

2.

무한대로 가는 극한이므로 최고차항의 계수만 비교하면 된다.

최고차항은 분모가 1, 분자가 4이다.

$$\therefore \frac{4}{1}=4$$

3.

공비를 r이라 하자.

$$a_4+a_6=r^2(a_2+a_4)=30r^2=\frac{15}{2}$$

$$r=\frac{1}{2}(\because r>0)$$

$$a_2+a_4=\frac{5}{4}a_2=\frac{5}{8}a_1=30$$

$$a_1=48$$

4.

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$

$x=2$를 대입하면

$g'(2)=4f(2)+4f'(2)=16$

5.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}(\because \cos\theta>0)$$

6.

$f'(x)=6x^2-18x+a$

$f'(1)=a-12=0$

$a=12$

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$b=2$

$a+b=14$

7.

공차를 d로 놓으면

$a_n=nd$로 나타낼 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{kd}-\sqrt{(k+1)d}}$$

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{d}}=\frac{1}{\sqrt{d}}(4-1)=\frac{3}{\sqrt{d}}=2$$

$$d=\frac{9}{4}$$

$$a_4=4d=9$$

8.

접선의 접점의 x좌표를 t라 하면,

접선의 y절편은

$-t(3t^2-1)+t^3-t+2=-2t^3+2=4$

$t=-1$

접선의 기울기는 2가 되므로 x절편은 -2

9.

최대최소를 가지는 것을 보면 주어진 구간에서 $f(x)$는 연속이어야 한다.

또한, 주어진 $f(x)$는 감소하므로 $x=-\frac{\pi}{6}$에서 최댓값을 가질 것이다.

$f(-\frac{\pi}{6})=a+3=7,\ a=4$

그럼 $x=b$에서 최솟값을 가지므로

$f(b)=4-\sqrt{3}\tan 2b=3$

$\tan 2b=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $2b=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{\pi}{12}$

$a\times b=\frac{\pi}{3}$

10.

두 곡선의 식을 서로 빼서 적분한 값이 0이 되어야 한다.

$\int_0^2 (x^3+2x^2-k)dx=4+\frac{16}{3}-2k=0$

$k=\frac{14}{3}$

11.

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}=x$로 잡자.

삼각형 ABC에 코사인법칙을 적용하면

$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{70-x^2}{30\sqrt{5}}$

삼각형 ACD에 코사인법칙을 적용하면

$\cos\angle\mathrm{CAD}=\frac{94-x^2}{42\sqrt{5}}$

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$이므로 연립하면

$490-7x^2=470-5x^2$

$x=\sqrt{10}$

$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

사인법칙에 의해 원의 반지름의 길이는

$\frac{5\sqrt{2}}{2}$

12.

(문항에 관해 여러 가지 구설수가 있지만 여기서는 조건이 모든 자연수 n을 함의한다고 생각하겠다.)

조건은 $f(x)$가 이차함수 모양의 봉우리를 주기적으로 가지며 우리는 이것의 방향을 결정해야함을 알려주고 있다.

함수 $g(x)$는 그냥은 곤란하니 미분하여 관찰하자.

$g'(x)=2f(x)$

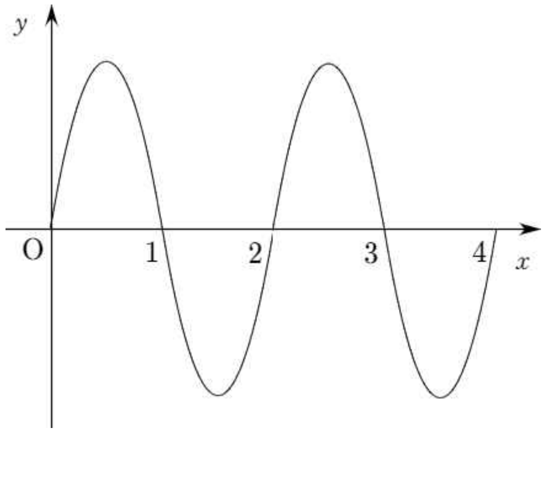
그럼 $g(x)$가 $f(x)$의 원시함수임을 알 수 있다. (정확히는 $2f(x)$의 원시함수지만 여기서는 모양만 따지면 되므로 상관없다.)

열린 구간이고 연속함수이므로 $g(x)$가 최솟값을 가지려면 극솟값에서 가져야 한다. 따라서 $f(2)=0$이고, 이 점에서 $f(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌어야 한다.

또, $g(2)=\int_0^2 f(x)dx-\int_2^4 f(x)dx=0$에서,

$\int_0^2 f(x)dx=\int_2^4 f(x)dx$이다.

이 모든 조건을 종합하면 $f(x)$의 그래프는 다음 한 가지의 경우로 좁혀진다.



