6월 평가원 대비 알지오 모의고사 1회 해설지

1	⑤	**2**	③	**3**	①	**4**	④	**5**	②
6	②	**7**	①	**8**	⑤	**9**	⑤	**10**	③
11	②	**12**	③	**13**	②	**14**	①	**15**	④
16	③	**17**	④	**18**	⑤	**19**	②	**20**	⑤
21	①	**22**	10	**23**	4	**24**	15	**25**	16
26	264	**27**	100	**28**	300	**29**	41	**30**	179

1. 정답 ⑤

$2X = A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

$\therefore X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 모든 성분의 합은 7

2. 정답 ③

$2a_6 = a_5 + a_7$이므로

$a_5 + a_6 + a_7 = 3a_6 = 12 \quad \therefore a_6 = 4$

$a_2 + a_8 = 2a_6 = 8$

3. 정답 ①

일차변환 f를 나타내는 행렬이 $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$이고, 점 $(1,\ 2)$가 점 $(2,\ b)$로 옮겨지므로 $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ b \end{pmatrix}$이다.

$a + 2b = 2,\ 1 - 4 = b$이므로

$a = 8,\ b = -3$

따라서, $a + b = 5$

4. 정답 ④

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n} - \frac{n^2-2n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n} - n + \frac{3n}{n+1}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n} - n\right) + \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1}$

$= 1 + 3 = 4$

5. 정답 ②

주어진 함수 $f(x)$가 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a\sin(x-1)}{2(x-1)} & (x > 1) \\ \frac{1+b+c}{2} & (x = 1) \\ bx^3 + c & (-1 < x < 1) \\ \frac{-1-b+c}{2} & (x = -1) \\ x & (x < -1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이므로

$x = -1$과 $x = 1$에서 연속이다.

따라서

(ⅰ) $\lim_{x\to-1+0} f(x) = \lim_{x\to-1-0} f(x) = f(-1)$에서

$-b + c = -1 = \frac{-1-b+c}{2}$

(ⅱ) $\lim_{x\to1+0}\frac{a\sin(x-1)}{2(x-1)} = \frac{a}{2},\ \lim_{x\to1-0} f(x) = b + c$

$f(1) = \frac{1+b+c}{2}$

(ⅰ)과 (ⅱ)에서 $b + c = 1\ \ a = 2$

$\therefore a + b + c = 3$

6. 정답 ②

$\sin 2x = 2\sin x\cos x,\ \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$이므로

$2\sin x\cos x - \sin x = 2\sin^2 x$

$\sin x(2\cos x - 2\sin x - 1) = 0$

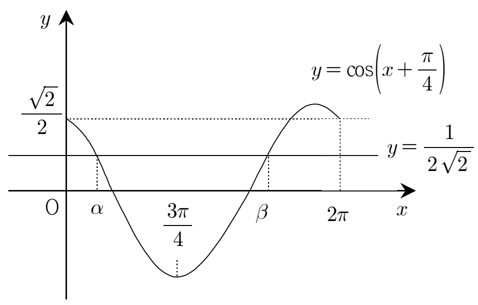
(ⅰ) $\sin x = 0$일 때

$x = 0,\ \pi$

(ⅱ) $2\cos x - 2\sin x - 1 = 0$ 일 때

$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$에서 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때,

$\therefore \alpha + \beta = \frac{3}{2}\pi$



(ⅰ)과 (ⅱ)에서

$\therefore$ 모든 실근의 합 $\frac{5}{2}\pi$

7. 정답 ①

(ⅰ) 주어진 식 x에 1을 대입하면

$\int_1^1 f(t)dt = e^1 + a(\ln 1 + 1)$

$0 = e + a$

$\therefore a = -e$

(ⅱ) 주어진 식의 양변을 미분하면

$f(x) = e^x + \frac{a}{x}$

$f(1) = e + a = 0\ (\because a = -e)$

8. 정답 ⑤

$\begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ 1 & a-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이고, 해가 무수히 많아야 하므로

$a^2 - 3a + 2 - 2 = 0$

$a^2 - 3a = 0$

$a = 0,\ 3$

따라서 모든 a값의 합은 3이다.

