[준킬러][기하] 3공도좌

07 기하

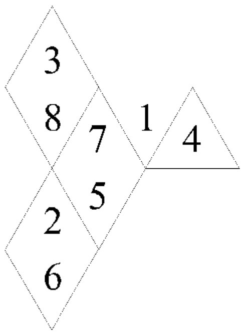
09 공간도형

01 직선, 평면의 위치관계

02 위치 관계1 (직선 또는 평면의 위치 관계)

[출처] 2004 모의_공공 교육청 고1 06월 20

1. 그림은 각 면에 번호를 적어 넣 은 정팔면체의 전개도이다. 이 전개도로 정팔면체를 만들었을 때 두 개의 면이 한 모서리에서 만나면 그 두 면은 '서로 이웃'하다고 한다. 예를 들어 7의 면과 서로 이웃한 세 면은 1, 5, 8이다. 이때, 6의 면과 서로 이웃한 세 면을 바르게 묶은 것은?



① 1, 2, 3　② 1, 3, 5　③ 2, 3, 4
④ 2, 4, 5　⑤ 2, 5, 8

07 기하

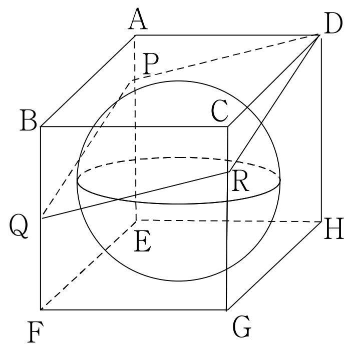
09 공간도형

01 직선, 평면의 위치관계

06 위치 관계5 (공간에서의 길이. 넓이. 부피)

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 15

2. 그림과 같이 한 변의 길이가 12인 정육면체 $ABCD-EFGH$에 내접하는 구가 있다. 변 AE, CG를 $1:3$으로 내분하는 점을 각각 P, R라 하고 변 BF의 중점을 Q라 한다. 네 점 D, P, Q, R를 지나는 평면으로 내접하는 구를 자를 때 생기는 원의 넓이는?



① 26π　② 28π　③ 30π
④ 32π　⑤ 34π

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 12

3. 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 구에 내접하는 정사면체 ABCD가 있다. 두 삼각형 BCD, ACD의 무게중심을 각각 F, G라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 직선 AF와 직선 BG는 꼬인 위치에 있다.

ㄴ. 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$보다 작다.

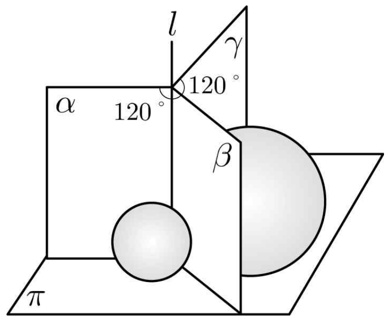
ㄷ. $\angle AOG = \theta$일 때, $\cos\theta = \frac{1}{3}$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 24

4. 평면 π에 수직인 직선 l을 경계로 하는 세 반평면 α, β, γ가 있다. α, β가 이루는 각의 크기와 β, γ가 이루는 각의 크기는 모두 120°이다. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 구가 π, α, β에 동시에 접하고, 반지름의 길이가 2인 구가 π, β, γ에 동시에 접한다.



두 구의 중심 사이의 거리를 d라 할 때, $3d^2$의 값을 구하시오. (단, 두 구는 평면 π의 같은 쪽에 있다.)

07 기하 09 공간도형

02 삼수선의 정리

01 삼수선의 정리1 (기본, 길이)

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 10월 18

5. 평면 α 위에 거리가 4인 두 점 A, C와 중심이 C이고 반지름의 길이가 2인 원이 있다. 점 A에서 이 원에 그은 접선의 접점을 B라 하자. 점 B를 지나고 평면 α와 수직인 직선 위에 $\overline{\mathrm{BP}}=2$가 되는 점을 P라 할 때, 점 C와 직선 AP 사이의 거리는?

① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$

④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

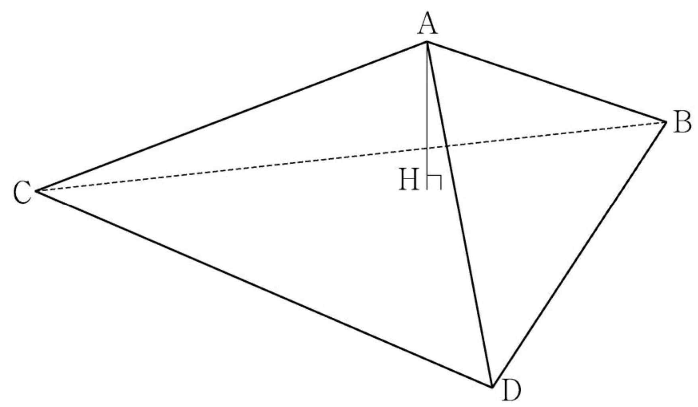
07 기하 09 공간도형

02 삼수선의 정리

02 삼수선의 정리2 (길이, 입체도형에 활용)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 19

6. 한 변의 길이가 12인 정삼각형 BCD를 한 면으로 하는 사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 놓여 있다. 삼각형 CDH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 3배, 삼각형 DBH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 2배이고 $\overline{\mathrm{AH}}=3$이다. 선분 BD의 중점을 M, 점 A에서 선분 CM에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 선분 AQ의 길이는?



① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$

④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$

07 기하

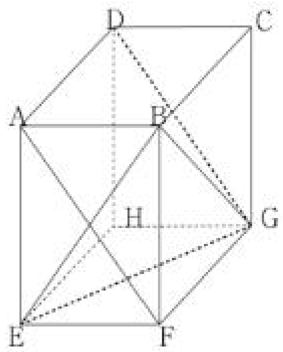
09 공간도형

02 삼수선의 정리

05 삼수선의 정리5 (직선과 평면이 이루는 각)

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 07월 19

7. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=3$, $\overline{AE}=4$인 직육면체 $ABCD-EFGH$에서 평면 AFGD와 평면 BEG의 교선을 l이라 하자. 직선 l과 평면 EFGH가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은?



① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$

④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

07 기하

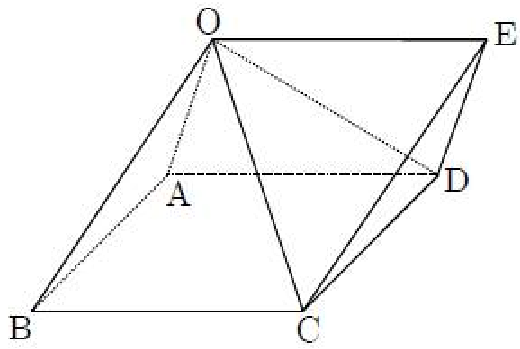
09 공간도형

02 삼수선의 정리

06 이면각1 (이면각 구하기)

[출처] 2007 모의_공공 사관학교 고3 07월 13

8. 그림은 모든 모서리의 길이가 같은 정사각뿔 $O-ABCD$와 정사면체 $O-CDE$를 면 OCD가 공유하도록 붙여놓은 것이다. 평면 ABCD와 평면CDE가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

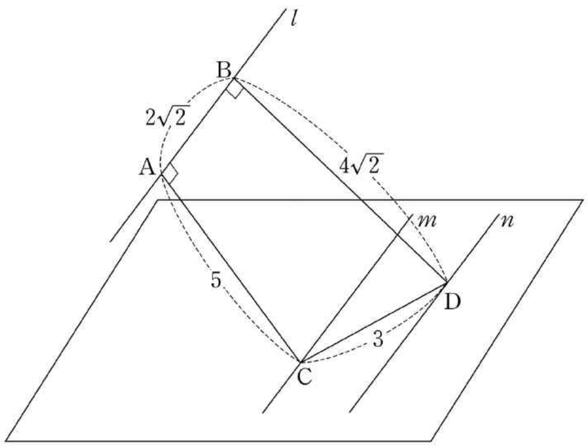
[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 25

9. 같은 평면 위에 있지 않고 서로 평행한 세 직선 l, m, n이 있다. 직선 l 위의 두 점 A, B, 직선 m 위의 점 C, 직선 n위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{CD}=3$

(나) $\overline{AC}\perp l$, $\overline{AC}=5$

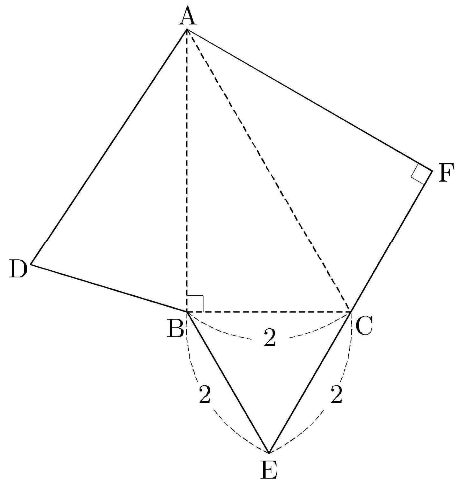
(다) $\overline{BD}\perp l$, $\overline{BD}=4\sqrt{2}$



두 직선 m, n을 포함하는 평면과 세 점 A, C, D를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $15\tan^2\theta$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

10. 그림은 어떤 사면체의 전개도이다. 삼각형 BEC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이고, $\angle ABC=\angle CFA=90^\circ$, $\overline{AC}=4$이다. 이 전개도로 사면체를 만들 때, 두 면 ACF, ABC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은?

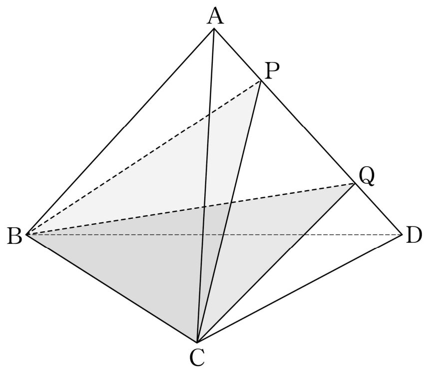


① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 10월 26

11. 한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 선분 AD를 $1:3$으로 내분하는 점을 P, $3:1$로 내분하는 점을 Q라 하자. 두 평면 PBC와 QBC가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

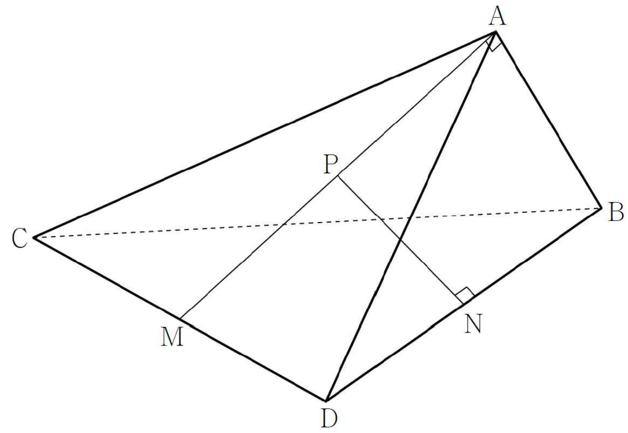


[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 29

12. 그림과 같이

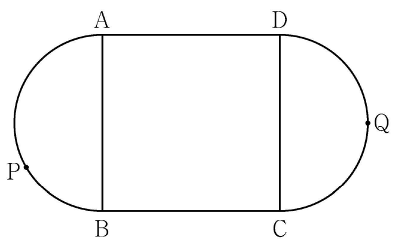
$$\overline{AB}=4,\ \overline{CD}=8,\ \overline{BC}=\overline{BD}=4\sqrt{5}$$

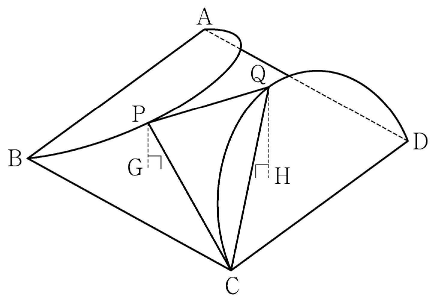
인 사면체 ABCD에 대하여 직선 AB와 평면 ACD는 서로 수직이다. 두 선분 CD, DB의 중점을 각각 M, N이라 할 때, 선분 AM 위의 점 P에 대하여 선분 DB와 선분 PN은 서로 수직이다. 두 평면 PDB와 CDB가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $40\cos^2\theta$의 값을 구하시오.



[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 29

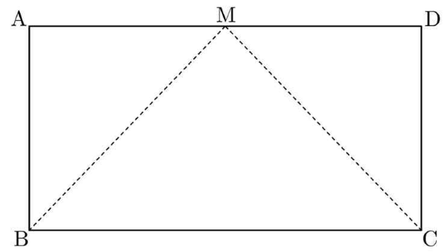
13. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정사각형 ABCD에 두 선분 AB, CD를 각각 지름으로 하는 두 반원이 붙어 있는 모양의 종이가 있다. 반원의 호 AB의 삼등분점 중 점 B에 가까운 점을 P라 하고, 반원의 호 CD를 이등분하는 점을 Q라 하자.
이 종이에서 두 선분 AB와 CD를 접는 선으로 하여 두 반원을 접어 올렸을 때 두 점 P, Q에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면 두 점 G, H는 정사각형 ABCD의 내부에 놓여 있고, $\overline{\mathrm{PG}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{QH}}=2\sqrt{3}$이다. 두 평면 PCQ와 ABCD가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $70\times\cos^2\theta$의 값을 구하시오.
(단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)



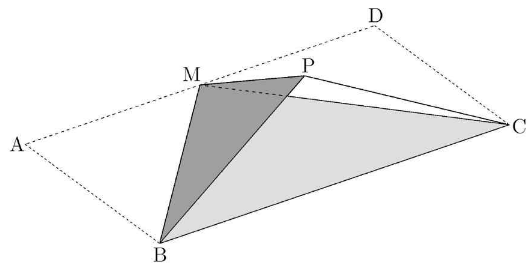


[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 28

14. [그림1]과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{7}$인 직사각형 ABCD 모형의 종이가 있다. 선분 AD의 중점을 M이라 하자. 두 선분 BM, CM을 접는 선으로 하여 [그림2]와 같이 두 점 A, D가 한 점 P에서 만나도록 종이를 접었을 때, 평면 PBM과 평면 BCM이 이루는 각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은?
(단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)



[그림 1]



[그림 2]

① $\frac{17}{27}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{19}{27}$
④ $\frac{20}{27}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

07 기하

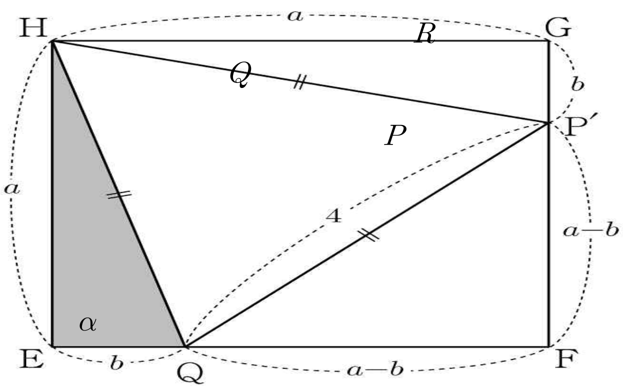
09 공간도형

02 삼수선의 정리

07 이면각2 (이면각 조건)

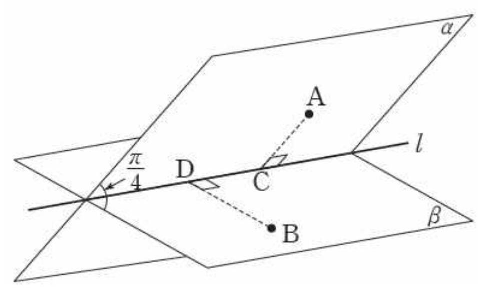
[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 24

15. 그림과 같이 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{3}$ 이고 높이가 서로 다른 세 원기둥이 서로 외접하며 한 평면 α 위에 놓여 있다. 평면 α 와 만나지 않는 세 원기둥의 밑면의 중심을 각각 P, Q, R라 할 때, 삼각형 QPR는 이등변삼각형이고, 평면 QPR와 평면 α 가 이루는 각의 크기는 $60°$ 이다. 세 원기둥의 높이를 각각 8, a, b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.
(단, $8<a<b$)



[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 09월 29

16. 그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 인 두 평면 α와 β가 있고, 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=\sqrt{3}$ 이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$ 일 때, 사면체 ABCD의 부피는 $a+b\sqrt{2}$ 이다. $36(a+b)$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b는 유리수이다.)



