수학영역(A형)

1. 정답 ④

[해설]

$A+2B=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\6&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\7&4\end{pmatrix}$

2. 정답 ⑤

[해설]

$8^{\frac{1}{3}}+9^{\frac{1}{2}}=2+3=5$

3. 정답 ①

[해설]

$\lim_{n\to\infty}\left\{6+\left(\frac{5}{9}\right)\right\}=6$

4. 정답 ③

[해설]

공차를 d라 하면 $a_{13}-a_{11}=2d=14$

5. 정답 ②

[해설]

$\log_2 5+\log_2\frac{4}{5}=\log_2 4=2$

6. 정답 ④

[해설]

그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix}0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&1&0&1&0\end{pmatrix}$$

위 행렬에서 행의 모든 성분의 합이 3인 행의 개수는 4개이다.

7. 정답 ①

[해설]

(분모) → 0 일 때, (분자) → 0 이어야만 극한값이 존재한다. 따라서 $a=4$이고 $\lim_{x\to1}\frac{4x-4}{x-1}=4$로부터 $b=4$이다. $\therefore\ a+b=8$

8. 정답 ③

[해설]

$\sum_{k=1}^{11}(5a_k+b_k)=5\sum_{k=1}^{11}a_k+\sum_{k=1}^{11}b_k=5\times4+24=44$

9. 정답 ④

[해설]

$\lim_{x\to-1}f(x)+\lim_{x\to1+0}f(x)=1+3=4$

10. 정답 ③

[해설]

$A=(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{a}\begin{pmatrix}a&0\\1&1\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합이 3이므로 $\frac{a+2}{a}=3$

$\therefore\ a=1$

11. 정답 ⑤

[해설]

$f(x)=x^2+8x$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=2f'(1)$

그런데 $f'(x)=2x+8$이므로 $2f'(1)=2\times10=20$

12. 정답 ②

[해설]

$S_n=\frac{a_1(3^n-1)}{3-1}=\frac{a_1(3^n-1)}{2}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{a_1(3^n-1)}{2}}{3^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_1(3^n-1)}{2\cdot3^n}=\frac{a_1}{2}=5$ 로부터

$a_1=10$

13. 정답 ⑤

[해설]

$g'(x)=f(x)$ 이므로 $f'(x)=2(x-3)$ 으로부터 $g'(2)=f(2)=1$
따라서 구하고자 하는 접선의 방정식은 $y=x-5$
이 접선의 x 절편은 5이다.

14. 정답 ②

[해설]
$f(x)=n \Leftrightarrow (x-3)^2=n \Leftrightarrow x^2-6x+9-n=0$ 의 두 근이 $\alpha,\ \beta$ 이므로 근과 계수와의 관계에 의해 다음이 성립한다.
$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=9-n$
그런데 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ 이므로 $|\alpha-\beta|=\sqrt{4n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\{h(n+1)-h(n)\}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\{2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=1$$

15. 정답 ④

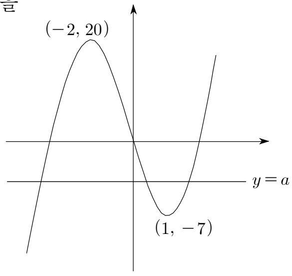
[해설]
$f(x)=\log_3(x-a)+2$ 이므로 $f^{-1}(x)=3^{x-2}+a$ 가 된다.
$\therefore\ a=4$

16. 정답 ②

[해설]
$a_2,\ a_k,\ a_8$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $k=5$
또한 $a_1,\ a_2,\ a_5$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$a_2=a_1+6,\ a_5=a_1+24$ 라 놓으면 $(a_2)^2=a_1\times a_5$ 로부터
$(a_1+6)^2=a_1\times(a_1+24) \Leftrightarrow 12a_1=36 \quad \therefore\ a_1=3$

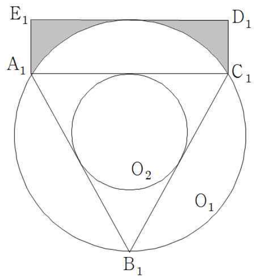
17. 정답 ①

[해설]
$f(x)=g(x) \Leftrightarrow 3x^3-x^2-3x=x^3-4x^2+9x+a$
$\Leftrightarrow 2x^3+3x^2-12x=a$
$h(x)=2x^3+3x^2-12x$ 라 놓으면 $h'(x)=6x^2+6x-12=0$ 이므로 $x=-2$ 일 때 극댓값 20을 갖고, $x=1$ 일 때 극솟값 -7 을 가짐을 알 수 있다.
$y=h(x)$ 와 $y=a$ 가 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖기 위해서는 $-7<a<0$ 을 만족해야 한다.