9. 정답 ⑤

$$A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{pmatrix}$$

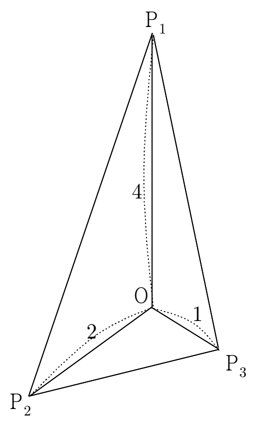
$$=\begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{pmatrix}$$

따라서 일차변환 f는 회전변환과 닮음변환의 합성이다.
$\mathrm{O},\mathrm{P},\mathrm{P}_3$가 한 직선 위에 있으므로 회전변환의 각도는 $360^\circ\times n+60^\circ$ 또는 $360^\circ\times n+60^\circ$ 이다.
그런데 삼각형의 넓이가 최대이므로 회전변환 각도는 $360^\circ\times n+120^\circ$ 이다.

또, $\overline{\mathrm{OP}}=8$,$\overline{\mathrm{OP}_3}=1$이므로

닮음 변환은 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$이다.

$\therefore \triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ 은 다음과 그림과 같다.



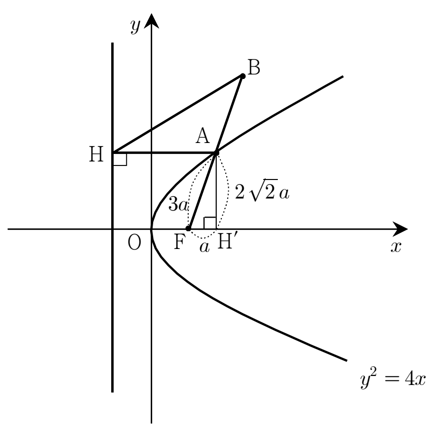
따라서 삼각형 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$의 넓이는

$$\therefore \frac{1}{2}\times 2\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times 2\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times 1\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\frac{7}{2}\sqrt{3}$$

10. 정답 ③

그림과 같이 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H'라 하자.



$\tan(\angle\mathrm{HAB})=-2\sqrt{2}$ 이므로 $\tan(\angle\mathrm{OFA})=-2\sqrt{2}$ 이다.
$\angle\mathrm{AFH}'=\pi-\angle\mathrm{OFA}$ 이므로 $\tan(\angle\mathrm{AFH}')=2\sqrt{2}$ 이다.

따라서, $\overline{\mathrm{FH}'}=a$, $\overline{\mathrm{AH}'}=2\sqrt{2}a$, $\overline{\mathrm{AF}}=3a$라 할 때,
$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AF}}$이고 $\overline{\mathrm{OF}}=1$이므로
$3a=2+a \quad \therefore a=1$

$\triangle\mathrm{ABH}=\triangle\mathrm{AHF}$이므로
$\triangle\mathrm{ABH}=\frac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

11. 정답 ②

a_n과 S_n의 관계에 의하여

$$a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$$

이므로 주어진 식(*)에서

$$(S_n-S_{n-1})(2S_n-1)=2{S_n}^2$$

$$S_n+2S_nS_{n-1}-S_{n-1}=0$$

이다. 위 식의 양변을 S_nS_{n-1}로 나누어 정리하면

$$\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=\boxed{(가)\ 2}\quad(n\geq 2)$$

이다. 수열 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$은

첫째항이 $\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=1$, 공차가 $\boxed{(가)\ 2}$인 등차수열이므로

$$S_n=\boxed{(나)\ \frac{1}{2n-1}}\quad\left(\because\frac{1}{S_n}=1+2(n-1)=2n-1\right)$$

이다. 따라서

$$a_n=\begin{cases} 1 & (n=1) \\ \boxed{(다)\ \frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-3}} & (n\geq 2)\end{cases}$$

$$\left(\because a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-3}\right)$$