07 기하

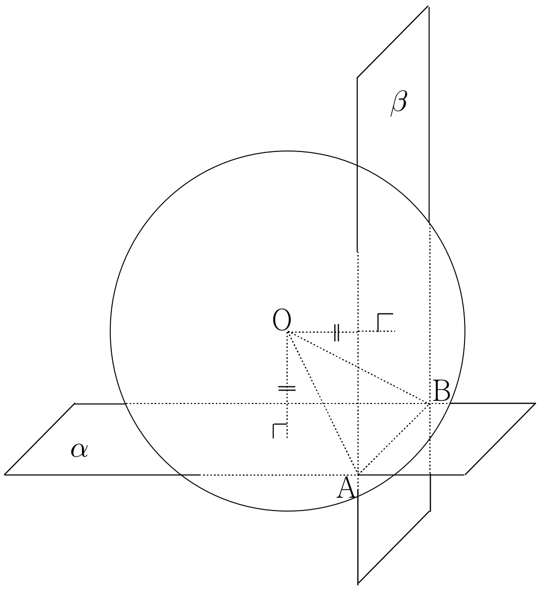
09 공간도형

02 삼수선의 정리

08 이면각3 (서로 수직인 두 평면)

[출처] 2007 모의_공공 사관학교 고3 07월 12

17. 중심이 O 이고 반지름의 길이가 1 인 구와, 점 O 로부터 같은 거리에 있고 서로 수직인 두 평면 α, β가 있다. 그림과 같이 두 평면 α, β의 교선이 구와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB가 정삼각형일 때, 점 O 와 평면 α사이의 거리는?



① $\frac{\sqrt{2}}{5}$　② $\frac{\sqrt{6}}{4}$　③ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{6}$　⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 11월

18. 좌표공간에 서로 수직인 두 평면 α와 β가 있다. 평면 α 위의 두 점 A, B에 대하여 $\overline{AB}=3\sqrt{5}$이고 직선 AB는 평면 β에 평행하다. 점 A와 평면 β 사이의 거리가 2이고, 평면 β 위의 점 P와 평면 α 사이의 거리는 4일 때, 삼각형 PAB의 넓이를 구하시오.

07 기하

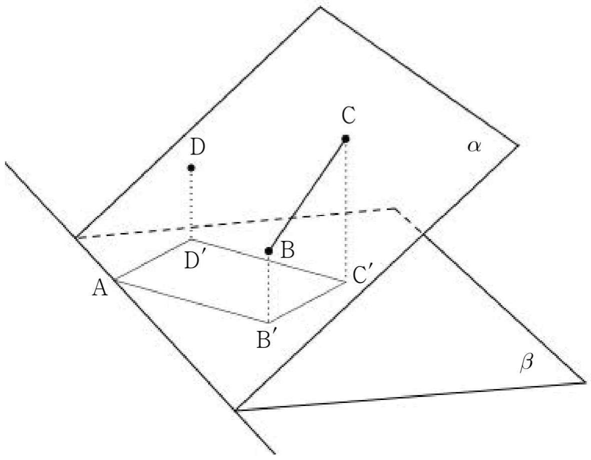
09 공간도형

03 정사영

02 정사영2 (길이)

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 17

19. 그림과 같이 서로 다른 두 평면 α, β의 교선 위에 점 A가 있다. 평면 α 위의 세 점 B, C, D의 평면 β위로의 정사영을 각각 B′, C′, D′이라 할 때, 사각형 AB′C′D′은 한 변의 길이가 $4\sqrt{2}$인 정사각형이고, $\overline{\mathrm{BB'}}=\overline{\mathrm{DD'}}$이다. 두 평면 α와 β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta=\frac{3}{4}$이다. 선분 BC의 길이는? (단, 선분 BD와 평면 β는 만나지 않는다.)



① $\sqrt{35}$ ② $\sqrt{37}$ ③ $\sqrt{39}$
④ $\sqrt{41}$ ⑤ $\sqrt{43}$

07 기하

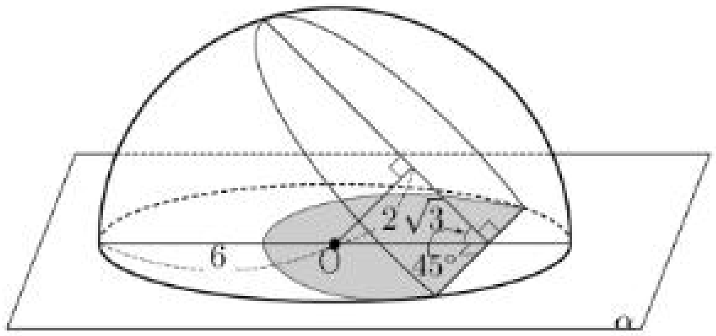
09 공간도형

03 정사영

03 정사영3 (이면각이 주어진 경우)

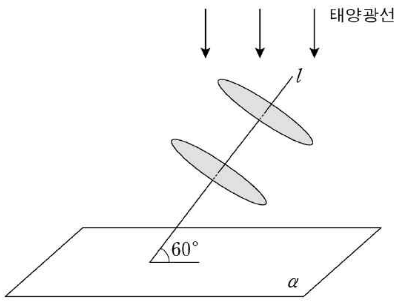
[출처] 2007 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 24

20. 반지름의 길이가 6인 반구가 평면 α 위에 놓여 있다. 반구와 평면 α가 만나서 생기는 원의 중심을 O라 하자. 그림과 같이 중심 O로부터 거리가 $2\sqrt{3}$이고 평면 α와 45°의 각을 이루는 평면으로 반구를 자를 때, 반구에 나타나는 단면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 $\sqrt{2}(a+b\pi)$이다. $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 자연수이다.)



[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 11

21. 그림과 같이 중심 사이의 거리가 $\sqrt{3}$이고 반지름의 길이가 1인 두 원판과 평면 α가 있다. 각 원판의 중심을 지나는 직선 l은 두 원판의 면과 각각 수직이고, 평면 α와 이루는 각의 크기가 60°이다. 태양광선이 그림과 같이 평면 α에 수직인 방향으로 비출 때, 두 원판에 의해 평면 α에 생기는 그림자의 넓이는?
(단, 원판의 두께는 무시한다.)



① $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{8}$ ② $\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{1}{8}$

④ $\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{16}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{4}$

07 기하

09 공간도형

03 정사영

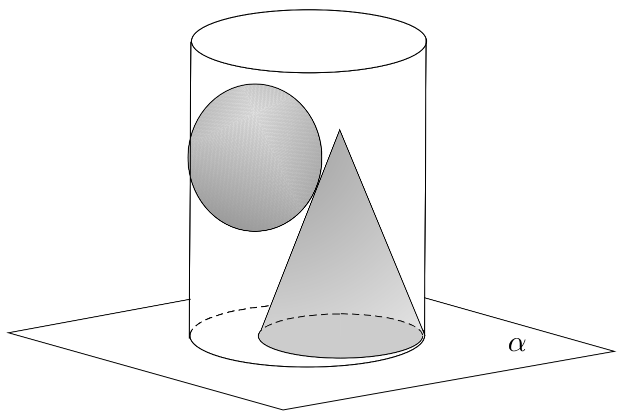
04 정사영4 (각의 크기 구하기)

[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 11월 29

22. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 7인 원기둥과 밑면의 반지름의 길이가 5이고 높이가 12인 원뿔이 평면 α위에 놓여 있고, 원뿔의 밑면의 둘레가 원기둥의 밑면의 둘레에 내접한다. 평면 α와 만나는 원기둥의 밑면의 중심을 O, 원뿔의 꼭짓점을 A라 하자. 중심이 B이고 반지름의 길이가 4인 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S는 원기둥과 원뿔에 모두 접한다. (나) 두 점 A, B의 평면 α위로의 정사영이 각각 A′, B′일 때, $\angle$A′OB′$=180^\circ$이다.

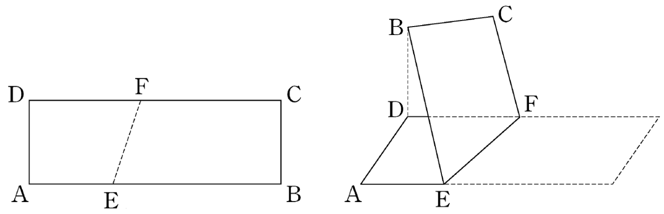
직선 AB와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta=p$이다. $100p$의 값을 구하시오.
(단, 원뿔의 밑면의 중심과 점 A′은 일치한다.)



[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 11월 28

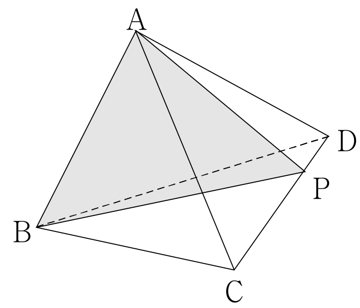
23. 그림과 같이 $\overline{AB}=9$, $\overline{AD}=3$인 직사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. 선분 AB 위의 점 E와 선분 DC 위의 점 F를 연결하는 선을 접는 선으로 하여, 점 B의 평면 AEFD 위로의 정사영이 점 D가 되도록 종이를 접었다. $\overline{AE}=3$일 때, 두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 각의 크기가 θ이다. $60\cos\theta$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)



[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 07월 21

24. 그림과 같이 정사면체 ABCD의 모서리 CD를 $3:1$로 내분하는 점을 P라 하자. 삼각형 ABP와 삼각형 BCD가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



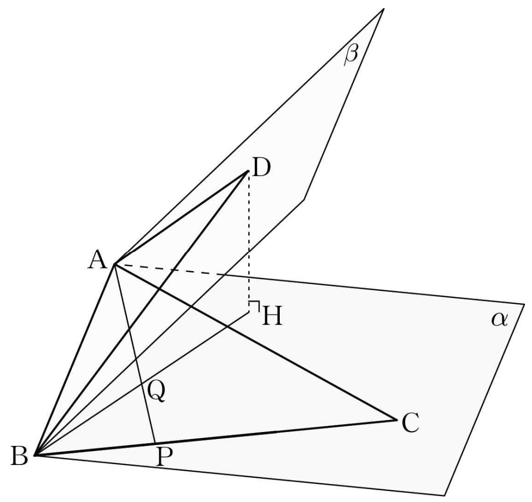
① $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{12}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{18}$

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 10월 27

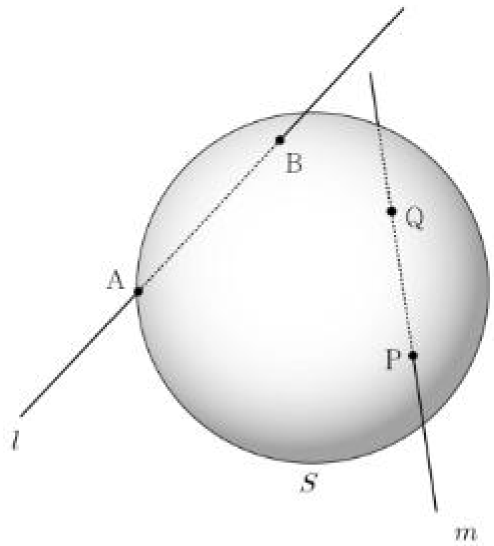
25. 그림과 같이 평면 α 위에 넓이가 27인 삼각형 ABC가 있고, 평면 β 위에 넓이가 35인 삼각형 ABD가 있다. 선분 BC를 1 : 2로 내분하는 점을 P라 하고 선분 AP를 2 : 1로 내분하는 점을 Q라 하자. 점 D에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 Q는 선분 BH의 중점이다. 두 평면 α, β가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos\theta = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 07월 29

26. 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 구 S와 서로 다른 두 직선 l, m이 있다. 구 S와 직선 l이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B, 구 S와 직선 m이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 APQ는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형이고 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\angle ABQ = \frac{\pi}{2}$일 때 평면 APB와 평면 APQ가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $100\cos^2\theta$의 값을 구하시오.



07 기하

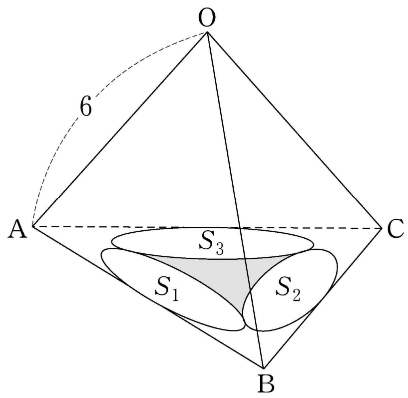
09 공간도형

03 정사영

05 정사영5 (정사영의 넓이 구하기. 이면각이 주어지지 않은 경우)

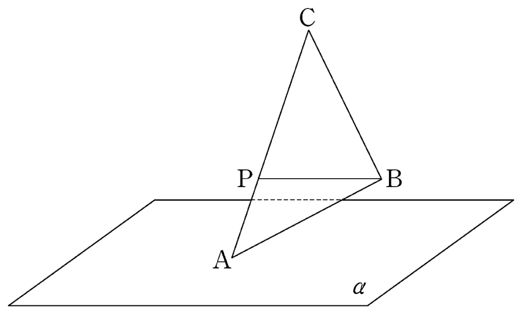
[출처] 2007 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 24

27. 한 변의 길이가 6인 정사면체 OABC가 있다. 세 삼각형 △OAB, △OBC, △OCA에 각각 내접하는 세 원의 평면 ABC 위로의 정사영을 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. 그림과 같이 세 도형 S_1, S_2, S_3으로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 할 때, $(S+\pi)^2$의 값을 구하시오.



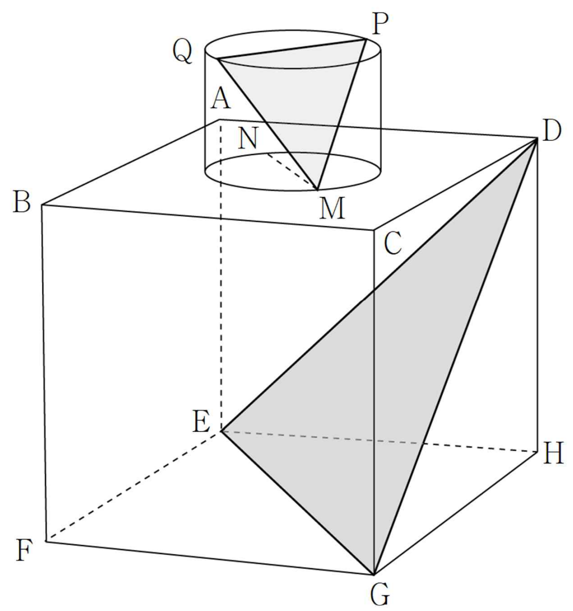
[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 09월 29

28. 그림과 같이 평면 α 위에 점 A가 있고 α로부터의 거리가 각각 1, 3인 두 점 B, C가 있다. 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점 P에 대하여 $\overline{BP}=4$이다. 삼각형 ABC의 넓이가 9일 때, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. S^2의 값을 구하시오.