18. 정답 ①

[해설]



원의 중심을 O라 하면 S_1 은 (직사각형 $A_1B_1C_1D_1$)+(삼각형 $\triangle OA_1C_1$)−(부채꼴 OA_1C_1)이 됨을 알 수 있다. 즉,

$$S_1=(2\sqrt{3}\times 1)+\left(\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 1\right)-\left(\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{2\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$$

또한 O_2 의 반지름의 길이는 O_1 의 반지름의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)=4\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi$$

19. 정답 ⑤

[해설]
식 (*)의 양변에 S_n 을 더하여 정리하면
$S_{n+1}+1=2^n(S_n+1)$
이다. $b_n=\log_2(S_n+1)$ 이라 하면 $b_1=1$ 이고
$b_{n+1}=\boxed{n}+b_n$
이다. 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항을 구하면

$$b_n=\frac{n^2-n+2}{2}\quad(n\ge 1)$$

이므로

$$S_n=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}-1\quad(n\ge 1)$$

이다. 그러므로 $a_1=1$ 이고, $n\ge 2$ 일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}-2^{\boxed{\frac{n^2-3n+4}{2}}}$$
$$=2^{\boxed{\frac{n^2-3n+4}{2}}}\times(2^{n-1}-1)$$

$\therefore\ f(12)-g(5)=12-7=5$

20. 정답 ③

[해설]
$f(ab)=f(a)f(b)+2$ 를 만족하기 위해서는 $f(ab)=2,\ f(a)=1,\ f(b)=0$ 이거나 또는 $f(ab)=2,\ f(a)=0,\ f(b)=1$ 이어야 한다.
1) $f(ab)=2,\ f(a)=1,\ f(b)=0$ 인 경우

$(a,\ b)=(5,\ 20),\ (6,\ 17),\ (6,\ 18),\ (6,\ 19),\ (6,\ 20),\ (7,\ 15),$
$(7,\ 16),\ \cdots,\ (7,\ 20),\ (8,\ 13),\ (8,\ 14),\ \cdots,\ (8,\ 20),$
$(9,\ 12),\ (9,\ 13),\ \cdots,\ (9,\ 20)$

이상의 28가지이다.

2) $f(ab)=2,\ f(a)=0,\ f(b)=1$인 경우

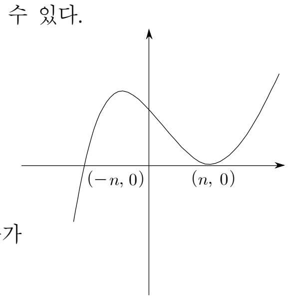
위 1)의 경우와 마찬가지로 28가지가 있다.

1)과 2)로부터 $a+b$의 최솟값은 21이다.

21. 정답 ③

[해설]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $x=n$에서 근을 갖고 $x\geq -n$일 때 $f(x)\geq 0$, $x\leq -n$일 때 $f(x)\leq 0$을 만족해야 하므로 $f(x)=(x+n)(x-n)^2$가 됨을 알 수 있다.



$f'(x)=(x-n)^2+(x+n)2(x-n)$

$\quad =3x^2-2nx-n^2=0$

$\Leftrightarrow (3x+n)(x-n)=0$

으로부터 $x=-\dfrac{n}{3}$일 때 극댓값

$a_n=\dfrac{32}{27}n^3$을 가지므로 a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은 3이다.

22. 정답 11

[해설]

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+7}{x-1}=\frac{2^2+7}{2-1}=11$$

23. 정답 10

[해설]

$f'(x)=3x^2+10$이므로 $f'(0)=10$

24. 정답 19

[해설]

$$\sum_{k=1}^{10}(2k+a)=2\times\frac{10\cdot 11}{2}+10\times a=300 \qquad \therefore\ a=19$$

25. 정답 2

[해설]

$\begin{pmatrix}2a & -1\\ 8 & a-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$이 무수히 많은 해를 갖기 위해서는

$\dfrac{2a}{8}=\dfrac{-1}{a-4}\ \Leftrightarrow\ 2a(a-4)=-8\ \Leftrightarrow\ a^2-4a+4=0$

을 만족해야만 한다. $\quad\therefore\ a=2$

26. 정답 9

[해설]

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$이 수렴하므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$으로부터 $\dfrac{a_n}{n}=b_n$이라 놓으면

$a_n=nb_n$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+9n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{nb_n+9n}{n}=9$

27. 정답 3

[해설]

$f'(x)=x^2-9=0$으로부터 $y=f(x)$는 $x=3,\ -3$일 때 각각 극솟값과 극댓값을 가짐을 알 수 있다.