이다.

$$\therefore p+\frac{g(10)}{f(10)}=2+\frac{\frac{1}{19}-\frac{1}{17}}{\frac{1}{19}}=2+\frac{17-19}{17}=\frac{34-2}{17}=\frac{32}{17}$$

12. 정답 ③

$$\frac{\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}}{\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}+\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}}$$

$$=\frac{8\times 12}{6\times 12+8\times 12+10}$$

$$=\frac{96}{72+96+10}=\frac{96}{178}=\frac{48}{89}$$

13. 정답 ②

$\overline{\mathrm{PF'}}=x \ \ \overline{\mathrm{PF}}=x-6 \ \ \overline{\mathrm{FF'}}=10$

$x^2=(x-6)^2+10^2-2(x-6)10\cos\frac{\pi}{3}$

$x^2=x^2-12x+36+100-10x+60$

$\therefore 22x=196$

$\therefore x=\frac{98}{11}$

$\therefore \overline{\mathrm{PF}}=\frac{98-66}{11}=\frac{32}{11}$

14. 정답 ①

$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{a}{x^2}$

$x^2(x+1)-x^2(x-1)=a(x-1)(x+1)$

$2x^2=ax^2-a$

$(a-2)x^2=a$

(ⅰ) $a=2$ 이면 근이 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a\neq 2$이면 $x^2=\frac{a}{a-2}$ 이다.

1) $\frac{a}{a-2}<0$ 즉, $0<a<2$인 경우 $x^2<0$이 되므로 근이 존재하지 않는다.

2) $\frac{a}{a-2}>0$ 이면 근이 모두 무연근($-1,\ 1,\ 0$)이 되어야 한다.

즉 $x^2=\frac{a}{a-2}=1 \text{ or } 0$ 이면 된다.

$a\neq a-2$이므로 $\frac{a}{a-2}\neq 1$ 이고 $\frac{a}{a-2}=0 \Leftrightarrow a=0$

$\therefore a=0$이면 근이 존재하지 않는다.

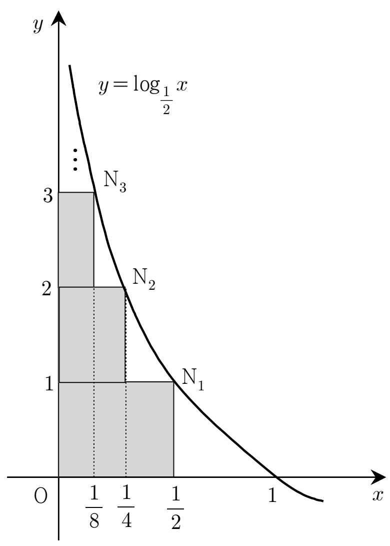
1)과 2)에서 $0\le a<2$ 이다.

따라서, (ⅰ)과 (ⅱ) 에 의하여 $0\le a\le 2$일 때 근이 존재하지 않으므로

$\therefore$ 모든 정수 a의 곱은 0이다.

15. 정답 ④

구하고자 직사각형의 넓이 S_n을 구하는 방법을 그림과 같이 생각할 수 있다.



따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$과 같다.

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

16. 정답 ③

ㄱ. $AB-B=E$

$\Leftrightarrow (A-E)B=E$ 이므로

$(A-E)B=B(A-E)$

$\Leftrightarrow AB-B=BA-B$

$\therefore AB=BA$ …… ①

$(A-E)B=E$이므로 B^{-1}존재한다.