[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 07월

29. 한 변의 길이가 4인 정육면체 ABCD－EFGH 와 밑면의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이고 높이가 2인 원기둥이 있다. 그림과 같이 이 원기둥의 밑면이 평면 ABCD에 포함되고 사각형 ABCD의 두 대각선의 교점과 원기둥의 밑면의 중심이 일치하도록 하였다. 평면 ABCD에 포함되어 있는 원기둥의 밑면을 α, 다른 밑면을 β라 하자. 평면 AEGC가 밑면 α와 만나서 생기는 선분을 $\overline{\mathrm{MN}}$, 평면 BFHD가 밑면 β와 만나서 생기는 선분을 $\overline{\mathrm{PQ}}$라 할 때, 삼각형 MPQ의 평면 DEG 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{b}{a}\sqrt{3}$ 이다. a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.)

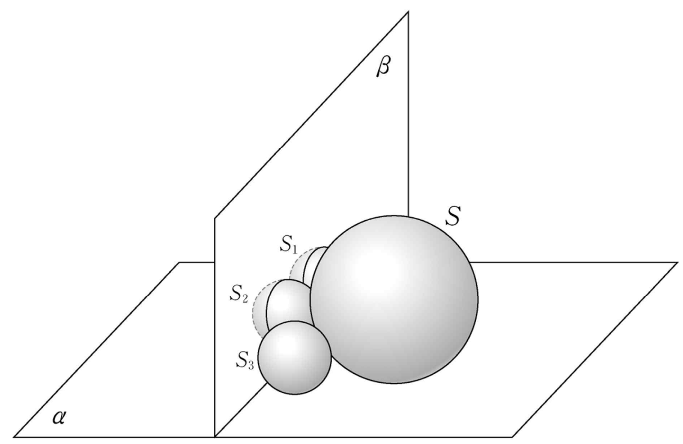


[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 09월

30. 그림과 같이 평면 α 위에 놓여 있는 서로 다른 네 구 S, S_1, S_2, S_3이 다음 조건을 만족시킨다.

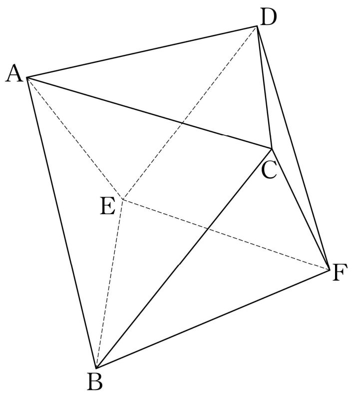
> (가) S의 반지름의 길이는 3이고, S_1, S_2, S_3의 반지름의 길이는 1이다.
>
> (나) S_1, S_2, S_3은 모두 S에 접한다.
>
> (다) S_1은 S_2와 접하고, S_2는 S_3과 접한다.

S_1, S_2, S_3의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3이라 하자. 두 점 O_1, O_2를 지나고 평면 α에 수직인 평면을 β, 두 점 O_2, O_3을 지나고 평면 α에 수직인 평면이 S_3과 만나서 생기는 단면을 D라 하자. 단면 D의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 $\frac{q}{p}\pi$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 10월 19

31. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정팔면체 ABCDEF가 있다. 두 삼각형 ABC, CBF의 평면 BEF 위로의 정사영의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, S_1+S_2의 값은?

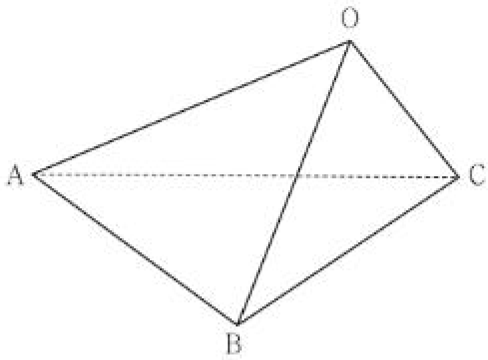


① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

④ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 07월 17

32. 사면체 OABC에서 $\overline{\mathrm{OC}}=3$이고 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이다. 직선 OC와 평면 OAB가 수직일 때, 삼각형 OBC의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는?



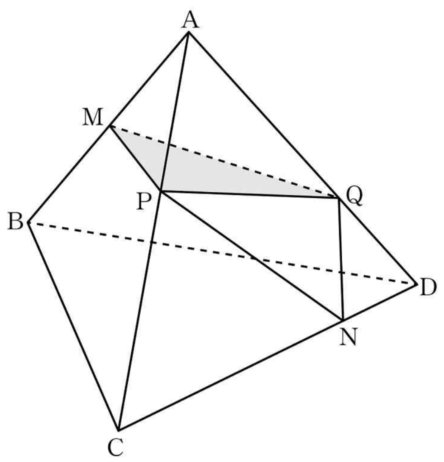
① $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

④ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{4}$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 10월 19

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 10월 19

33. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정사면체 ABCD에서 선분 AB의 중점을 M, 선분 CD를 3 : 1로 내분하는 점을 N이라 하자. 선분 AC 위에 $\overline{\mathrm{MP}}+\overline{\mathrm{PN}}$의 값이 최소가 되도록 점 P를 잡고, 선분 AD 위에 $\overline{\mathrm{MQ}}+\overline{\mathrm{QN}}$의 값이 최소가 되도록 점 Q를 잡는다. 삼각형 MPQ의 평면 BCD위로의 정사영의 넓이는?



① $\frac{\sqrt{3}}{30}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{15}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{10}$

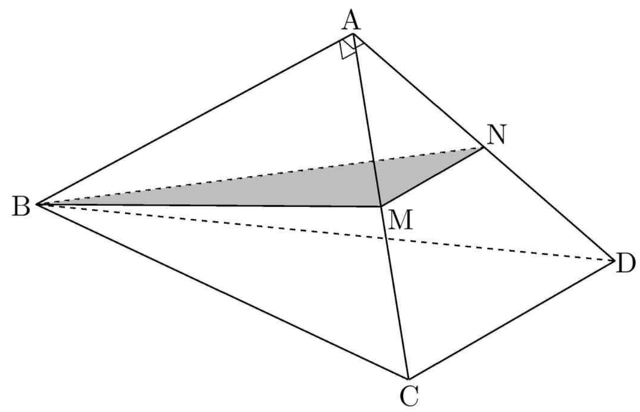
④ $\frac{2\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{6}$

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 26

34. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ACD를 한 면으로 하는 사면체 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

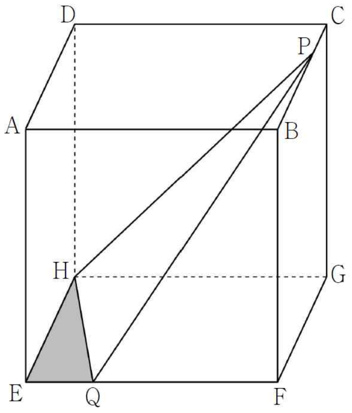
> (가) $\overline{\mathrm{BC}}=3\sqrt{10}$
>
> (나) $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$

두 모서리 AC, AD의 중점을 각각 M, N이라 할 때, 삼각형 BMN의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. $40\times S$의 값을 구하시오.



[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 07월 19

35. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AD}$이고 $\overline{AE}=\sqrt{15}$인 직육면체 ABCD−EFGH가 있다. 선분 BC 위의 점 P와 선분 EF 위의 점 Q에 대하여 삼각형 PHQ의 평면 EFGH위로의 정사영은 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다. 삼각형 EQH의 평면 PHQ 위로의 정사영의 넓이는?

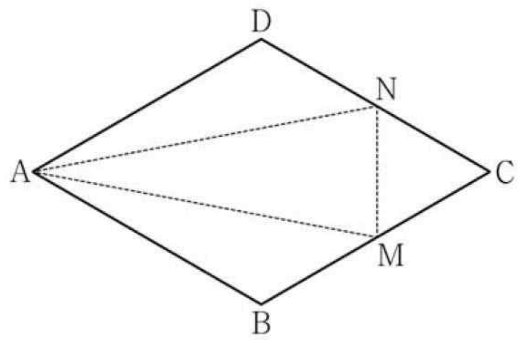


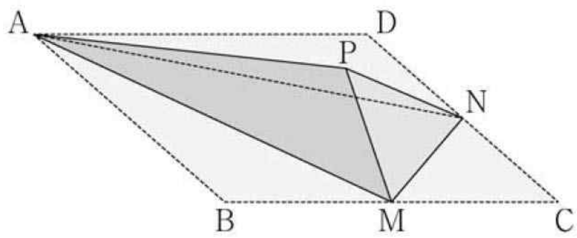
① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 27

36. 그림과 같이 한 변의 길이가 4이고 $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$인 마름모 ABCD 모양의 종이가 있다. 변 BC와 변 CD의 중점을 각각 M과 N이라 할 때, 세 선분 AM, AN, MN을 접는 선으로 하여 사면체 PAMN이 되도록 종이를 접었다. 삼각형 AMN의 평면 PAM 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 고려하지 않으며 P는 종이를 접었을 때 세 점 B, C, D가 합쳐지는 점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)





07 기하

09 공간도형

03 정사영

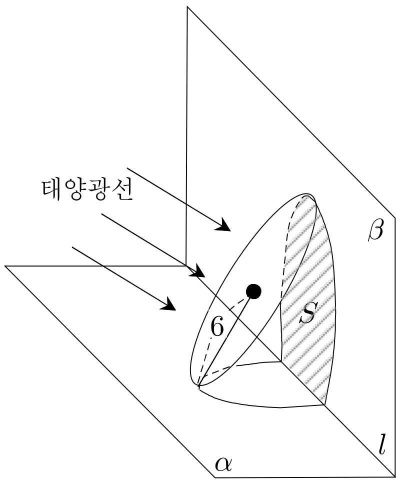
07 정사영7 (그림자의 넓이)

[출처] 2006 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 25

37. 서로 수직인 두 평면 α, β의 교선을 l이라 하자.

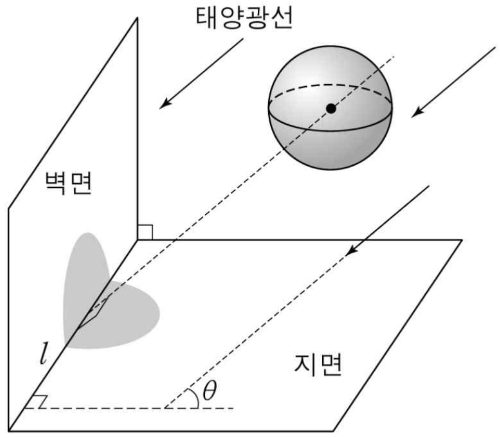
반지름의 길이가 6인 원판이 두 평면 α, β와 각각 한 점에서 만나고 교선 l에 평행하게 놓여 있다. 태양광선이 평면 α와 30°의 각을 이루면서 원판의 면에 수직으로 비출 때, 그림과 같이 평면 β에 나타나는 원판의 그림자의 넓이를 S라 하자. S의 값을 $a+b\sqrt{3}\pi$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

(단, a, b는 자연수이고 원판의 두께는 무시한다.)



[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 15

38. 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 구 모양의 공이 공중에 있다. 벽면과 지면은 서로 수직이고, 태양광선이 지면과 크기가 θ인 각을 이루면서 공을 비추고 있다. 태양광선과 평행하고 공의 중심을 지나는 직선이 벽면과 지면의 교선 l과 수직으로 만난다. 벽면에 생기는 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지의 거리의 최댓값을 a라 하고, 지면에 생기는 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지의 거리의 최댓값을 b라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. 그림자와 교선 l의 공통부분의 길이는 $2r$이다.

ㄴ. $\theta=60^\circ$이면 $a<b$이다.

ㄷ. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{r^2}$

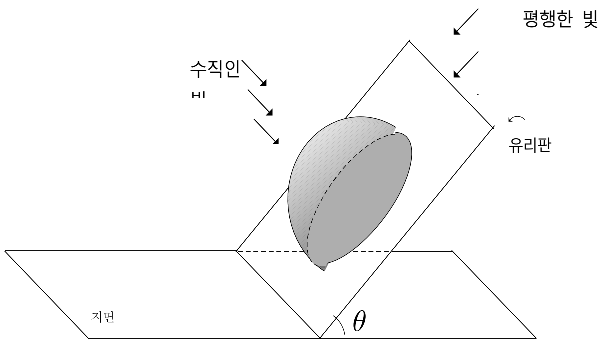
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2010 모의_공공 사관학교 고3 07월 14

39. 그림과 같이 지면과 이루는 각의 크기가 θ인 평평한 유리판 위에 반구가 얹어져있다. 햇빛이 유리판에 수직인 방향으로 비출 때 지면 위에 생기는 반구의 그림자의 넓이를 S_1, 햇빛이 유리판과 평행한 방향으로 비출 때 지면 위에 생기는 반구의 그림자의 넓이를 S_2라 하자.

$S_1 : S_2 = 3 : 2$일 때, $\tan\theta$의 값은? (단, θ는 예각이다.)

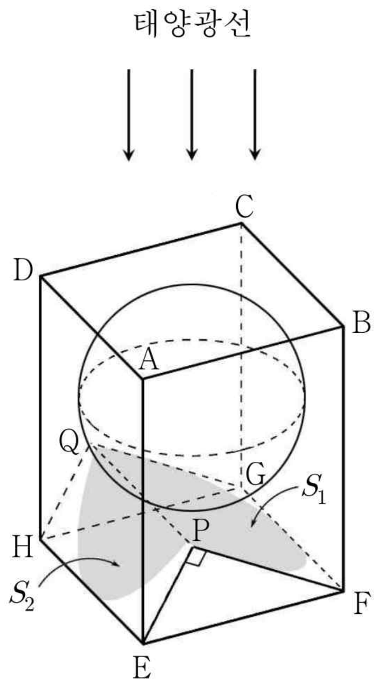


① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

[출처] 2015 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

40. 한 변의 길이가 8인 정사각형을 밑면으로 하고 높이가 $4+4\sqrt{3}$인 직육면체 ABCD−EFGH가 있다. 그림과 같이 이 직육면체의 바닥에 $\angle EPF = 90^\circ$인 삼각기둥 EFP−HGQ가 놓여있고 그 위에 구를 삼각기둥과 한 점에서 만나도록 올려놓았더니 이 구가 밑면 ABCD와 직육면체의 네 옆면에 모두 접하였다. 태양광선이 밑면과 수직인 방향으로 구를 비출 때, 삼각기둥의 두 옆면 PFGQ, EPQH에 생기는 구의 그림자의 넓이를 각각 S_1, S_2 $(S_1 > S_2)$라 하자. $S_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}S_2$의 값은?



① $\frac{20\sqrt{3}}{3}\pi$ ② $8\sqrt{3}\pi$ ③ $\frac{28\sqrt{3}}{3}\pi$

④ $\frac{32\sqrt{3}}{3}\pi$ ⑤ $12\sqrt{3}\pi$

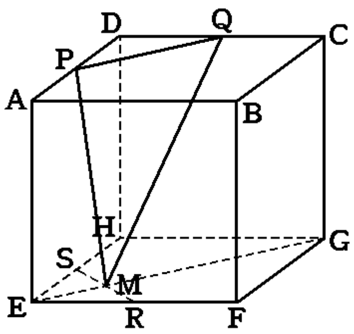
07 기하 09 공간도형

04 기타

02 교과외2 (삼각함수의 덧셈정리)

[출처] 2012 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

41. 그림과 같은 정육면체 ABCD−EFGH에서 네 모서리 AD, CD, EF, EH의 중점을 각각 P, Q, R, S라 하고, 두 선분 RS와 EG의 교점을 M이라 하자. 평면 PMQ와 평면 EFGH가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan^2\theta+\sec^2\theta$의 값을 구하여라.