따라서 구하고자 하는 양수 a의 최댓값은 3이다.

28. 정답 15

[해설]

일차함수 $y=f(x)$를 $y=f(x)=a(x+5)$ $(a>0)$라 놓으면

$2^{f(x)}\leq 8\ \Leftrightarrow\ 2^{f(x)}\leq 2^3\ \Leftrightarrow\ f(x)\leq 3$

$\Leftrightarrow\ a(x+5)\leq 3\ \Leftrightarrow\ x\leq \dfrac{3}{a}-5$

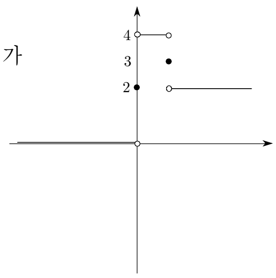
의 해가 $x\leq -4$이어야 하므로 $\dfrac{3}{a}-5=-4$로부터 $a=3$

$\therefore\ f(0)=15$

29. 정답 8

[해설]

$f(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 2 & (t=0)\\ 3 & (0<t<1)\\ 2 & (t>1)\end{cases}$이므로 $f(t)g(t)$가



모든 실수 t에서 연속이기 위해서는 $g(0)=g(1)=0$을 만족해야만 한다.

$\therefore\ g(t)=t(t-1)$

$\therefore\ f(3)+g(3)=2+6=8$

30. 정답 120

[해설]

1) $n=2$일 때

$a<2^k$일 때, $b\leq \log_2 a$를 만족하는 자연수 $(a,\ b)$의 순서쌍은

$a=2$일 때, $b\leq \log_2 2$로부터 $(a,\ b)=(2,\ 1)$

$a=3$일 때, $b\leq \log_2 3$으로부터 $(a,\ b)=(3,\ 1)$

$a=4$일 때, $b\leq \log_2 4$로부터 $(a,\ b)=(3,\ 1),\ (3,\ 2)$

……………………

$a=2^{k-1}$일 때, $b\leq \log_2 2^{k-1}$로부터

$(a,\ b) = (2^{k-1},\ 1),\ (2^{k-1},\ 2),\ \cdots\ (2^{k-1},\ k-1)$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$a = 2^k - 1$ 일 때, $b \le \log_2(2^k - 1)$ 로부터

$(a,\ b) = (2^k-1,\ 1),\ (2^k-1,\ 2),\ \cdots\ (2^k-1,\ k-1)$

따라서 구하고자 하는 순서쌍 $(a,\ b)$ 의 개수는

$1 \times (2^2 - 2^1) + 2 \times (2^3 - 2^2) + \cdots + (k-1) \times (2^k - 2^{k-1})$

$= (k-2) \cdot 2^k + 2 \cdots$ ①

또한, $a \ge 2^k$ 일 때, $b \le -(a - 2^k)^2 + k^2$ 을 만족하는 자연수 $(a,\ b)$의 순서쌍은 다음과 같다.

$a = 2^k$ 일 때, $b \le k^2$ 으로부터 $(a,\ b) = (2^k,\ 1),\ (2^k,\ 2),\ \cdots,\ \ (2^k,\ k^2)$

$a = 2^k + 1$ 일 때, $b \le k^2 - 1$ 로부터

$(a,\ b) = (2^k+1,\ 1),\ (2^k+1,\ 2),\ \cdots,\ (2^k+1,\ k^2-1)$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$a = 2^k + k - 1$ 일 때, $b \le 2k - 1$ 로부터

$(a,\ b) = (2^k+k-1,\ 1),\ (2^k+k-1,\ 2),\ \cdots,\ (2^k+k-1,\ 2k-1)$

따라서 구하고자 하는 순서쌍 $(a,\ b)$ 의 개수는

$k^2 + (k^2 - 1^2) + (k^2 - 2^2) + \cdots + (k^2 - (k-1)^2) = \dfrac{4k^3 + 3k^2 - k}{6} \cdots$ ②

①과 ② 로부터 $f(2) = 6$

마찬가지의 방법으로 $f(3) = 5,\ f(4) = 4$

$\therefore\ f(2) \times f(3) \times f(4) = 120$