따라서 $A^2B^2=B$에서 양변에 B^{-1}를 곱하면

$A^2B=E$ 이다. $\quad \therefore A^{-1}$ 도 존재

① 에서 $AB=BA$ 양변에 다음과 같이 A^{-1}를 곱하면

$A^{-1}ABA^{-1}=A^{-1}BAA^{-1}$

$\Rightarrow BA^{-1}=A^{-1}B$ (참)

ㄴ.$(A-E)B=E$와 $A^2B=E$에서

$A-E=A^2$ (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{200}(A^{2n}+B^{2n})=(A^2+B^2)+(A^4+B^4)+(A^6+B^6)+\cdots$

ㄴ 에서

$A^2=A-E$

$A^3=A^2-A=A-E=-E$

또, $A^2B^2=B$이고 $AB=BA$이고 $AB=B+E$이므로

$ABAB=B$

$\Leftrightarrow (B+E)^2=B$

$\Leftrightarrow B^2+B+E=0$

$\therefore B^2=-B-E$

$B^3=E$

따라서

$A^2+B^2=A-E-B-E$

$A^3+B^3=O$

$A^4+B^4=-A+B$

$A^5+B^5=-A+E-B-E=-A-B$

$A^6+B^6=2E$

$\therefore (A^2+B^2)+(A^4+B^4)+(A^6+B^6)=O$

$$(A^8+B^8)+(A^{10}+B^{10})+(A^{12}+B^{12})=O$$
$$\vdots$$
$$(A^{392}+B^{392})+(A^{394}+B^{394})+(A^{396}+B^{396})=O$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{200}(A^{2n}+B^{2n})=A^{398}+B^{398}+A^{400}+B^{400}$$
$$=A^2+B^2+A^4+B^4$$
$$=(A-E-B-E)+(-A+B)=-2E \text{ (거짓)}$$

17. 정답 ④

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{\frac{g(x)-g(2)}{x-2}}=\frac{1}{g'(2)}=f'(g(2))$$

$g(2)=k$라 하면 $f(k)=2$이므로

$(\ln k)^2+\frac{k}{e}=2 \quad \therefore k=e$

$\therefore g(2)=e$

$f'(x)=2\ln x\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{e}$ 이므로

$f'(g(2))=f'(e)=\frac{2}{e}+\frac{1}{e}=\frac{3}{e}$

18. 정답 ⑤

(1) $\left[\frac{n}{3}\right]=\frac{n}{3}$ 이므로 n은 3의 배수이다.

(2) $[f(n)g(n)]=f(n)-1$ 이므로

$f(n)-1\le f(n)g(n)<f(n)$

(i) $f(n)=0$ 이면

$-1\le 0<0$ $\therefore$ 해가 없다.

(ii) $f(n)=1$ 이면

$0\le g(n)<1$

$\therefore$ 2자리 자연수는 모두 해가 되므로

10에서 99사이의 3의 배수의 수는 30개 이다.

(iii) $f(n)=2$

$1\le 2g(n)<2$

$\frac{1}{2}\le g(n)<1$

$\therefore \frac{5}{2}\le \log n<3$

$10^2\sqrt{10}\le n<10^3$

$317\le n<1000$

$\therefore$ 3의 배수이므로 $318=a_{31}$

$\therefore 99+318=417$

19. 정답 ②

$S(\theta)=\frac{1}{2}\triangle\mathrm{BCD}$ 이다.

$\overline{\mathrm{CD}}$의 길이를 구하면

$$\frac{\sin\theta}{\sin(\pi-5\theta)}=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin 2\theta}$$

$$\therefore \overline{\mathrm{CD}}=\frac{\sin\theta\sin 2\theta}{\sin(\pi-5\theta)}$$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sin\theta\,\overline{\mathrm{CD}}\sin 3\theta$$

$$S(\theta)=\frac{1}{4}\frac{\sin\theta\sin 2\theta\sin\theta\sin 3\theta}{\sin(\pi-5\theta)}=\frac{1}{4}\frac{\sin\theta\sin 2\theta\sin\theta\sin 3\theta}{\sin 5\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

20. 정답 ⑤

$\sqrt{3}=\frac{m-m'}{1+mm'}$ 이므로

$y=mx$와 $y=m'x$가 이루는 각은 $\frac{\pi}{3}$이다. $\left(\because \tan\theta=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|\right)$