07 기하 09 공간도형

04 기타

03 교과외3 (공간벡터)

[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 12

42. 좌표공간에서 점 $(0,\ a,\ b)$를 지나고 평면 $x+3y-z=0$에 수직인 직선이 구 $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=1$과 두 점 A, B에서 만난다. $\overline{\mathrm{AB}}=2$일 때, $a+b$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

07 기하　　10 공간좌표

01 공간좌표

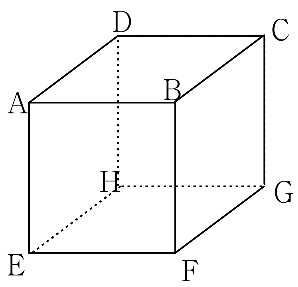
01 공간좌표1 (공간 위의 점의 좌표)

[출처]　2010 모의_공공 사관학교 고3 07월 19

43. 한 모서리의 길이가 1인 정육면체 ABCD−EFGH를 다음 두 조건을 만족시키도록 좌표공간에 놓는다.

(가) 꼭짓점 A는 원점에 놓이도록 한다. (나) 꼭짓점 G는 y축 위에 놓이도록 한다.

위의 조건을 만족시키는 상태에서 이 정육면체를 y축의 둘레로 회전시킬 때, 점 B가 그리는 도형은 점 $(0, a, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원이다. 이때, a, r의 곱 ar의 값은? (단, 점 G의 y좌표는 양수이다.)



① $\frac{1}{6}$　② $\frac{\sqrt{2}}{6}$　③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{\sqrt{2}}{3}$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

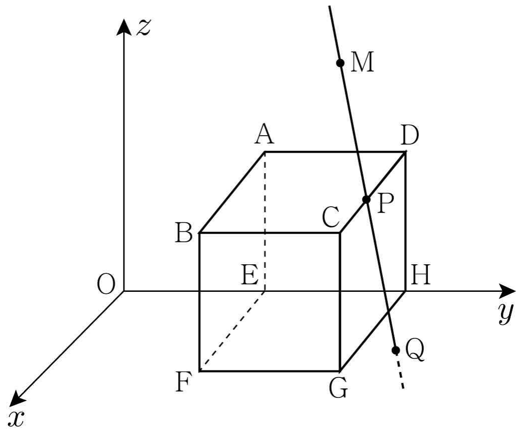
07 기하　　10 공간좌표

01 공간좌표

04 공간좌표4 (두 점 사이의 거리의 활용)

[출처]　2009 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 9

44. 그림과 같이 좌표공간에 있는 정육면체 ABCD−EFGH에서 $\mathrm{A}(0,3,3)$, $\mathrm{E}(0,3,0)$, $\mathrm{F}(3,3,0)$, $\mathrm{H}(0,6,0)$이다.



점 $\mathrm{M}(1,5,6)$과 정육면체의 모서리 위를 움직이는 점 P에 대하여 직선 MP가 xy평면과 만나는 점을 Q라 하자. 이때, 선분 MQ의 길이의 최댓값은?

① $2\sqrt{11}$　② $2\sqrt{13}$　③ $2\sqrt{14}$

④ $2\sqrt{15}$　⑤ $2\sqrt{17}$

[출처] 2010 모의_공공 사관학교 고3 07월 18

45. 좌표공간에 5개의 점 $A(0, 0, 4-t)$, $B(t, 0, 0)$, $C(0, t, 0)$, $D(-t, 0, 0)$, $E(0, -t, 0)$을 꼭짓점으로 하는 사각뿔 $A-BCDE$가 있다. $0<t<4$일 때, 이 사각뿔의 부피가 최대가 되도록 하는 실수 t의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2

④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 11월 20

46. 좌표공간에 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α에 대하여 각 점 A, B, C와 평면 α 사이의 거리 중에서 가장 작은 값을 $d(\alpha)$라 하자.

(가) 평면 α는 선분 AC와 만나고, 선분 BC와도 만난다.
(나) 평면 α는 선분 AB와 만나지 않는다.

위의 조건을 만족시키는 평면 α 중에서 $d(\alpha)$가 최대가 되는 평면을 β라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 평면 β는 세 점 A, B, C를 지나는 평면과 수직이다.
ㄴ. 평면 β는 선분 AC의 중점 또는 선분 BC의 중점을 지난다.
ㄷ. 세 점이 $A(2, 3, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(2, -1, 0)$일 때, $d(\beta)$는 점 B와 평면 β 사이의 거리와 같다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

07 기하 10 공간좌표

01 공간좌표

06 정사영

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 09월 19

47. 좌표공간에서 y 축을 포함하는 평면 α 에 대하여 xy 평면 위의 원 $C_1 : (x-10)^2+y^2=3$ 의 평면 α 위로의 정사영의 넓이와 yz 평면 위의 원 $C_2 : y^2+(z-10)^2=1$ 의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 S 로 같을 때, S 의 값은?

① $\frac{\sqrt{10}}{6}\pi$ ② $\frac{\sqrt{10}}{5}\pi$ ③ $\frac{7\sqrt{10}}{30}\pi$

④ $\frac{4\sqrt{10}}{15}\pi$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{10}\pi$

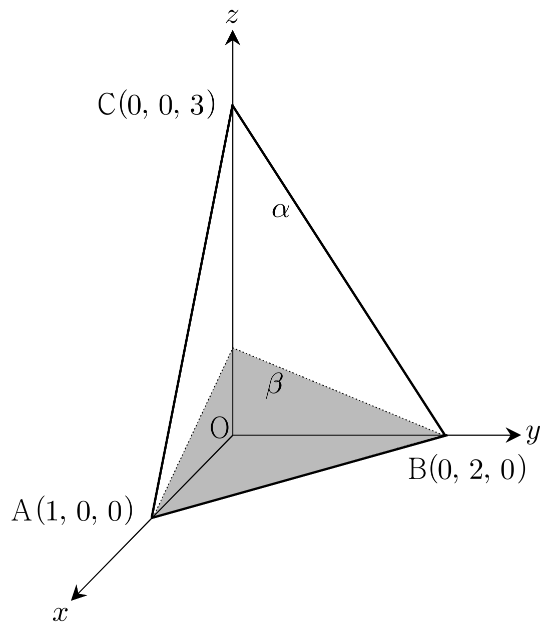
07 기하 10 공간좌표

02 분점

03 분점3 (각의 등분)

[출처] 2009 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

48. 좌표공간에서 세 점 $\mathrm{A}(1,0,0)$, $\mathrm{B}(0,2,0)$, $\mathrm{C}(0,0,3)$을 지나는 평면을 α라 하자. 그림과 같이 평면 α와 xy평면의 이면각 중에서 예각인 것을 이등분하면서 선분 AB를 포함하는 평면을 β라 할 때, 평면 β가 z축과 만나는 점의 z좌표는?



① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{8}{9}$

④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

07 기하

10 공간좌표

03 구의 방정식

06 구의 방정식6 (자취 및 활용)

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 23

49. 좌표공간에 반구 $(x-5)^2+(y-4)^2+z^2=9,\ z\geq 0$가 있다. y축을 포함하는 평면 α가 반구와 접할 때, α와 xy평면이 이루는 각을 θ라 하자. 이 때, $30\cos\theta$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 09월 17

50. 좌표공간에 구 $S:x^2+y^2+(z-1)^2=1$과 xy평면 위의 원 $C:x^2+y^2=4$가 있다. 구 S와 점 P에서 접하고 원 C위의 두 점 Q, R를 포함하는 평면이 xy평면과 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이다. 점 P의 z좌표가 1보다 클 때, 선분 QR의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$

④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

07 기하 10 공간좌표

03 구의 방정식

07 구의 방정식7 (Mm)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 기하 30

51. 좌표공간에서 점 $\mathrm{A}(0, 0, 1)$을 지나는 직선이 중심이 $\mathrm{C}(3, 4, 5)$이고 반지름의 길이가 1인 구와 한 점 P에서만 만난다. 세 점 A, C, P를 지나는 원의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 $\frac{q}{p}\sqrt{41}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

07 기하 10 공간좌표

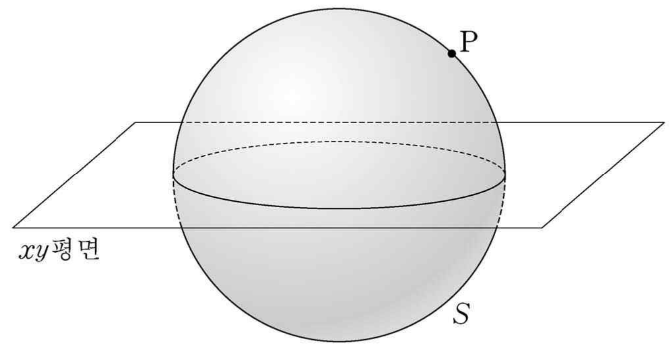
04 기타

03 교과외3 (삼각함수의 덧셈정리)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 11월 29

52. 좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+z^2=50$과 점 $\mathrm{P}(0, 5, 5)$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C에 대하여 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}\pi$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

(가) 원 C는 점 P를 지나는 평면과 구 S가 만나서 생긴다. (나) 원 C의 반지름의 길이는 1이다.



[준킬러][기하] 3공도좌(빠른 정답)

준킬러기하 2023.01.07

1. [정답] ③
2. [정답] ②
3. [정답] ④
4. [정답] **31**
5. [정답] ②

6. [정답] ③
7. [정답] ⑤
8. [정답] ②
9. [정답] **30**
10. [정답] ⑤

11. [정답] **16**
12. [정답] **25**
13. [정답] **40**
14. [정답] ⑤
15. [정답] **25**

16. [정답] 12
17. [정답] ②
18.[정답] 15
19. [정답] ④
20. [정답] **15**

21. [정답] ⑤
22. [정답] **32**
23. [정답] 40
24. [정답] ②
25. [정답] **47**

26. [정답] 60
27. [정답] **27**
28. [정답] **45**
29. [정답] **13**
30. [정답] **11**

31. [정답] ①
32. [정답] ④
33. [정답] ②
34. [정답] 450
35. [정답] ④
36. [정답] 8
37. [정답] **34**
38. [정답] ③
39. [정답] ⑤
40. [정답] ④

41. [정답] **17**
42. [정답] ⑤
43. [정답] ④
44. [정답] ⑤
45. [정답] ④

46. [정답] ⑤
47. [정답] ⑤
48. [정답] ①
49. [정답] **24**
50. [정답] ④

51. [정답] 9
52. [정답] 9

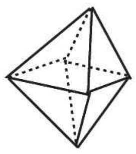
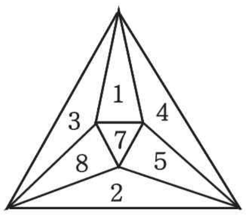
[준킬러][기하] 3공도좌(해설)

준킬러기하 2023.01.07

1) [정답] ③

[해설]

전개도를 접어 생긴 입체도형을 각 면의 번호를 알기 쉽도록 다시 나타내면 아래 그림과 같다.

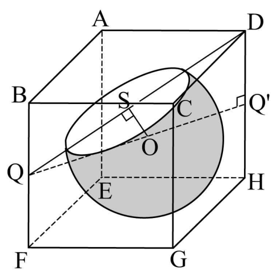
이 그림에서 보이지 않는 뒷면의 번호는 6이다.

따라서, 6의 면과 서로 이웃한 세 면은 2, 3, 4이다.

2) [정답] ②

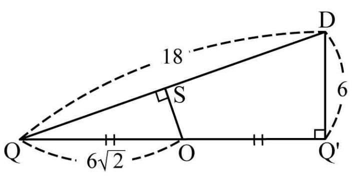
[해설]

내접구의 중심을 O, 변 DH 의 중점을 Q', 점 O 에서 선분 DQ 에 내린 수선의 발을 S 라 하자.



$\triangle DQQ' \backsim \triangle OQS$ 이고 $\overline{DQ'}=6$, $\overline{DQ}=18$, $\overline{OQ}=6\sqrt{2}$ 이므로

$\overline{OS}=6\sqrt{2}\times\dfrac{6}{18}=2\sqrt{2}$



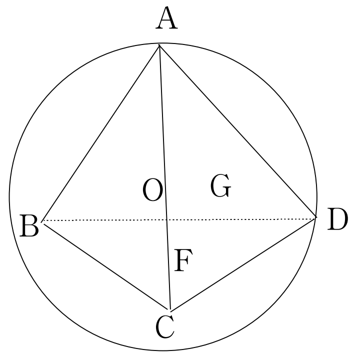
구의 반지름의 길이가 6 이므로 구를 평면 DPQR로 자른 단면의 반지름의 길이를 r 라 하면

$r^2=6^2-(2\sqrt{2})^2=28$

따라서 단면의 넓이는 28π 이다.

3) [정답] ④

[해설]



ㄱ. 직선 AF와 직선 BG는 점 O에서 만난다. (참)

ㄴ. 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{3}$ 이다.

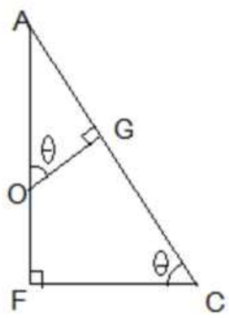
따라서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 $\sqrt{3}$ 보다 작다.

그런데, 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 정삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\sin 60^\circ=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ 이므로

정삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ 보다 작다. (참)

ㄷ. 다음 그림에서 삼각형 AFC와 삼각형 AGO는 닮음꼴이다.



그런데, ∠ACF는 정사면체의 이웃한 두 면이 이루는 각의 크기와 같고, ∠ACF=∠AOG이므로

$\cos\theta=\cos(\angle ACF)=\dfrac{1}{3}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄱ. 선분 CD의 중점을 M이라 하면 점 F는 선분 BM 위에 있고, 점 G는 선분 AM 위에 있다.

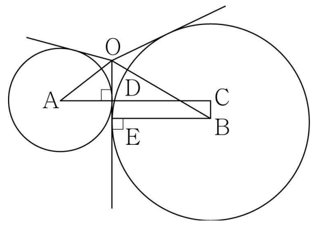
따라서 5개의 점 A, B, F, G, M은 모두 한 평면 위에 있다.

따라서 직선 AF와 직선 BG는 꼬인 위치에 있지 않다.

4) [정답] **31**

[해설]

그림과 같이 세 평면과 두 구의 평면 π 위로의 정사영을 생각하자. 아래 그림에서



$\angle OAD = \angle OBE = 30^\circ$ 이므로 $\overline{OD} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\overline{OE} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다.

따라서 $\overline{DE} = \overline{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 $\overline{AB} = \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$ 이다.

$d = \sqrt{1+\dfrac{28}{3}} = \sqrt{\dfrac{31}{3}}$ 이므로 $3d^2 = 31$ 이다.

5) [정답] ②

[해설]

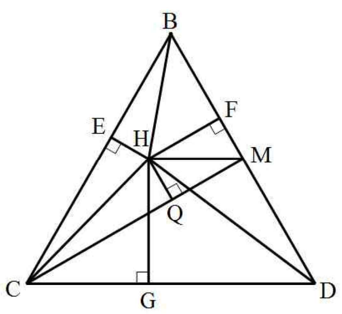
직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$

점 B에서 $\overline{AP}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 ABP에서 $\overline{BH} = \sqrt{3}$

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{CH} \perp \overline{AP}$ 이다. 따라서 직각삼각형 CBH에서 $\overline{BC} = 2$, $\overline{BH} = \sqrt{3}$ 이므로 $\overline{CH} = \sqrt{7}$

6) [정답] ③

[해설]



점 H에서 세 선분 BC, BD, CD에 내린 수선의 발을 각각 E, F, G라 하면 주어진 조건에 의하여

$\overline{HE} = k$, $\overline{HF} = 2k$, $\overline{HG} = 3k$

로 놓을 수 있다.