이때 한 칸의 넓이가 1이므로 $\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)dx$의 값은 $-\frac{1}{2}+1-1=-\frac{1}{2}$이다.

13.

문제는 $m^{\frac{12}{n}}$가 정수가 되도록 하는 n의 값의 개수를 m의 값에 따라 분류하기를 요구하고 있다.

따라서 우리는 m이 제곱수인지 세제곱수인지 케이스를 나누어 살펴보아야 한다.

1) m이 제곱수도 세제곱수도 아닌 경우
이 경우 $\frac{12}{n}$가 자연수이여야 한다.
따라서 $n=2,3,4,6,12$로 5개다.

2) m이 제곱수인 경우
이 경우 $\frac{12}{n}$가 자연수이거나 $\frac{2k-1}{2}$의 꼴이여야 한다. (k는 자연수)
n이 자연수인 경우는 5개임을 확인했고, $\frac{2k-1}{2}$의 꼴인 경우만 확인하면 된다.
이 경우 $n=8,24$가 추가되어 총 7개다.

3) m이 세제곱수인 경우
이 경우 $\frac{12}{n}$가 자연수이거나 $\frac{3k-1}{3}, \frac{3k-2}{3}$의 꼴이어야 한다.
n이 자연수인 경우는 5개임을 확인했고, $\frac{3k-1}{3}, \frac{3k-2}{3}$ 의 꼴인 경우만 확인하면 된다.
이 경우 $n=9,18,36$가 추가되어 총 8개다.

제곱수는 4, 9로 두 개
세제곱수는 8로 한 개이므로 종합하면
$5\times5+2\times7+8=47$

14.
$f(x)$가 아무런 제약도 없이 그냥 다항함수로 제시되어 있는 점이 꽤 특이하다.
이 경우 $f(x)$가 연속이라는 점 말고는 크게 얻어낼 수 있는 것이 없다.
일단 선지를 보면서 이후를 생각해보자.

ㄱ.
$h(1)=\lim_{x\to1+} g(x)\times\lim_{x\to3+} g(x)=1\times3=3$
(참)

ㄴ.
적당히 $f(1)=-1$로 잡아보자.
그럼
$\lim_{x\to1-} h(x)=\lim_{x\to1-}\left(\lim_{t\to0+} g(x+t)\right)\times\lim_{x\to1-}\left(\lim_{t\to2+} g(x+t)\right)$
$=-1\times3=-3$이다.
따라서 이 경우 $h(x)$는 불연속이고 이는 반례이다. (거짓)

ㄷ.
$g(-1)=-2$에서, $f(-1)=-2$이다.
$f(x)$가 감소하므로 $f(x)\le-2$
$(-1\le x\le1)$
여기서 $h(x)$의 구간별 상태를 정리해보면 다음과 같다.

$$h(x)=\begin{cases} x(x+2) & (x\le3) \\ xf(x+2) & (-3\le x<-1) \\ (x+2)f(x) & (-1\le x<1) \\ x(x+2) & (1\le x) \end{cases}$$

이때 $h(-3)=6$이고, $-3 \le x < -1$에서 $h(x)>0$임을 확인할 수 있다.
또한, $h(-1)=-2$이다.
이때 $-1 \le x < 1$에서 $h(x)$의 도함수를 구해보면 $h'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)<0$이므로 $h'(x)$는 감소한다.
그런데, $h(-1)=-2$이므로 $-1 \le x < 1$에서 $h(x)<0$이다. $-1 \le x < 1$ 이외의 구간에서는 $h(x)>0$이므로 최솟값을 가지려면 $-1 \le x < 1$에서 가질 수 밖에 없다.
하지만, $-1 \le x < 1$의 구간은 열린 구간이므로(다시 말해 최소를 가지려는 부분에서 정의되어 있지 않으므로) 이 구간에서 감소하는 $h(x)$는 최솟값을 가질 수 없다. (거짓)

15.
주어진 조건으로 a_9까지의 항을 일단 써 보자.
$a_7=40$
$a_8=40+a_6$
$$a_9=\begin{cases}\dfrac{40+a_6}{3} & (a_6=3k-1)\\ 80+a_6 & (a_6=3k, 3k-2)\end{cases}$$
(k는 자연수)

그 이전의 항도 써 볼 필요가 있어 보인다.
$$a_6=\begin{cases}120\\ 40-a_5 & (a_6=3k-1, 3k-2)\end{cases}$$

a_5가 양수라는 점을 고려하면 $a_6=120$일 때, $a_9=200$으로 최대가 됨을 알 수 있다.
$\therefore M=200$
이제 최솟값을 구해보자. $\dfrac{40+a_6}{3}<80+a_6$임을 알기 때문에 우리는 $a_6=3k-1$인 경우만 고려하면 된다.
$a_6=3k-1$로 놓으면, $a_9=k+13$이 된다.
$a_5=40-a_6=41-3k$이고,
$a_4=6k-42$가 된다.
여기서 a_4가 3의 배수이므로,
$a_5=\dfrac{a_4}{3}$이고, 이는 곧 $41-3k=2k-14$와 동치이다. 따라서, $k=11$이고 이때 a_9의 값은 24이다.
$\therefore m=24, M+m=224$