$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$라 하면

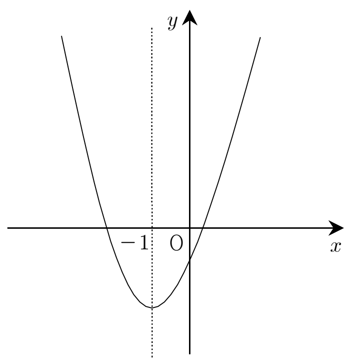
$\overline{\mathrm{AP}}=\sin\alpha$ $\overline{\mathrm{OA}}=\cos\alpha$ 이므로

$\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AP}}+2(\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AP}})$

$=\cos\alpha+\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$ $(0\le\alpha\le\frac{\pi}{3})$

$\cos\alpha+\sin\alpha=t$ $(1\le t\le\sqrt{2})$라 하자.

$\therefore \overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AP}}+2(\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AP}})=t^2+t-1$ $(1\le t\le\sqrt{2})$



최댓값 : $1+\sqrt{2}$, 최솟값 : 1

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $2+\sqrt{2}$

21. 정답 ①

$f(x)=\int_0^x\{f(t)\}^2dt$의 양변을 x관하여 미분하면

$f'(x)=\{f(x)\}^2$이다.

$$\therefore \int_0^1 x(f(x))^3dx=\int_0^1 xf'(x)f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x[\{(f(x)\}^2)]'dx$$

$$\therefore \frac{1}{2}\left\{[x(f(x))^2]_0^1-\int_0^1\{f(x)\}^2dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(25-5)=10 \quad \left(\because \int_0^1\{f(x)\}^2dx=f(1)\right)$$

22. 정답 10

$(a,\ e^{2a}+2)$는 곡선 $y=e^{2x}+x^2+a$ 위의 점이므로
$e^{2a}+2\ =e^{2a}+a^2+a$ 가 성립한다.
따라서, $a^2+a-2=0 \quad \therefore a=-2$ 또는 1

$y'=2e^{2x}+2x$ 이므로 위의 점 $(a,\ e^{2a}+2)$에서의 접선의 기울기는 $2e^{2a}+2a$ 이다.
(ⅰ) $a=-2$ 일 때,
 접선의 기울기는 $\dfrac{2}{e^4}-4<0$ 이므로 $a\neq-2$이다.
(ⅱ) $a=1$일 때
 $2e^2+2>0 \quad \therefore a=1$
따라서, $10a^2=10$

23. 정답 4

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)+e^{5x}-1}{\sin2x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin2x}+\frac{e^{5x}-1}{\sin2x}$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$$

24. 정답 15

선분 AC를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이 $S_1=(\log_3 n)^2$
삼각형 ABC의 넓이 $S_2=\dfrac{1}{2}\log_3 n$
$2(S_1-S_2)\leq 3$ 이므로
$2(\log_3 n)^2-\log_3 n\leq 3$
$\Leftrightarrow\ 2(\log_3 n)^2-\log_3 n-3\leq 0$
$\Leftrightarrow\ -1\leq\log_3 n\leq\dfrac{3}{2}$
따라서 자연수 $n=1,2,3,4,5$
$\therefore$ 모든 자연수 n의 합은 15

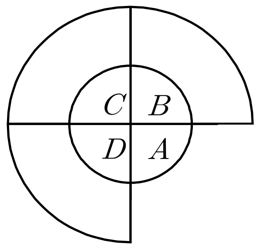
25. 정답 16

$\log P_{\rm A}=\log P_0-\log 2^{\frac{H_{\rm A}}{5.5}}$
$\log P_{\rm B}=\log P_0-\log 2^{\frac{H_{\rm B}}{5.5}}$
$\log\dfrac{P_{\rm A}}{P_{\rm B}}=\log 2^{\frac{H_{\rm B}-H_{\rm A}}{5.5}}=\log 2^{\frac{22}{5.5}}=\log 2$
$\therefore\dfrac{P_{\rm A}}{P_{\rm B}}=16$

26. 정답 264

서로 다른 4가지 색을 $A,\ B,\ C,\ D$라고 하면
(ⅰ) 안쪽영역에 색칠하는 방법의 수는 $4!$이다.