이때 정삼각형 BCD의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times 12 \times (k+2k+3k) = 36k$

이고, 한 변의 길이가 12인 정삼각형의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 12^2 = 36\sqrt{3}$ 이므로

$36k = 36\sqrt{3}$ 에서 $k = \sqrt{3}$

한편 점 M은 선분 BD의 중점이므로 점 M과 선분 CD사이의 거리는 $3\sqrt{3}$ 이고, $\overline{HG} = 3\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{HM} \mathbin{/\!/} \overline{CD}$ 이다.

따라서

$\triangle CHM = \triangle DHM$

이므로

$\dfrac{1}{2} \times \overline{HM} \times \overline{HG} = \dfrac{1}{2} \times \overline{DM} \times \overline{HF}$

$\overline{HM} \times 3\sqrt{3} = 6 \times 2\sqrt{3}$

$\overline{HM} = 4$

한편 $\overline{AH} \perp$ (평면 BCD), $\overline{AQ} \perp \overline{CM}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HQ} \perp \overline{CM}$

이때 사각형 HQMF는 직사각형이므로

$\overline{QM} = \overline{HF} = 2\sqrt{3}$

직각삼각형 HQM에서

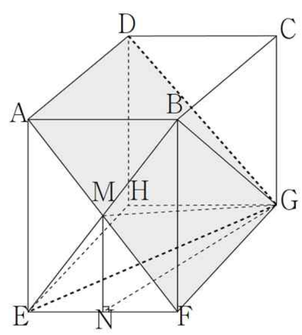
$\overline{HQ} = \sqrt{\overline{HM}^2 - \overline{QM}^2} = \sqrt{16-12} = 2$

따라서 직각삼각형 AQH에서

$\overline{AQ} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HQ}^2} = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

7) [정답] ⑤

[해설]



선분 AF와 선분 BE의 교점을 점 M이라 하면, 평면 AFGD와 평면 BEG의 교선은 직선GM이다. 점 M에서

평면 EFGH에 내린 수선의 발을 N이라 하자.

$\overline{\mathrm{GF}}=3$, $\overline{\mathrm{FN}}=1$, $\overline{\mathrm{MN}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{GN}}=\sqrt{10}$, $\overline{\mathrm{GM}}=\sqrt{14}$

$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{GN}}}{\overline{\mathrm{GM}}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ $\therefore$ $\cos^2\theta=\dfrac{5}{7}$

8) [정답] ②

[해설]

사각형 $ABCD$를 확장한 평면을 α라 하고, 점 E에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 O에서 사각형 $ABCD$에 내린 수선의 발을 H', 변 CD의 중점을 M이라 하자.

이때, $\overline{H'M}\perp\overline{CD}$, $\overline{EM}\perp\overline{CD}$이므로 각 $\angle H'ME$는 이면각의 정의를 만족시키므로 $\angle H'ME=\theta$이다.

여기서 이 7면체의 항 변의 길이를 $2a$라 두면

$\overline{EM}=\sqrt{3}\,a$, $\overline{EH}=\overline{OH'}=\sqrt{2}\,a$ 이므로

$\triangle EMH$에서 $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{3}\,a}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$\therefore$ $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

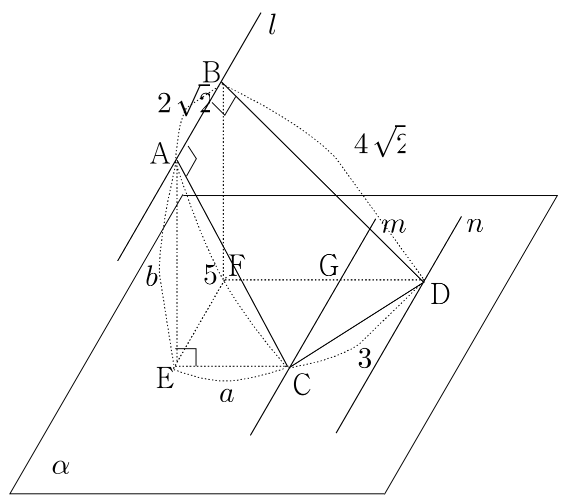
9) [정답] 30

[해설]

두 직선 m, n을 포함하는 평면을 α라 하자.

$l\,/\!/\,m$, $l\,/\!/\,n$이므로 $l\,/\!/\,\alpha$이다.

직선 l 위의 두 점 A, B에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하고, 선분 FD와 직선 m의 교점을 G라 하자.



$\overline{\mathrm{AB}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{EF}}$, $\overline{\mathrm{EF}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{CG}}$이고, $\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{CG}}=2\sqrt{2}$

이므로 직각삼각형 DGC에서

$\overline{\mathrm{GD}}=\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=1$

직각삼각형 ABD에서

$\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{10}$

삼각형 ACD에서

$\cos(\angle\mathrm{ACD})=\dfrac{5^2+3^2-(2\sqrt{10})^2}{2\cdot5\cdot3}=-\dfrac{1}{5}$

이므로 $\sin(\angle\mathrm{ACD})=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

따라서 삼각형 ACD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times5\times3\times\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=3\sqrt{6}$ 이다.

$\overline{\mathrm{EC}}=\mathrm{a}$, $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{BF}}=\mathrm{b}$라 하면 $\overline{\mathrm{FD}}=\mathrm{a}+1$이고,

삼각형 AEC에서 $a^2+b^2=25\cdots$㉠

삼각형 BFD에서 $(a+1)^2+b^2=32\cdots$㉡

㉡-㉠에서 $2a+1=7$, $a=3$

삼각형 ACD의 평면 α 위로의 정사영은 삼각형 ECD이고, 삼각형 ECD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{EC}}\times\overline{\mathrm{CG}}=\dfrac{1}{2}\times3\times2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

따라서, $3\sqrt{6}\times\cos\theta=3\sqrt{2}$ 에서 $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ $\tan^2\theta=\sec^2\theta-1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}-1=3-1=2$

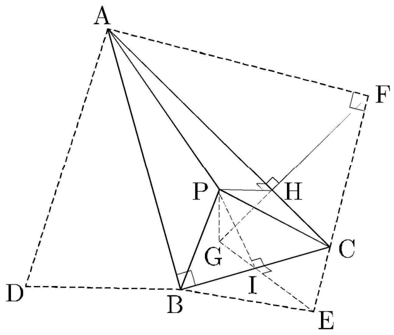
$\therefore$ $15\tan^2\theta=30$

10) [정답] ⑤

[해설]

주어진 전개도로 사면체를 만들 때, 전개도의 점 D, E, F는 일치한다. 사면체에서 이 세 점을 P라 하자.
사면체 PABC의 점 P에서 면 APC와 면 ABC의 교선 AC에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 G라 할 때,

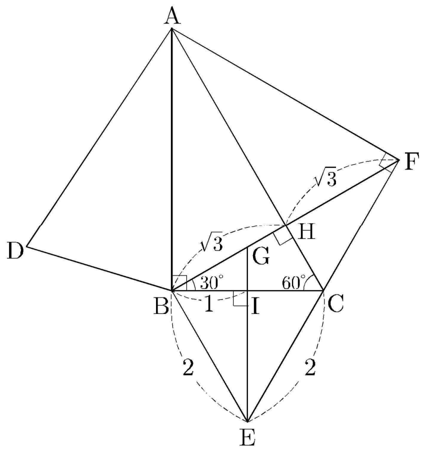
이면각의 정의에 의하여 $\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{HG}}}{\overline{\mathrm{PH}}}$이다.



삼각형 PAC와 삼각형 FAC가 합동이므로

$\overline{PH}\perp\overline{AC}$, $\overline{FH}\perp\overline{AC}$
따라서 삼수선의 정리에 의하여 점 G는 직선 FH 위에 존재한다. 점 P에서 면 PBC와 면 ABC의 교선 BC에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼각형 PBC와 삼각형 EBC가 합동이므로

$\overline{PH}\perp\overline{BC}$, $\overline{EH}\perp\overline{BC}$
따라서 삼수선의 정리에 의하여 점 G는 직선 EI 위에 존재한다.



$\overline{CF}=\overline{CE}=2$이므로 직각삼각형 ABC, AFC는 합동이다. 따라서 점 F와 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발은 일치한다. 따라서 직선 FH는 점 B를 지난다.

$\cos(\angle ACB)=\dfrac{1}{2}$이므로

$\angle ACB=60^\circ$,

$\angle CBH=30^\circ$

$\therefore\ \overline{FH}=\overline{BH}=2\sin60^\circ=\sqrt{3}$

$\overline{BG}\cos30^\circ=1$에서

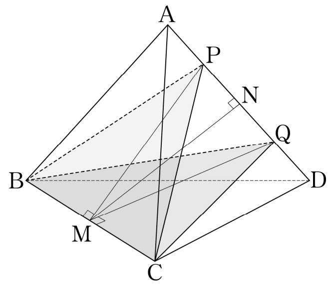
$\overline{BG}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\overline{HG}=\overline{BH}-\overline{BG}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\cos\theta=\dfrac{\overline{HG}}{\overline{PH}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$ ($\because$ $\overline{PH}=\overline{FH}$)

11) [정답] **16**

[해설]



두 선분 BC, AD의 중점을 각각 M, N이라 하면,
$\overline{AM}=\overline{DM}=2\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{MN}=2\sqrt{2}$

$\overline{PN}=\overline{QN}=1$ 이므로 $\overline{PM}=\overline{QM}=3$

$\theta=\angle PMQ$이고, $\overline{PQ}=2$이므로

$\cos\theta=\dfrac{3^2+3^2-2^2}{2\times3\times3}=\dfrac{7}{9}$,

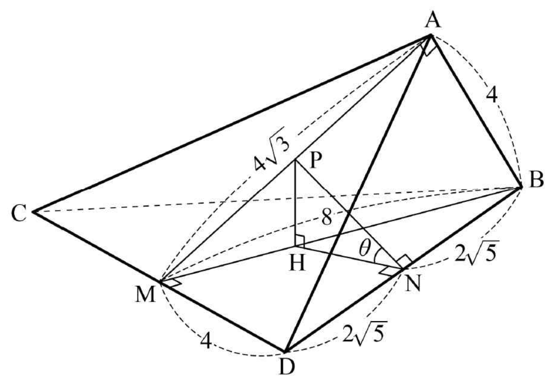
따라서 $p+q=16$

12) [정답] **25**

[해설]

$\angle BMD=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\overline{BM}=8$

$\angle BAM=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\overline{AM}=4\sqrt{3}$



점 P에서 직선 BM에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PM}\perp\overline{BM}$ …… ㉠

직선 AB와 평면 ACD가 서로 수직이므로

$\overline{AB}\perp\overline{CD}$

직선 CD는 두 직선 AB, BM과 서로 수직이므로

$\overline{CD}\perp$(평면 AMB)

직선 PH는 평면 AMB에 포함되므로 $\overline{PH}\perp\overline{CD}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\overline{PH}\perp$(평면 CDB)

$\overline{PH}\perp$(평면 CDB)이고 $\overline{PN}\perp\overline{BD}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HN}\perp\overline{BD}$

두 삼각형 DBM과 HBN은 서로 닮은 도형이므로

$\overline{BM}:\overline{MD}=\overline{BN}:\overline{NH}$에서 $\overline{NH}=\dfrac{\overline{MD}\times\overline{BN}}{\overline{BM}}=\sqrt{5}$

$\angle BNH=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\overline{BH}^2=\overline{BN}^2+\overline{NH}^2=25$

$$\overline{BH}=5,\ \overline{MH}=3$$

$\tan(\angle AMB)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\overline{PH}=\sqrt{3}$

$$\overline{PN}^2=\overline{PH}^2+\overline{HN}^2=8,\ \overline{PN}=2\sqrt{2}$$

두 평면 PDB, CDB의 교선은 직선 DB이고, 평면 PDB 위의 점 P의 평면 CDB위로의 정사영이 H이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{HN}}{\overline{PN}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

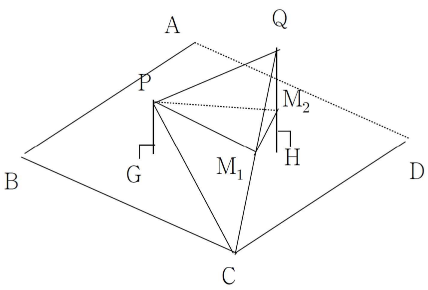
따라서 $40\cos^2\theta=25$

13) [정답] 40

[해설]

$\overline{PG}=\sqrt{3}$, $\overline{QH}=2\sqrt{3}$이므로 점 P를 지나고 평면 ABCD와 평행한 평면이 두 선분 QC, QH와 만나는 점을 각각 M_1, M_2라 하면 두 점은 중점이다.

이때, 구하는 평면이 이루는 각은 두 평면 PM_1M_2, PM_1Q가 이루는 각이다.



한편 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 P′, 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 O_1이라 하면

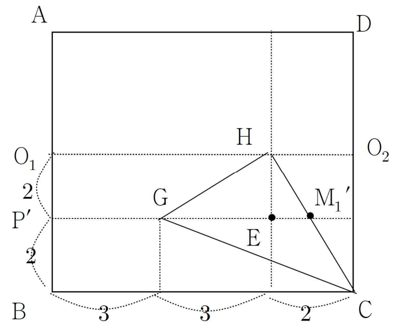
$$\overline{O_1P'}=4\cos60°=2$$

$$\overline{P'G}=\sqrt{\overline{PP'}^2-\overline{PG}^2}$$
$$=\sqrt{(4\sin60°)^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=3$$

또, 점 Q에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 Q′, 선분 CD를 지름으로 하는 원의 중심을 O_2라 하면

$$\overline{HO_2}=\sqrt{\overline{QO_2}^2-\overline{QH}^2}$$
$$=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}$$
$$=2$$

이때, 점 M_1의 평면 ABCD 위로 정사영 시킨 점을 $M_1{}'$이라 하면, $M_1{}'$은 선분 CH의 중점이므로 그림과 같다.



이때,

$$\overline{GH}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

$$\overline{HM_1{}'}=\frac{1}{2}\overline{HC}=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{5}$$

또, 선분 $GM_1{}'$과 점 H를 지나고 선분 BC에 수직인 직선이 만나는 점을 E라 하면

$$\overline{GM_1{}'}=\overline{GE}+\overline{EM_1{}'}=3+1=4$$

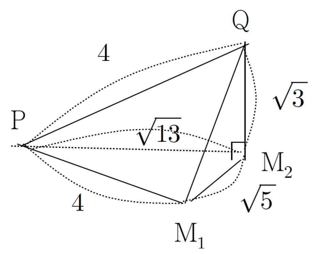
이때,

$$\overline{PM_2}=\overline{GH}=\sqrt{13},\ \overline{M_1M_2}=\overline{HM_1{}'}=\sqrt{5},$$
$$\overline{PM_1}=\overline{GM_1{}'}=4$$

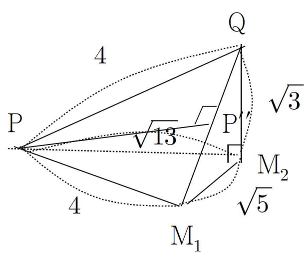
이고

$$\overline{PQ}=\sqrt{(\sqrt{13})^2+(\sqrt{3})^2}=4,$$
$$\overline{QM_1}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{2}$$

이므로 다음 그림과 같다.