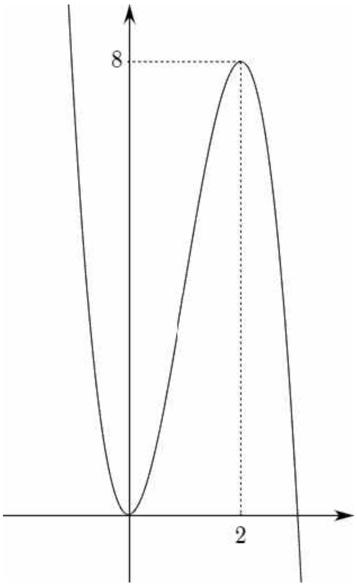
16.
$\log_2(3x+2)=2+\log_2(x-2)=\log_2 4(x-2)$
$\therefore x=10$

17.
$f(x)=x^4-x^2+3$, $f(2)=15$

18.
$$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=3\sum_{k=1}^{5}a_k+25=55$$
$$\sum_{k=1}^{5}a_k=10$$
$$\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=10+\sum_{k=1}^{5}b_k=32$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{5}b_k=22$$

19.
식을 살짝 변형하면
$-2x^3+6x^2=k$이 된다. 따라서, 우리는 곡선 $y=-2x^3+6x^2$와 직선 $y=k$의 교점을 찾으면 된다.

곡선 $y=-2x^3+6x^2$의 그래프는 다음과 같다.



우리는 양의 실근이 2개인 경우만 따지면 되므로, 이 경우 $0<k<8$이고, 정수인 k는 총 7개다.

20.
일단 $v(t)$의 식을 완성해보자.
$2\le t$인 구간에서 $a(t)=6t+4$이므로,
$v(t)=3t^2+4t+C$인데,
$v(2)=0$임을 (가)조건에서 확인할 수 있다.
따라서 $C=-20$이고,

$$v(t)=\begin{cases}2t^3-8t & (0\le t\le 2)\\ 3t^2+4t-20 & (2\le t)\end{cases}$$

이 된다.
구하는 것은 점 P가 움직인 거리이므로 적절히 구간을 나누어 계산해주면,

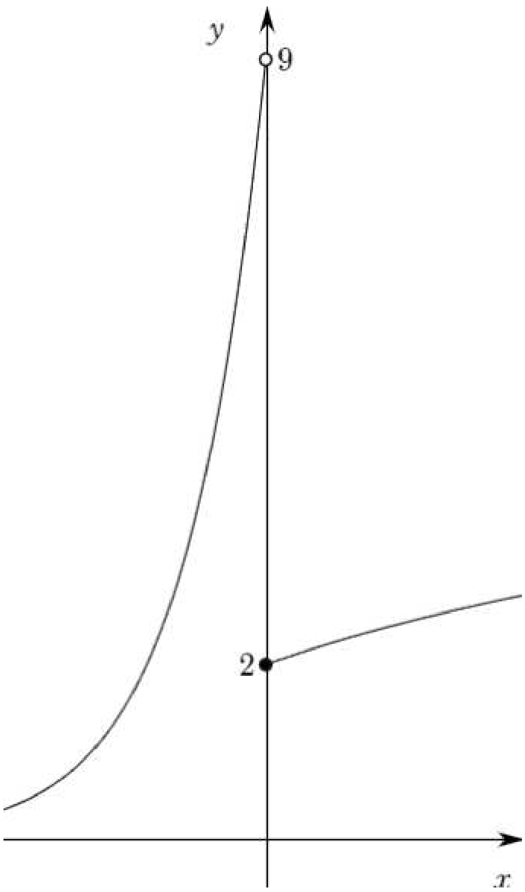
$$-\int_0^2(2t^3-8t)dt+\int_2^3(3t^2+4t-20)dt$$
$$=8+9=17$$

21.