(ⅱ) 바깥쪽 영역 영역의 색이 선택된 경우는
그림과 같이 안쪽에 색칠이 되어 있을 때



바깥쪽 원에 A색을 포함하여 3가지 색을 고르는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2$이고, 선택된 3가지 색을 색칠하는 방법의 수는 다음 표와 같이 3가지이다.

안쪽 색	B	C	D
바깥 색	A	B	C
	C	A	B
	C	B	A

(선택된 색이 포함하여 $A,\ B,\ C$ 라고 가정할 경우)
따라서, ${}_3\mathrm{C}_2\times3=9$ ⋯⋯ ①

또, 선택된 색이 A색을 포함하지 않고 3가지 색을 고르는 방법은 $B,\ C,\ D$색을 고르는 경우이므로 방법의 수가 ${}_3\mathrm{C}_3$ 이고, 선택된 3가지 색을 색칠하는 방법의 수는 다음 표와 같이 2가지이다.

안쪽 색	B	C	D
바깥 색	C	D	B
	D	B	C

따라서, 방법의 수는 ${}_3\mathrm{C}_3\times2=2$ ⋯⋯ ②
①과 ②에 의해서 바깥쪽에 색칠하는 방법의 수는
$\therefore 9+2=11$

따라서, (ⅰ)과 (ⅱ)에 의해서
4가지 색으로 7개의 영역을 구분하여 색칠하는 방법의 수는
$24\times11=264$이다.

27. 정답 100

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가
$g(x)=\dfrac{e^{f(x)}}{x}$ 이므로
$xg(x)=e^{f(x)}$
$\Leftrightarrow\ \ln(xg(x))=f(x)$

양변을 x에 관하여 미분하면
$f'(x)=\dfrac{g(x)+xg'(x)}{xg(x)}$ 이다.

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$이 점 $(e,\ 1)$에서 만나고, 이 점에서의

접선이 서로 수직이므로 $f(e)=g(e)=1$, $f'(e)g'(e)=-1$이다.

$$\therefore f'(e)=\frac{g(e)+eg'(e)}{eg(e)}$$

$$=\frac{1}{e}+\frac{g'(e)}{g(e)} \quad \left(\because g(e)=1 \ \ g'(e)=-\frac{1}{f'(e)}\right)$$

$$=\frac{1}{e}-\frac{1}{f'(e)}$$

$$\therefore f'(e)+\frac{1}{f'(e)}=\frac{1}{e}$$

$\therefore 100k=100$

28. 정답 300

(ⅰ) $\frac{x-3}{x+4}\le 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+4)\le 0$ 이고 $x\ne 3$

$\therefore -4<x\le 3$

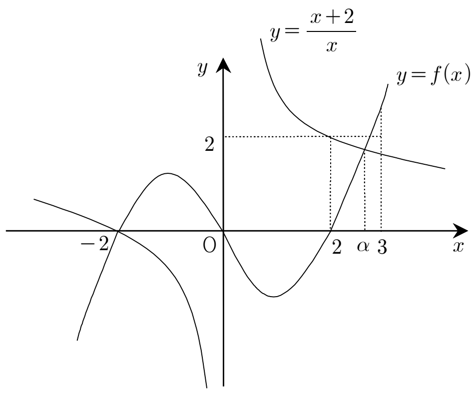
(ⅱ) $x-\frac{2}{f(x)}\ge \frac{x}{f(x)}$

$\Leftrightarrow \frac{xf(x)-2-x}{f(x)}\ge 0$

$\Leftrightarrow (xf(x)-2-x)f(x)\ge 0$ 이고 $f(x)\ne 0$

$\Leftrightarrow xf(x)\left(f(x)-\frac{x+2}{x}\right)\ge 0$ 이고 $f(x)\ne 0$

x	$f(x)$	$f(x)-\frac{x+2}{x}$	
+	+	+	$x\ge\alpha \quad (2<\alpha<3)$
+	−	−	$0<x<2 \quad (f(x)\ne 0)$
−	+	−	해가없다
−	−	+	해가없다



$\Leftrightarrow 0<x<2 \quad x\ge\alpha$

따라서 (ⅰ)과 (ⅱ)의 의하여 연립부등식의 해는
$0<x<2 \quad \alpha\le x\le 3$ 이다.