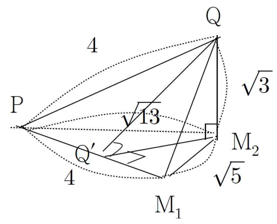
점 P에서 선분 QM_1에 내린 수선의 발을 P″이라 하자.



이때, $\angle PM_1Q=\alpha$라 하면

$$\cos\alpha=\frac{\overline{M_1P''}}{\overline{PM_1}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{M_1Q}}{\overline{PM_1}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

또, 점 Q에서 선분 PM_1에 내린 수선의 발을 Q′이라 하면 $\overline{QQ'}\perp\overline{PM_1}$이고 $\overline{QM_2}\perp$(평면 PM_1M_2)이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{M_2Q'}\perp\overline{PM_1}$



이때, $\overline{M_1Q'}=\overline{QM_1}\cos\alpha=2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{4}=1$이므로

$$\overline{QQ'}=\sqrt{\overline{QM_1}^2-\overline{Q'M_1}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{7}$$

$$\overline{M_2Q'}=\sqrt{\overline{M_2M_1}^2-\overline{Q'M_1}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$$

따라서 $\cos\theta=\dfrac{\overline{Q'M_2}}{\overline{QQ'}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$이므로

$$70\times\cos^2\theta=70\times\frac{4}{7}=40$$

14) [정답] ⑤

[해설]

$\overline{AM}=\sqrt{7}$이고, 점 M에서 BC에 내린 수선의 발을 H, 점 A에서 $\overline{BM}$에 내린 수선의 발을 X라 하면 직선 AX와 $\overline{BH}$의 교점이 생긴다. 이때 이 점을 Y라 하자.

$\triangle AXM$과 $\triangle MXY$, $\triangle BXA$가 닮음이므로

$$\overline{MY}=\frac{7}{3}$$

$\overline{AX}=\overline{XP}$이므로 $\cos\theta=\dfrac{\overline{XY}}{\overline{XP}}=\dfrac{\overline{XY}}{\overline{AX}}$

$\triangle ABX$와 $\triangle YMX$이므로

$$\frac{\overline{XY}}{\overline{XA}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{AB}}=\frac{7}{9}$$

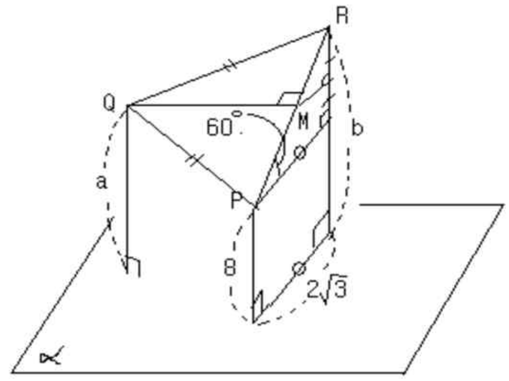
$$\therefore\ \cos\theta=\frac{7}{9}$$

15) [정답] 25

[해설]

세 원기둥의 밑면의 반지름의 길이가 모두 같으므로 삼각형 QRP가 이등변삼각형이려면 세 원기둥의 높이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루어야 하고,

이때$\overline{QP}=\overline{QR}$이다.



또 선분 PR의 중점을 M이라 하면 점 Q를 지나고 평면 α와 평행한 평면 β와 평면 QPR의 교선은 선분 QM이다.

이때$\overline{QM}\perp\overline{PR}$이므로 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 선분 PR와 평면 α가 이루는 각의 크기와 같다.

그런데 선분 PR의 평면 α 위로의 정사영의 길이는 두 원기둥의 반지름의 길이의 합과 같으므로

$\overline{PR}\times\cos60^\circ=2\sqrt{3}$ $\quad\therefore\overline{PR}=4\sqrt{3}$

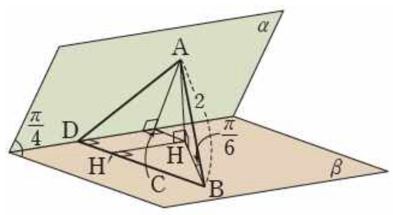
따라서 위의 그림에서 점 P와 점 R의 평면 α로부터의 거리의 차는 $\overline{PR}\sin60^\circ=6$

따라서 세 원기둥의 높이는 각각 8, 8+3, 8+6이다.

$\therefore\ a=11,\ b=14 \qquad \therefore\ a+b=25$

16) [정답] 12

[해설]



위의 그림과 같이 점 A에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\overline{AB}=2$이고 $\angle ABH=\dfrac{\pi}{6}$이므로 직각삼각형 ABH에서

$\overline{AH}=2\sin\dfrac{\pi}{6}=1$, $\overline{BH}=2\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

한편 $\overline{AH}\perp\beta$, $\overline{AC}\perp l$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HC}\perp l$

두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{4}$이므로

$\angle ACH=\dfrac{\pi}{4}$

직각삼각형 ACH에서

$\overline{CH}=\overline{AH}=1$, $\overline{AC}=\sqrt{2}$

또 $\overline{AD}=\sqrt{3}$ 이므로 직각삼각형 ADC에서

$\overline{CD}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=1$

이때 점 H에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 H′이라고 하면

$\overline{HH'}=\overline{CD}=1$, $\overline{H'D}=\overline{CH}=1$

이므로 직각삼각형 HH′B에서

$\overline{BH'}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$

따라서 사면체 ABCD의 부피는

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{BD}\right)\times\overline{AH}$

$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}\times1\times(\sqrt{2}+1)\right\}\times1$

$=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}$

이므로 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{6}$

$\therefore 36(a+b)=36\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=12$

17) [정답] ②

[해설]

$\overline{AB}$의 중점을 M, 점 O에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, β에 내린 수선의 발을 $\overline{H'}$라 두면

$\overline{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\because \overline{OA}=\overline{OB}=\overline{AB}=1$인 정삼각형)

$\overline{OH}=a$라 하면

$\overline{OH}=\overline{OH'}=\overline{HM}=a$이므로 직각삼각형 $\triangle$OHM은 직각이등변삼각형이 된다.

$\therefore \overline{OH} : \overline{HM} : \overline{OM} = 1:1:\sqrt{2}$ 이므로 $\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore a=\frac{\sqrt{6}}{4}$

18)[정답] 15

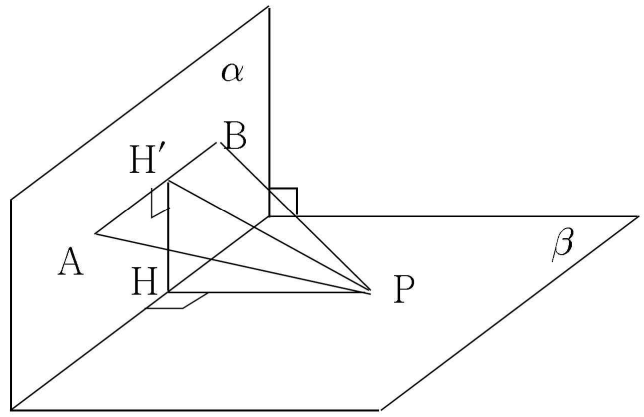
[해설]

그림과 같이 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$\overline{PH}\perp\alpha$, $\overline{HH'}\perp$(직선 AB)

그러므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{PH'}\perp$(직선 AB)



한편, 점 A와 평면 β 사이의 거리가 2이고 직선 AB가 평면 β와 평행하므로

$\overline{HH'}=2$

또, 점 P와 평면 α 사이의 거리가 4이므로

$\overline{PH}=4$

그러므로 직각삼각형 PHH′에서

$\overline{PH'}=\sqrt{\overline{PH}^2+\overline{HH'}^2}$

$=\sqrt{4^2+2^2}$

$=2\sqrt{5}$

따라서 삼각형 PAB의 넓이를 S라 하면

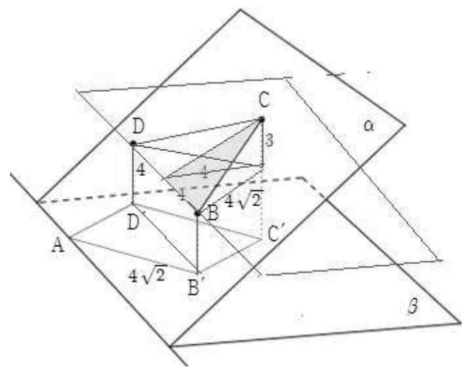
$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH'}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times2\sqrt{5}$

$=15$

19) [정답] ④

[해설]

아래 그림과 같이 평면 β를 평행이동하여 $\overline{BD}$를 지나도록 하면



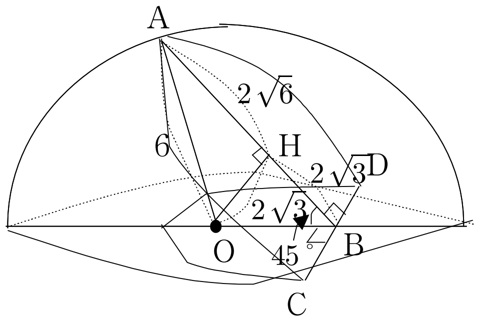
삼각형 BCD의 정사영은 변의 길이가 $4\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, 8인 직각이등변삼각형이다.

이등변삼각형의 성질과 삼수선의 정리에서

$\overline{BC}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$

20) [정답] 15

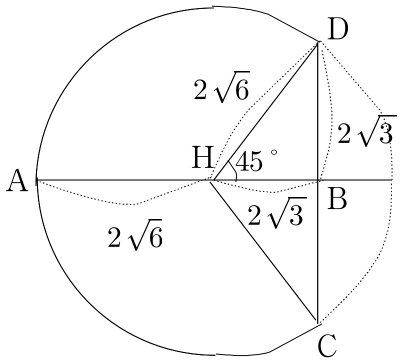
[해설]



위의 그림에서

$\overline{AH}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$, $\overline{BH}=2\sqrt{3}$ 이고

평면 α와 45°의 각을 이루는 평면으로 반구를 자른 단면은 다음 그림과 같다.



즉, $\overline{BD}=\sqrt{(2\sqrt{6})^2-(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$ 이므로

$\angle DHB=45^\circ$

따라서, 단면의 넓이는

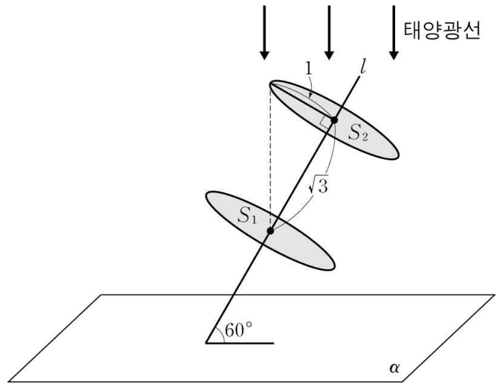
$(2\sqrt{6})^2\pi\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{6}=18\pi+12$

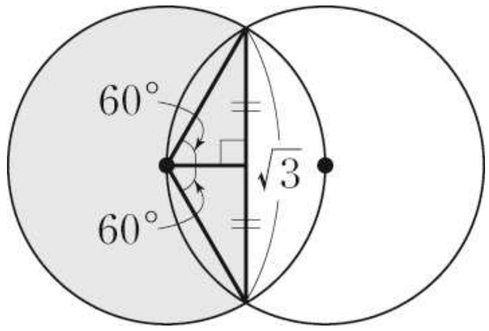
따라서, 이 단면을 평면 α 위로의 정사영한 넓이가 $\sqrt{2}(a+b\pi)$ 이므로

$$\sqrt{2}(a+b\pi)=(18\pi+12)\cos45^\circ=(18\pi+12)\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\sqrt{2}(9\pi+6)\ \therefore a+b=15$$

21) [정답] ⑤

[해설]





[그림 1]과 같이 두 원판을 각각 S_1, S_2라 하자.

S_1와 S_2의 반지름의 길이는 모두 1이고, 중심 사이의 거리가 $\sqrt{3}$이므로 S_2를 평행이동시켜 S_1과 같은 평면 위에 그리면 [그림 2]와 같다.

이때, S_2가 S_1의 중심을 지나므로 [그림 2]의 도형의 넓이를 S라 하면 S는 [그림 2]의 어두운 부분의 넓이의 2배와 같다.

$$\therefore\ S=2\times\left(1^2\times\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

두 원판에 의해 평면 α에 생기는 그림자는 [그림 2]의 도형을 평면 α 위에 정사영시킨 도형과 같으므로

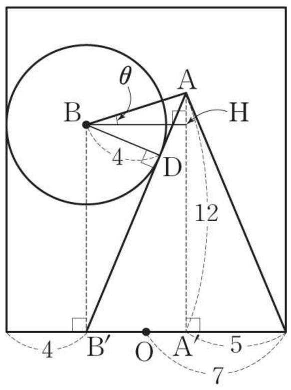
(그림자의 넓이)$=S\cos30°$

$$=\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{4}$$

22) [정답] **32**

[해설]

네 점 A, A′, B, B′을 지나는 평면으로 자른 단면은 다음과 같다.



그림에서 $\overline{OB'}=3$, $\overline{OA'}=2$이므로 $\overline{A'B'}=5$

$\overline{AB'}=\sqrt{12^2+5^2}=13$

점 B에서 $\overline{AA'}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 AB와 평면 α가 이루는 예각의 크기는 선분 AB와 선분 BH가 이루는 각의 크기와 같다.

$\therefore\ \angle ABH=\theta$

또, 구와 원뿔의 접점을 D라 하자. 두 삼각형 B′BD와 AB′A′에서 $\angle BB'D=\beta$라 하면 $\angle B'AA'=\beta$(엇각)이므로 $\triangle B'BD \backsim \triangle AB'A'$이다.

따라서 $\overline{BD} : \overline{B'A'}=\overline{B'B} : \overline{AB'}$이므로

$4:5=\overline{B'B}:13$ $\therefore$ $\overline{B'B}=\dfrac{52}{5}$

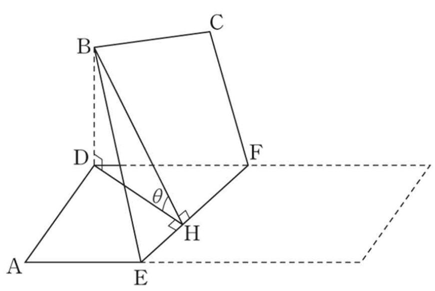
$\overline{AH}=12-\dfrac{52}{5}=\dfrac{8}{5}$, $\quad \overline{BH}=\overline{B'A'}=5$

$\therefore\ \tan\theta=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\dfrac{\frac{8}{5}}{5}=\dfrac{8}{25}=p$

$\therefore\ 100p=100\times\dfrac{8}{25}=32$

23) [정답] 40

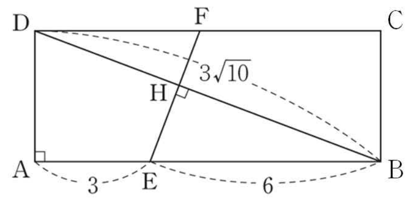
[해설]



점 B에서 평면 AEFD로의 정사영이 점 D이므로 선분 BD와 평면 AEFD는 서로 수직이다.

점 D에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의하여 선분 BH도 선분 EF에 수직이다.

$\angle BHD=\theta$라 하면 구하는 $\cos\theta=\dfrac{\overline{DH}}{\overline{BH}}$이다.