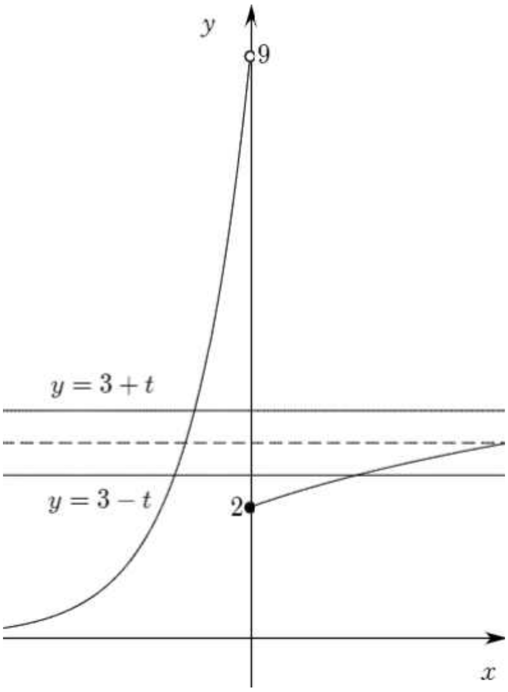
$$h(x)=\begin{cases}3^{x+2} & (x<0)\\ \log_2(x+4) & (x\ge 0)\end{cases}$$로 잡으면

$f(x)=|h(x)-n|$이 된다.
그럼 $f(x)=t$는
$h(x)=n\pm t$와 같은 방정식이 된다.
즉, $y=h(x)$와 $y=n+t$ 또는 $y=n-t$의 교점의 개수가 4개가 되는 경우를 찾으면 된다.
(혹시 교점의 개수가 5개 이상일 수도 있지 않냐고 물을 수 있는데, y축 양쪽의 함수 모두 증가함수이므로 직선 2개 가지고 5개 이상의 교점을 만들 수는 없다.)

일단 $h(x)$의 그래프부터 그려보면 다음과 같다.



$n=1$로 잡아보면, t를 무엇으로 잡든 절대 교점이 4개가 나올 수 없음을 알 수 있다.
이는 $n=2$로 잡아도 동일하다.
그런데, $n=3$이 되면 t가 적당히 작으면 교점이 4개가 됨을 알 수 있다. 이는 다음 그림과 같다.



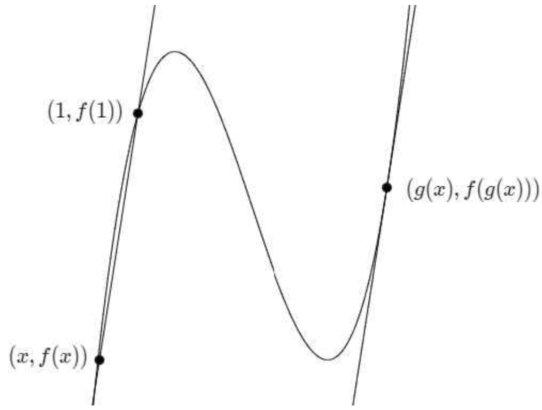
이는 n이 증가함에 따라 $n=4, 5 \cdots 8$까지 동일하다가, $n=9$일때부터 다시 교점이 4개가 될 수 없게 된다.
따라서 가능한 n의 값은 $3, 4, \cdots 8$이고, 모두 더하면 33이다.

22.
(가) 조건의 식을 살짝 변형하면 다음과 같다.

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(g(x))$$

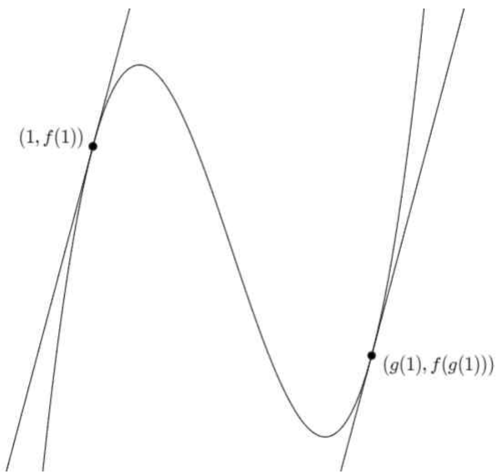
이 식을 해석하면 다음과 같이 받아들일 수 있다.
"함수 $f(x)$의 1부터 x까지의 평균변화율과 $x=g(x)$에서의 미분계수가 같다."

$g(x)$가 연속이란 점에 주목하며 $g(x)$의 가닥을 잡아나가자.
1) $x<1$일 때



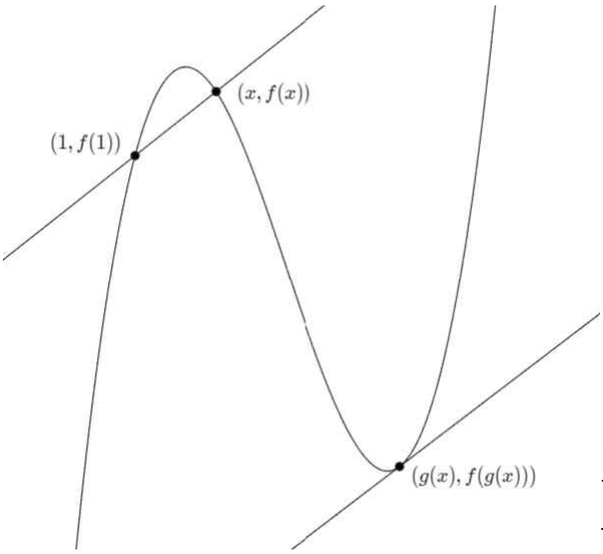
이 경우 $g(x)$는 1보다 커야 할 것이다. 왜냐하면 (나) 조건에 의해 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이기 때문이다.