따라서 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 $1, 3$이다.

정수 x의 곱 $M=3$ 이므로 $100M=300$

29. 정답 41

$\mathrm{F}(c, 0)$ $\mathrm{F}'(-c, 0)$ 이라 하고

직선 $\mathrm{F'P}$의 기울기를 $m(m>0)$이라 하면 직선 FH의 기울기 $-\frac{1}{m}$ 이다. 따라서, 직선 $\mathrm{F'P}$의 방정식은 $y=m(x+c)$이고 직선 FH의 방정식은 $y=-\frac{1}{m}(x-c)$이다.

두 직선의 교점의 y값이 최대이면 $\triangle\mathrm{F'FH}$의 넓이가 최대이다.

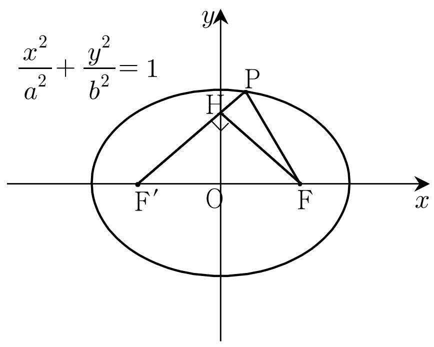
$\frac{y}{m}-c=-my+c$

$\Leftrightarrow (m+\frac{1}{m})y=2c$

$\Leftrightarrow y=\frac{2c}{m+\frac{1}{m}}$

$\therefore m+\frac{1}{m}$ $(m>0)$이 최소일 때 y값이 최대이다.

$\therefore m=1$일 때 y값이 최대이다.



$\therefore \triangle\mathrm{HF'F}$의 둘레의 길이는

$2c(1+\sqrt{2})=6(1+\sqrt{2})$

$\therefore c=3$

$\triangle\mathrm{FPH}$의 둘레는 장축의 길이와 같으므로

$2a=10 \quad \therefore a=5$

$\therefore b^2=25-9=16$

$\therefore \frac{b^2}{a^2}=\frac{16}{25}$

$\frac{b^2}{a^2}=\frac{q}{p}=\frac{16}{25}$이므로 $p+q=41$

30. 정답 179

(나)에서 양변에 $f'(x)$를 더하면

$f(x)+f'(x)=f'(x)+f''(x)$

$\Leftrightarrow \frac{f'(x)+f''(x)}{f(x)+f'(x)}=1$

$\Leftrightarrow \int\frac{f'(x)+f''(x)}{f(x)+f'(x)}dx=\int 1dx$

$\Leftrightarrow \ln|f(x)+f'(x)|=x+c$

$\Leftrightarrow f(x)+f'(x)=e^{x+c} \quad (\because f(x)+f'(x)>0)$

$f(0)=0,\ f'(0)=0$이므로 $\therefore \ln 1=e^c$ $\therefore c=0$

$\therefore f(x)+f'(x)=e^x$ …… ①

①에서

$f(-x)+f'(-x)=e^{-x}$

$f(x)-f'(x)=e^{-x}$ $(\because f(-x)=f(x),\ f'(-x)=-f'(x))$ …… ②

①과 ②에서 $f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$이다.

따라서

$$l=\int_0^1\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\frac{1}{2}[e^x-e^{-x}]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{27}{10}-\frac{10}{27}\right)=\frac{719}{540}\quad(\because \ln 2{,}7=1\Leftrightarrow e=2.7)$$

$$\therefore q-p=179$$