두 삼각형 BHE, BAD는 닮음이므로

$\overline{BH}:\overline{BE}=\overline{BA}:\overline{BD}$

$\overline{BE}=6$, $\overline{BA}=9$, $\overline{BD}=\sqrt{9^2+3^2}=3\sqrt{10}$이므로

$\overline{BH}:6=9:3\sqrt{10}$

$3\sqrt{10}\times\overline{BH}=54$, $\overline{BH}=\dfrac{9\sqrt{10}}{5}$

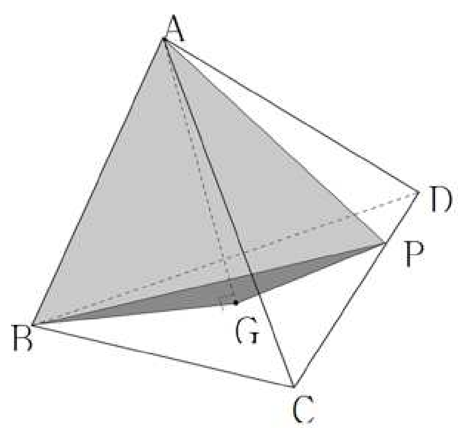
그러므로 $\quad \overline{DH}=3\sqrt{10}-\dfrac{9\sqrt{10}}{5}=\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\overline{DH}}{\overline{BH}}=\dfrac{\frac{6\sqrt{10}}{5}}{\frac{9\sqrt{10}}{5}}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore 60\cos\theta=40$

24) [정답] ②

[해설]



정사면체 ABCD의 모서리의 길이를 $4a$라 하면,
코사인법칙에 의하여

$\overline{AP}=\overline{BP}=\sqrt{(4a)^2+a^2-4a^2}=\sqrt{13}\,a$

삼각형 ABP의 넓이는 $6a^2$ 이다.

점 A에서 삼각형 BCD에 내린 수선의 발을 G라 하면, 점 G는 삼각형 BCD의 무게중심이다.

삼각형 BGP의 넓이는 삼각형 BCD의 넓이의 $\frac{1}{6}$이므로

삼각형 BGP의 넓이는 $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^2$

$6a^2\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^2 \therefore \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{9}$

25) [정답] **47**

[해설]

점 P가 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$\triangle ABP = \frac{1}{3}\times\triangle ABC = \frac{1}{3}\times 27 = 9$

점 Q가 선분 AP를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\triangle ABQ = \frac{2}{3}\times\triangle ABP = \frac{2}{3}\times 9 = 6$

점 Q가 선분 BH의 중점이므로

$\triangle ABH = 2\times\triangle ABQ = 2\times 6 = 12$

삼각형 ABD의 평면 α로의 정사영이 삼각형 ABH이므로

$\triangle ABD\times\cos\theta = \triangle ABH$에서 $\cos\theta = \frac{12}{35}$

따라서 $p+q=47$

26) [정답] 60

[해설]

구 S의 중심을 O라 하면 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 APQ의 무게중심은 점 O와 같다. 점 P에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 O′라 하면 점 O′는 선분 AQ의 중점이고

$\angle ABQ = \frac{\pi}{2}$이므로 점 B는 점 O′를 중심으로 하고

반지름이 선분 AO′인 원 위의 점이다.

삼각형 BO′O에서

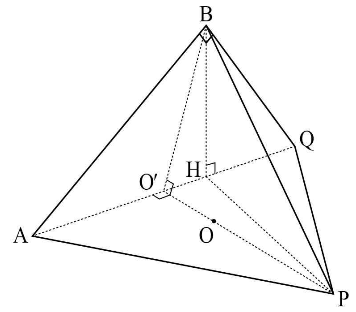
$\overline{O'B} = \sqrt{3}$, $\overline{OB} = 2$, $\overline{OO'} = 1$이므로

$\angle BO'O = \frac{\pi}{2}$

그러므로 $\overline{OO'}\perp\overline{O'B}$, $\overline{PO'}\perp\overline{O'B}$

$\overline{AO'}\perp\overline{PO'}$, $\overline{PO'}\perp\overline{O'B}$이므로 직선 PO′는 평면 ABQ와 수직이고, 평면 ABQ와 평면 APQ는 수직이다.

그러므로 점 B에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 APB의 평면 APQ 위로의 정사영은 삼각형 APH이다.



삼각형 BO′P는 직각삼각형이고 $\overline{O'B} = \sqrt{3}$, $\overline{O'P} = 3$이므로 $\overline{PB} = 2\sqrt{3}$

삼각형 APB는 $\overline{PA} = \overline{PB} = 2\sqrt{3}$인 이등변삼각형이고, $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$이므로 삼각형 APB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{10} = 2\sqrt{5}$

삼각형 ABQ와 삼각형 AHB는 닮음이므로

$\overline{AH} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

그러므로 삼각형 APH의 넓이는

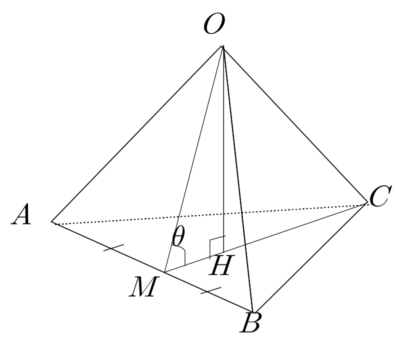
$\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times 3 = 2\sqrt{3}$

$\cos\theta = \frac{(\text{삼각형 APH의 넓이})}{(\text{삼각형 APB의 넓이})} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

따라서 $100\cos^2\theta = 100\times\frac{3}{5} = 60$

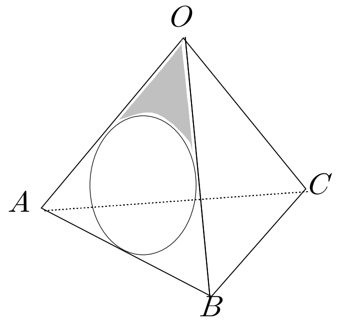
27) [정답] **27**

[해설]



두 평면 OAB, ABC가 이루는 각을 θ라 하면

$\cos\theta = \frac{\overline{MH}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{MH}}{\overline{CM}} = \frac{1}{3}$



위의 그림과 같이 $\triangle OAB$에서 어두운 부분을 평면ABC 위로 정사영시키고, $\triangle OBC$,$\triangle OCA$에서도 같은 방법으로 정사영시키면 이들은 서로 겹치지 않고 S_1, S_2, S_3로 둘러싸인 부분과 일치한다.

$\triangle OAB$에서 내접원의 반지름의 길이를 r라고 하면

$$\frac{1}{2}r(6+6+6)=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2 \qquad \therefore\ r=\sqrt{3}$$

따라서, 어두운 부분의 넓이는

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2-3\pi\right)=3\sqrt{3}-\pi$$

이므로 구하는 넓이S는

$$S=(3\sqrt{3}-\pi)\times\cos\theta\times 3=(3\sqrt{3}-\pi)\times\frac{1}{3}\times 3=3\sqrt{3}-\pi$$

$$\therefore\ (S+\pi)^2=(3\sqrt{3})^2=27$$

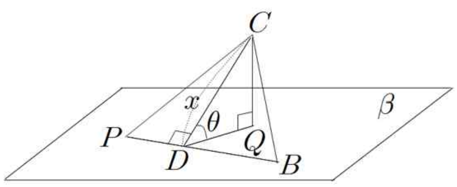
28) [정답] **45**

[해설]

점 P가 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점이고, 점 C에서 평면 α에 이르는 거리가 3이므로 점 P에서 평면 α에 이르는 거리는 1이다.

따라서, 직선 PB는 평면 α와 평행하다.

삼각형 ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라고 하자. 평면 α에 평행하고 직선 PB를 포함하는 평면을 β라고 하면 삼각형 PBC와 평면 β가 이루는 각의 크기도 θ이다.



점 C에서 직선 PB에 내린 수선의 발을 D라 하고, 점 C에서 평면 β에 내린 수선의 발을 Q라 하자.

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{DQ}\perp\overline{PB}$이므로

$\angle CDQ=\theta$이다. $\overline{CQ}=3-1=2$이므로

$\overline{CD}=x$라 하면 $\sin\theta=\frac{2}{x}$이다.

삼각형 ABC의 넓이가 9이므로

삼각형 PBC의 넓이는 $9\times\frac{2}{3}=6$

따라서, $\frac{1}{2}\times\overline{PB}\times x=6$에서 $\frac{1}{2}\times 4\times x=6,\ x=3$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{2}{3}$$

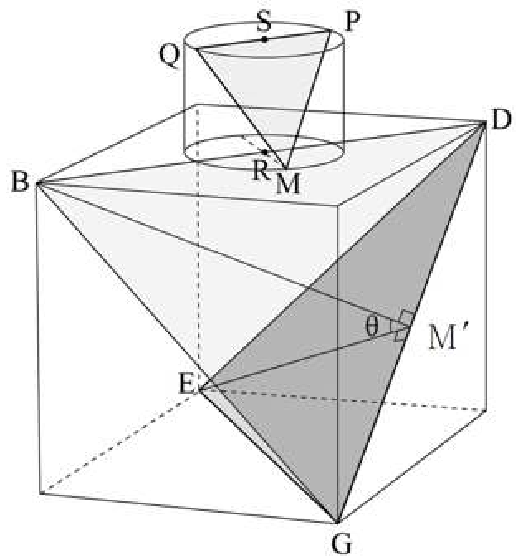
$$\therefore\ \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

따라서, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이 S는

$$S=9\cos\theta=9\times\frac{\sqrt{5}}{3}=3\sqrt{5} \qquad \therefore\ S^2=45$$

29) [정답] **13**

[해설]



원기둥의 밑면 α, β의 중심을 각각 R, S라 하자.

$\overline{\mathrm{PQ}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{DB}}$이고, $\overline{\mathrm{SM}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{RG}}$이므로 평면 MPQ와 평면 GDB는 평행하다.

삼각형 GDB와 삼각형 DEG는 모두 정삼각형이고 두 삼각형이 만나서 생기는 선분은 $\overline{\mathrm{DG}}$이다.

선분 DG의 중점을 M′이라 하고 $\theta=\angle\mathrm{BM'E}$라 하면

$\overline{\mathrm{BM'}}=\overline{\mathrm{EM'}}=2\sqrt{6}$, $\overline{\mathrm{BE}}=4\sqrt{2}$이므로

삼각형 BM′E에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\cos(\angle\mathrm{BM'E})=\frac{24+24-32}{2\cdot 2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}}=\frac{1}{3}$$

삼각형 MPQ의 넓이 S는 $S=\dfrac{2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{2}=2\sqrt{3}$이므로

삼각형 MPQ의 평면 DEG 위로의 정사영의 넓이는

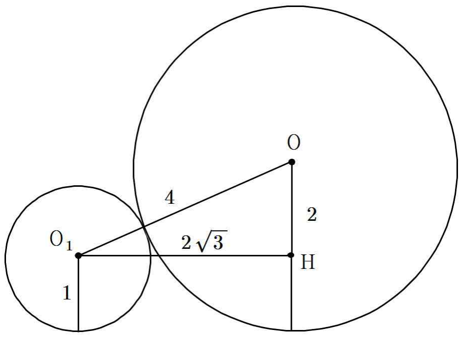
$S\cos\theta=2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ $\therefore a=3,\ b=2$

따라서 $a^2+b^2=13$

30) [정답] 11

[해설]

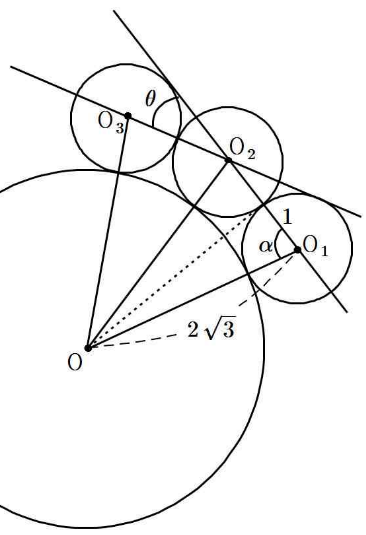
평면과 평면이 이루는 각을 단면화 시켜서 관찰하기 위하여 우선 도형을 옆에서 관찰하면 다음과 같다.



S의 중심을 O라 하면

$\overline{OO_1}=4,\ \overline{OH}=2$ 이고 $\therefore\ \overline{O_1H}=2\sqrt{3}$

위에서 이 도형의 이면각 θ를 표현하기 위해 단면화 시키면 다음과 같다.



이때, $\angle OO_1O_2$를 α라 하면 $\angle O_1OO_2=\pi-2\alpha$

두 평면이 이루는 각도 $\pi-2\alpha=\theta$이고

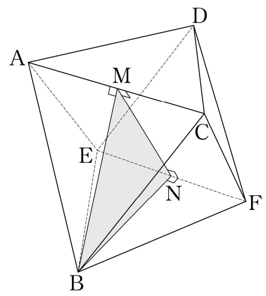
$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, $\cos\theta=1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

도형 D의 단면의 넓이는 π이므로

따라서 정사영의 넓이는 $\pi\times\dfrac{5}{6}$이다 $\therefore\ p+q=11$

31) [정답] ①

[해설]



선분 AC와 EF의 중점을 각각 M, N이라 하면

사각형 AEFC가 정사각형이므로 $\overline{MN}=2$

$\overline{BM}=\overline{BN}=\sqrt{3}$

$\cos(\angle MBN)=\dfrac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-2^2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$

이므로

$S_1=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\right)\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

두 평면 BEF와 CBF가 이루는 각의 크기는 두 평면 ACD와 ABC가 이루는 각의 크기와 같다.

평면 BEF와 평면 ACD가 평행하므로

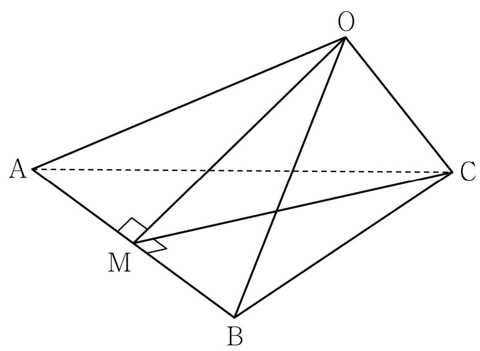
$S_2=S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ S_1+S_2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

32) [정답] ④

[해설]

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하자.



$\overline{OC}\perp$(평면 OAB), $\overline{CM}\perp\overline{AB}$이므로

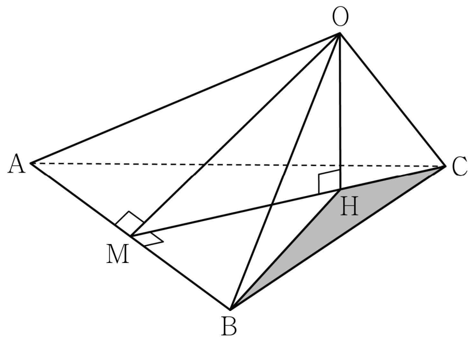
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ 이고

$\overline{OA} = \overline{OB}$ 이다.

$\overline{MC} = 3\sqrt{3}$, $\overline{OM} = 3\sqrt{2}$

점 O에서 선분 MC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{OH} \perp$(평면 ABC)이므로 점 O의 평면 ABC 위로의 정사영은 점 H이다.



$\frac{1}{2} \times \overline{OM} \times \overline{OC} = \frac{1}{2} \times \overline{MC} \times \overline{OH}$ 이므로

$\overline{OH} = \sqrt{6}$, $\overline{HC} = \sqrt{3}$, $\overline{MH} = 2\sqrt{3}$

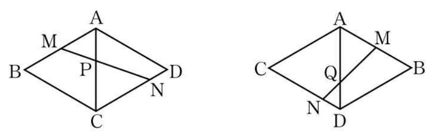
삼각형 OBC의 평면 ABC 위로의 정사영은 삼각형 HBC이고 점 H는 선분 CM을 $1:2$로 내분한다.