2) $x=1$인 경우
(가)의 조건식으로는 직접적으로 구할 수는 없지만 $g(x)$가 연속인 점을 이용하면 $f'(1)=f'(g(1))$인 점, 즉 $(1, f(1))$과 변곡점을 기준으로 대칭인 점의 x좌표가 $g(1)$이 될 것이다.



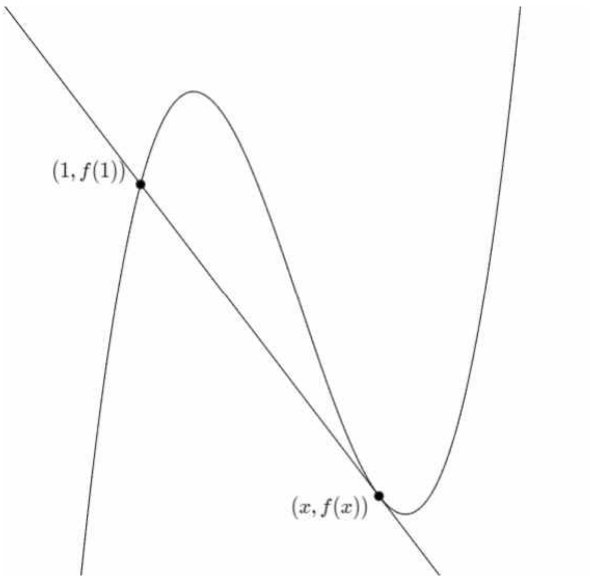
3) $x>1$인 경우

이 경우 $x<1$인 경우와 같은 방식으로 계속 $g(x)$를 추적해 나갈 수 있다.

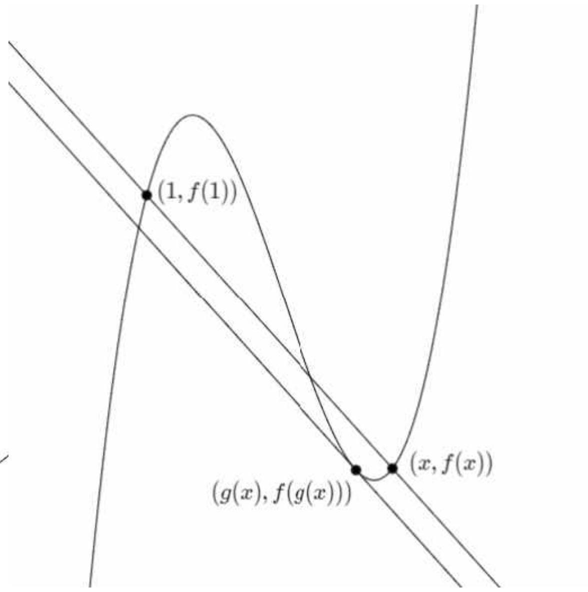


이 동안 $g(x)$가 지속적으로 감소하고 있음에 주목하자. (이후 최솟값에 관련된 조건을 활용하는데 필요하다.)

그런데, 다음과 같은 상황에서 변화가 생긴다.



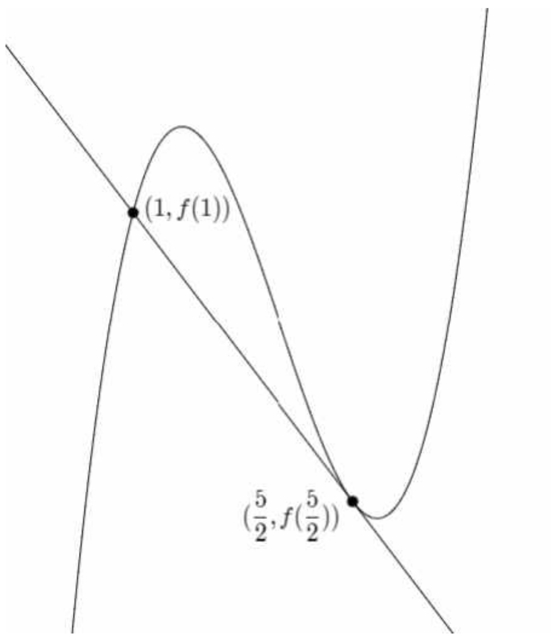
일단, 이 상황에서 $g(x)=x$가 된다는 점은 자명하다. ($g(x)$가 연속이기 때문이다.) 다만, 이 이후 $g(x)$의 행방은 조금 주목할 필요가 있다. x값을 조금만 더 키워보자.



위 그림과 같이 $g(x)$가 증가한 것을 확인할 수 있다. 그리고, 조금 더 x를 증가시키면 $g(x)$는 지속적으로 증가함을 확인할 수 있다.

따라서, 아까의 $g(x)=x$인 지점에서 $g(x)$는 최솟값을 가지며, 이 최솟값이 $\frac{5}{2}$임을 조건 (나)를 통해 확인할 수 있다.

지금까지 확인한 사실을 반영해 그래프를 다시 그리면 다음과 같다.



그럼 $f(x)=(x-1)(x-\frac{5}{2})^2+ax+b$로 잡을 수 있다. 마지막으로 (다) 조건을 활용해 마무리하자.
삼차함수의 비율관계에 의해 변곡점의 x좌표는 2이고, 따라서 $g(1)=3$이다.
그러므로 $f(0)=-3$, $f(3)=6$
대입하고 정리하면, $a=\frac{3}{4}, b=\frac{13}{4}$

$$\therefore f(x)=(x-1)(x-\frac{5}{2})^2+\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}$$

$f(4)=13$

[미적분]
23.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}\times(2+2)=4$$

24.
주어진 식을 적분형태로 변형하면,

$$\frac{1}{3}\int_1^4\sqrt{x}\,dx=\frac{14}{9}$$

25.
리미트 내부의 분수의 분모, 분자를 각각 4^n로 나누어주면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{4^n}+\frac{1}{4^n}}{\frac{3^n}{4^n}+\frac{1}{2}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=3$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=\frac{3}{2}$$

$a_n=\frac{3}{2}\times 4^n$(등비수열은 ar^n의 꼴이다.)

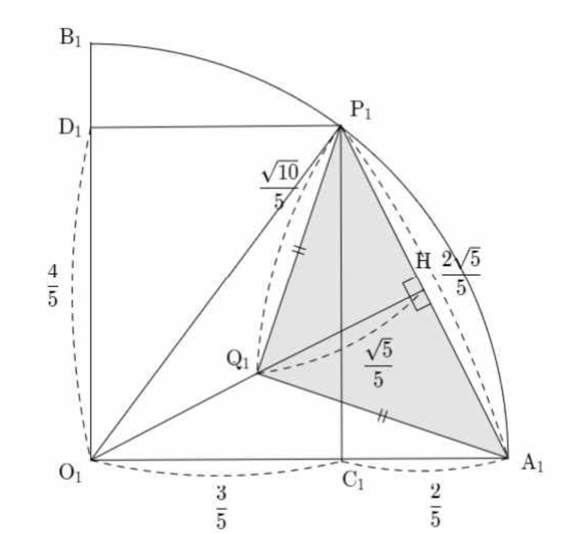
$\therefore a_2=24$

26.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2x+\tan x)dx=\left[\tan x-\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$=\sqrt{3}+\ln 2$

27.



필요한 변과 각을 표시해주면 그림과 같다.
이때, H는 $\mathrm{Q_1}$에서 $\overline{\mathrm{A_1P_1}}$에 내린 수선의 발이다. 그림에서 초항($\triangle\mathrm{A_1P_1Q_1}$의 넓이)은 $\frac{1}{5}$임을 어렵지 않게 파악할 수 있다.
이제 공비를 구하자.
$\overline{\mathrm{O_1Q_1}}=\overline{\mathrm{O_1H}}-\overline{\mathrm{Q_1H}}$이므로 $\overline{\mathrm{O_1H}}$의 길이를 알아내면 된다.

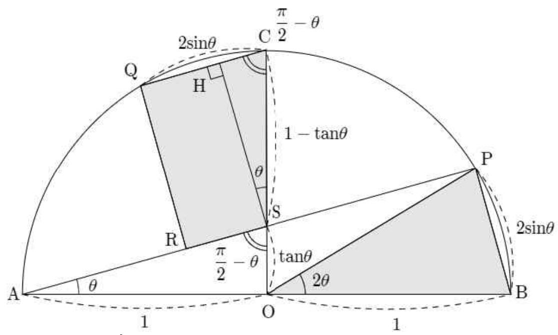
$$\triangle\mathrm{O_1A_1P_1}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{O_1A_1}}\times\overline{\mathrm{C_1P_1}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{A_1P_1}}\times\overline{\mathrm{O_1H_1}}$$

이므로 정리하면 $\overline{\mathrm{O_1H}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{O_1Q_1}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$이고, 공비는 $\frac{1}{5}$이다.

$$\therefore\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$$

28.



표시해야 할 각과 변을 표시하면 위 그림과 같다. 이때 H는 점 S에서 $\overline{\mathrm{QC}}$에 내린 수선의 발이다.

일단, $f(\theta)$는 바로 구할 수 있으므로 구해보면 $f(\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta=\sin\theta\cos\theta$

이제 $g(\theta)$를 구해보자.

일단, $\angle \mathrm{ASO}=\angle \mathrm{QCS}=\frac{\pi}{2}-\theta$라는 점에서 $\overline{\mathrm{QC}}//\overline{\mathrm{AP}}$을 확인할 수 있다. 따라서 사각형 QCSR은 사다리꼴이다.

그럼, $g(\theta)$를 구하기 위해서는 $\overline{\mathrm{RS}}$와 $\overline{\mathrm{HS}}$만 구하면 된다. 이를 위해 직각삼각형인 $\triangle\mathrm{SCH}$를 이용하자.

$\overline{\mathrm{HS}}=(1-\tan\theta)\cos\theta=\cos\theta-\sin\theta$

$\overline{\mathrm{HC}}=(1-\tan\theta)\times\sin\theta$이므로,

$\overline{\mathrm{RS}}=\overline{\mathrm{QC}}-\overline{\mathrm{CH}}=2\sin\theta-\sin\theta(1-\tan\theta)$

$=\sin\theta+\sin\theta\tan\theta=\sin\theta(1+\tan\theta)$

이상에서 $g(\theta)=\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{RS}}+\overline{\mathrm{QC}})\times\overline{\mathrm{HS}}$

$=\frac{1}{2}sin\theta(3+\tan\theta)(\cos\theta-\sin\theta)$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta(3\cos\theta-(3+\tan\theta)(\cos\theta-\sin\theta))}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta(2\sin\theta-\sin\theta\tan\theta)}{\theta^2}=2$$

29.

(가) 조건을 조금 더 편하게 해석하기 위해 $-x=t$로 치환해보자.

그럼 다음과 같은 식으로 바뀐다.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{ae^{-2t}+be^{-t}+c+6}{e^{-t}}=\lim_{t\to\infty}ae^{-t}+b+(c+6)e^{t}$$

이 식이 수렴하기 위해서는 $c=-6$이여야 한다. $c=0$이므로

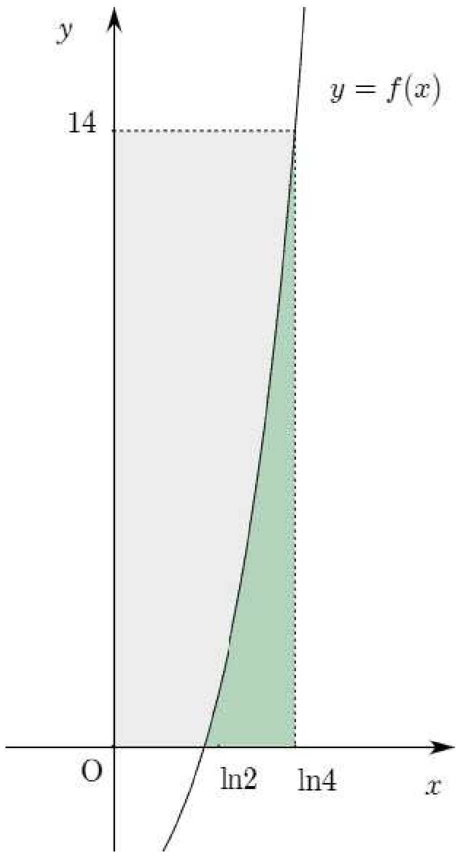
$$\lim_{t\to\infty}ae^{-t}+b+(c+6)e^{t}=b=1$$

a의 값을 정하기 위해 (나) 조건을 활용하자.

$f(\ln2)=4a+2-6=0$에서, $a=1$

따라서 $f(x)=e^{2x}+e^{x}-6$이다.

$\int_0^{14}g(x)dx$의 값을 구하기 위해서 역함수를 적분해야 한다. 이 경우 적분해야 할 함수가 역함수 단독이므로 기하적 관점을 적용해보자.



구해야 할 부분은 회색 부분의 넓이이다. 따라서 우리는 직사각형에서 초록색 부분의 넓이만 빼주면 된다. 직사각형의 넓이는 $28\ln 2$임을 어렵지 않게 확인할 수 있다. 초록색 부분의 넓이는 $\int_{\ln 2}^{\ln 4} f(x)dx = 8-6\ln 2$이다.

따라서 구하고자 하는 회색부분의 넓이는 $-8+34\ln 2$이다.

$\therefore p+q=26$

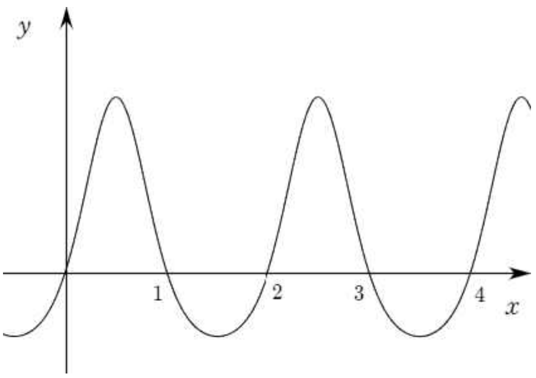
30.

주어진 함수를 해석하기 위해 $h(x)$가 어떤 함수인지 가닥을 잡아보자.

그러기 위해서는 먼저 $h(x)$를 이루고 있는 두 함수인 $f(x), g(x)$에 대해 생각해야 한다.

$f(x)$는 적당한 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이다.

$g(x)$는 e^x-1과 $\sin\pi x$의 합성함수 꼴로 볼 수 있다. 이때 겉함수가 되는 e^x-1은 극값을 가지지 않으므로 함수의 개형은 $\sin\pi x$의 개형을 그대로 따라감을 알 수 있다. 이를 통해 $g(x)$의 그래프를 간단히 그려보면 다음과 같다.



대충 $\sin\pi x$의 그래프와 비슷하게 그리고, 극값과 0이 되는 점을 통해 조정해주면 어렵지 않게 그릴 수 있다.

이제 $h(x)$에 대해 생각해보자.

조건은 모두 $h(x)$의 극대, 극소에 대해 해석하기를 요구하고 있다.

$h(x)$가 극값을 가지게 하는 x값의 조건은 다음 두가지이다.

1) $g(x)$가 극값을 가지는 $x=a$에 대해 $f(x)=a$인 x

2) $f(x)$가 극값을 가지는 x

1) 조건을 조금 더 살펴보자.

$g(x)$가 극값을 가지는 x값은

$\cdots -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\cdots$와 같은 꼴이다.

따라서 1) 조건은 곧

"$f(x)=\cdots -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\cdots$인 x"와 같은 조건이 된다.

이제 (가) 조건을 보자. 만약 $x=0$이 1) 조건을 만족시키는 점이라면 함숫값이 0일 수 없다. 따라서 $x=0$은 2)조건을 만족하는 점이다. 즉, $f'(0)=0$. 이때 $f'(3)=0$이라는 조건을 통해 $f(x)$가 $x=0$에서는 극대를 가짐을 알 수 있다.

또한 $h(0)=g(f(0))=0$이므로 $f(0)$은 정수임을 알 수 있다.

그런데, (가) 조건을 다시 살펴보면 $h(x)$가 $x=0$에서 극대를 가진다고 한다. $f(x)$가 $x=0$에서 극대를 가지므로 $h(x)$도 극대를 가지려면 $g(x)$는 $x=f(0)$에서 증가해야 한다. $g(x)$의 그래프를 통해 우리는 $f(0)$이 짝수여야 함을 알 수 있다.

이제 (나) 조건을 해석하자. $(0,3)$에서 $h(x)=1$인 점이 7개라고 한다.
(가) 조건을 충실하게 해석했다면 $(0,3)$은 $f(x)$의 두 극점 사이이며 이 구간에서 $f(x)$는 감소함수임을 알 것이다.
$h(x)=g(f(x))=1$이라는 방정식을 풀기 위해서는 먼저 $g(a)=1$인 a를 찾고 $f(x)=a$인 x를 찾으면 된다. 이때 $f(x)$가 감소함수이므로 a값 하나에 대응하는 x값은 하나 뿐이다. 이는 다시 말해 $h(x)=1$의 근의 개수나 $g(a)=1$의 근의 개수나 7개로 같아야 한다는 것이다.
그럼, a값의 범위만 조절하면 마무리할 수 있겠다. $(0,3)$에서 $f(0)>f(x)>\frac{1}{2}$이므로 $f(0)>a>\frac{1}{2}$인 a면 된다. $g(x)$의 그래프를 참고하면 $f(0)=8$이면 적당함을 알 수 있다. ($f(0)$은 짝수여야 한다.)
이제 마무리하자.
극값의 간격이 3인데 극값의 차이가 $\frac{15}{2}$이므로 최고차항의 계수는 $\frac{5}{9}$이다.
정리하면, $f(x)=\frac{5}{9}(x+\frac{3}{2})(x-3)^2+\frac{1}{2}$
$f(2)=\frac{5}{9}\times\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=\frac{22}{9}, p+q=31$