$(\triangle \mathrm{HBC}$의 넓이$) = \frac{1}{6} \times (\triangle \mathrm{ABC}$의 넓이$)$

따라서 정사영의 넓이는 $\frac{1}{6} \times 9\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

33) [정답] ②

[해설]



[그림1] [그림2]

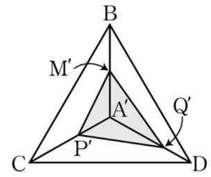
[그림1]과 같이 네 점 A, B, C, D가 한 평면에 있도록 전개하면 조건을 만족하는 점 P는 선분 AC와 선분 MN이 만나는 점이다.

사각형 ABCD는 평행사변형이므로 $\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$이다.

따라서 삼각형 AMP와 삼각형 CNP는 닮음이고 $\overline{AM} = \frac{1}{2}$,

$\overline{CN} = \frac{3}{4}$이므로 점 P는 선분 AC를 $2:3$으로 내분하는 점이다.

같은 방법으로 [그림2]에서 점 Q는 선분 AD를 $2:1$로 내분하는 점임을 알 수 있다.



네 점 A, M, P, Q의 평면 BCD위로의 정사영을 각각 A′, M′, P′, Q′이라 하면 점 M′은 선분 A′B의 중점이고, 점 P′은 선분 A′C를 $2:3$으로 내분하는 점이고, 점 Q′은 선분 A′D를 $2:1$로 내분하는 점이다.

이때 점 A′은 정삼각형 BCD의 무게중심이므로

$$\begin{aligned}\overline{A'B} &= \overline{A'C} = \overline{A'D} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \overline{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

이고, $\overline{A'M'} = \frac{1}{2}\overline{A'B} = \frac{\sqrt{3}}{6}$,

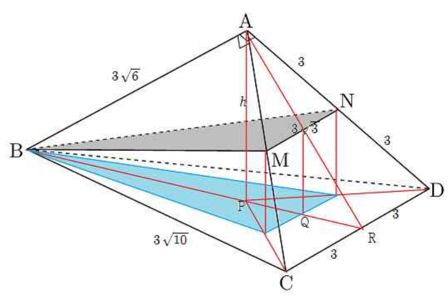
$$\overline{A'P'} = \frac{2}{5}\overline{A'C} = \frac{2\sqrt{3}}{15},\ \overline{A'Q'} = \frac{2}{3}\overline{A'D} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

삼각형 M′P′Q′의 넓이 S는 세 삼각형 A′M′P′, A′P′Q′, A′Q′M′의 넓이의 합이므로

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \times \sin\frac{2}{3}\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{2\sqrt{3}}{15}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{2\sqrt{3}}{15} \times \frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{15}\end{aligned}$$

34) [정답] 450

[해설]



그림에서

$\overline{BR} = 9$, $\overline{BP} = a$, $\overline{PR} = 9 - a$

$h^2 = (3\sqrt{6})^2 - a^2$

$= (3\sqrt{3})^2 - (9 - a)^2$

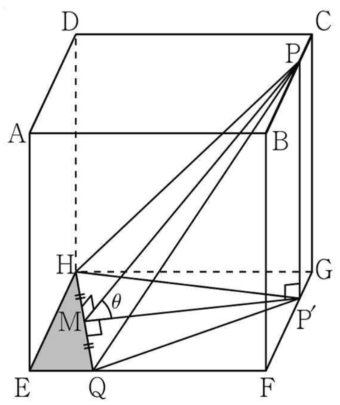
따라서 $a=6$, $\overline{PR}=3$

$$S=\frac{1}{2}\times 3\times\left(6+\frac{3}{2}\right)=\frac{45}{4}$$

$\therefore 40S=450$

35) [정답] ④

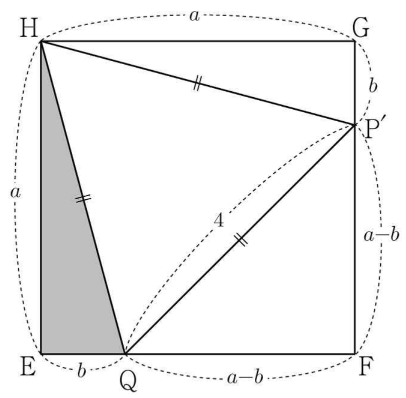
[해설]



점 P에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 P′, 점 P′에서 선분 HQ에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{PP'}\perp$(평면 EFGH)이고 $\overline{P'M}\perp\overline{HQ}$이므로 $\overline{PM}\perp\overline{HQ}$

$\overline{PP'}=\sqrt{15}$, $\overline{P'M}=2\sqrt{3}$이므로 $\overline{PM}=3\sqrt{3}$

$\angle PMP'=\theta$라 하면 $\cos\theta=\dfrac{2}{3}$



$\overline{EH}=a$, $\overline{EQ}=b$라 하자.

$\overline{GP'}=b$, $\overline{FP'}=\overline{FQ}=a-b$

$\overline{HQ}=\overline{QP'}=4$이므로 $a-b=2\sqrt{2}$, $a^2+b^2=16$에서 $ab=4$

평면 EQH와 평면 PHQ가 이루는 예각의 크기가 θ이므로 삼각형 EQH의 넓이를 S, 삼각형 EQH의 평면 PHQ위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면 $S'=S\cos\theta$이다.

따라서 $S'=\dfrac{1}{2}ab\cos\theta=\dfrac{1}{2}\times 4\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$

36) [정답] 8

[해설]

두 점 M, N은 각각 두 변 BC, CD의 중점이므로

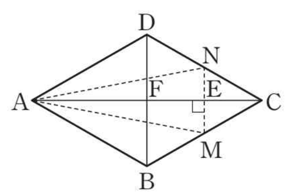
$\overline{MN}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\times 4=2$

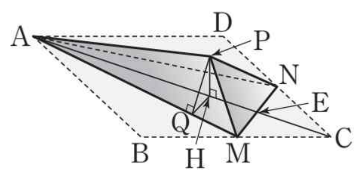
두 삼각형 ABD, BCD는 모두 정삼각형이므로 두 선분 MN, AC의 중점을 각각 E, F라 하면

$\overline{AE}=\dfrac{3}{2}\overline{AF}=\dfrac{3}{2}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 4\right)=3\sqrt{3}$

삼각형 AMN의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{MN}\times\overline{AE}=3\sqrt{3}$





점 P에서 평면 AMN에 내린 수선의 발을 H,
점 P에서 선분 AM에 내린 수선의 발을 Q라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HQ}\perp\overline{AM}$이므로 평면 AMN과 평면 PAM이 이루는 각의 크기를 $\theta(0^\circ\le\theta\le 90^\circ)$라 하면 $\theta=\angle HQP$이다.

$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{ME}^2}=2\sqrt{7}$이고

$\angle APM=\angle ABC=120^\circ$이므로 삼각형 PAM의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{MP}\times\sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\times\overline{AM}\times\overline{PQ}$,

$\dfrac{1}{2}\times 4\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{7}\times\overline{PQ}$, $\overline{PQ}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$

한편, $\overline{HE}=k$라 하면 두 직각삼각형 AHP, EHP에서

$\overline{AP}^2-\overline{AH}^2=\overline{EP}^2-\overline{EH}^2$,

즉 $4^2-(3\sqrt{3}-k)^2=(\sqrt{3})^2-k^2$이므로 $k=\dfrac{7\sqrt{3}}{9}$

따라서 직각삼각형 PHE에서 $\overline{PH}=\sqrt{\overline{PE}^2-\overline{HE}^2}=\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$

이때 직각삼각형 PHQ에서

$\overline{HQ}=\sqrt{\overline{PQ}^2-\overline{PH}^2}=\dfrac{10\sqrt{21}}{63}$이므로 $\cos\theta=\dfrac{\overline{HQ}}{\overline{PQ}}=\dfrac{5}{9}$

그러므로

삼각형 AMN의 평면 PAM위로의 정사영의 넓이는

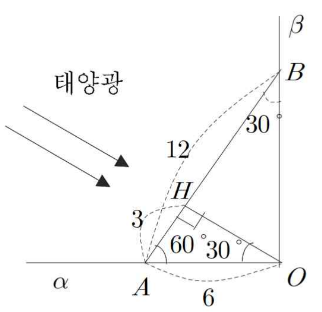
$S\times\cos\theta=3\sqrt{3}\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{5}{3}\sqrt{3}$

따라서 $p=3$, $q=5$이므로 $p+q=3+5=8$

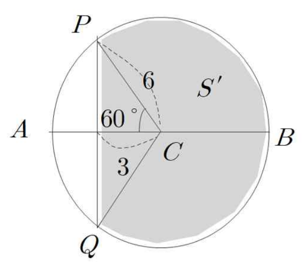
37) [정답] **34**

[해설]

반지름의 길이가 6인 원판이 평면 α, β와 맞닿는 점을 각각 A,B라 하고, 두 점 A,B에서 교선 l에 내린 수선의 발을 O라 하고, 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H 라 하면 주어진 상황의 단면을 다음 그림과 같이 나타낼 수 있다.



따라서 그림자가 S부분에 해당되는 영역 S'은 원판에서 다음과 같다.



$S'=6^2\pi-\{$(부채꼴PQC의 넓이)-(삼각형 PQC의 넓이)$\}$

$$=36\pi-\left(\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=36\pi-(12\pi-9\sqrt{3})=24\pi+9\sqrt{3}$$

이 때, $S=\dfrac{S'}{\cos 30^\circ}$이므로

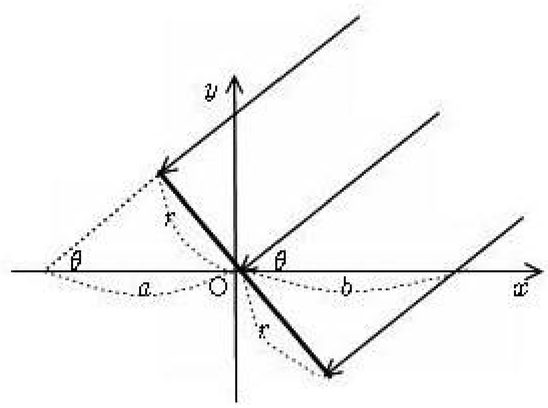
$$S=\frac{24\pi+9\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=18+16\sqrt{3}\pi$$

$\therefore\ a=18,\ b=16\quad\therefore\ a+b=34$

38) [정답] ③

[해설]

ㄱ. 구의 지름 중 구의 중심을 지나고 교선 l과 평행한 지름의 정사영의 길이는 변치 않으므로 그림자와 교선 l의 공통부분의 길이는 $2r$ 이다 (참)
또, 구의 중심을 교선l위에 오도록 평행이동하고 구면 위의 원 중에서 태양광선에 수직인 원의 지름을 xy평면에서 생각하면 그림과 같다



이때 $a\cos\theta=r$, $b\sin\theta=r$ 이므로

ㄴ. $a\cos 60^\circ=b\sin 60^\circ$ 에서 $\quad a=\sqrt{3}b$
즉 $a>b$ (거짓)

ㄷ. $\cos\theta=\dfrac{r}{a}$, $\sin\theta=\dfrac{r}{b}$ 이므로

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 에 대입하면 $\quad\dfrac{r^2}{a^2}+\dfrac{r^2}{b^2}=1$

즉 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{r^2}$ (참)

39) [정답] ⑤

[해설]

반구의 밑면의 넓이를 S라고 하면

$S_1=S\dfrac{1}{\cos\theta}$이고 $S_2=\dfrac{1}{2}S\dfrac{1}{\sin\theta}$이다.

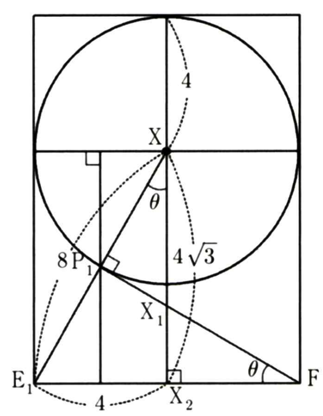
$S_1:S_2=3:2$이므로 $\quad\dfrac{4}{\cos\theta}=\dfrac{3}{\sin\theta}$

$\therefore\ \tan\theta=\dfrac{3}{4}$

40) [정답] ④

[해설]

구의 중심을 지나고 평면 AEFB에 평행하게 절단하면 구가 밑면 ABCD와 직육면체의 네 옆면에 모두 접하므로 구의 반지름은 4이고 구의 중심을 X라 하면 구의 중심에서 평면 EFGH에 이르는 거리는 $(4+4\sqrt{3})-4=4\sqrt{3}$이다.



구와 삼각기둥과 한 점에서 만나므로 그 점은 두 점 P, Q의 중점 P_1이 된다.

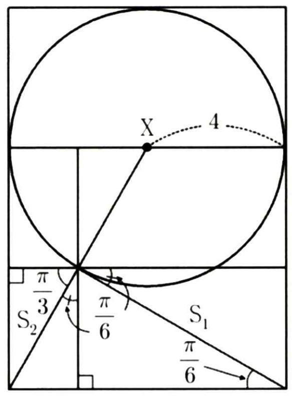
이때 두 점 F, G의 중점을 F_1, 두 점 E, H의 중점을 E_1,

구의 중심 X에서 태양광선에 평행하게 연장하였을 때, 평면 EFGH와 교점을 X_2라 하면 삼각형 XX_2E_1과 $F_1P_1E_1$는 직각과 맞꼭짓각을 공유하는 AA닮음 관계의 삼각형이 되므로

$\angle X_2XE_1=\theta$라 하면 $\tan\theta=\dfrac{4}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{6}$

이때 삼각기둥에 그림자는 구의 중심을 지나고 직육면체의 밑면에 평행한 평면과의 교원의 넓이는 $\pi\cdot4^2=16\pi$이므로



$S_2\cos\dfrac{\pi}{3}+S_1\cos\dfrac{\pi}{6}=16\pi$

$\dfrac{S_2+\sqrt{3}\ S_1}{2}=16\pi$

따라서 양변에 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$을 곱하면

$S_1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}S_2=\dfrac{32\sqrt{3}\pi}{3}$

41) [정답] 17

[해설]

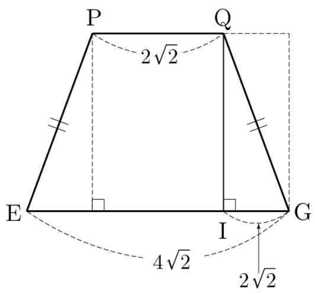
$\overline{PQ}//\overline{EG}$이므로 평면 PMQ는 평면 PEGQ에 포함된다.

따라서 θ는 평면 PEGQ와 평면 EFGH가 이루는 예각이다.

정육면체의 한 변의 길이를 4라 하면

$\overline{PQ}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, $\overline{EG}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$,

$\overline{QG}=\overline{PE}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$이므로 사각형 PEGQ는 등변사다리꼴이다.



점 Q에서 변 EG에 내린 수선의 발을 I라 하면 위 그림에서

$\overline{QI}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

점 Q에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 K라 하면

점 Q에서 평면 EFGH에 이르는 거리가 4이므로 $\overline{QK}=4$

삼수선의 정리에 의해서 $\angle QIK=\theta$이므로

$\sin\theta=\dfrac{4}{3\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{1}{9}$

$\therefore \tan^2\theta+\sec^2\theta=2\sec^2\theta-1=2\times9-1=17$

42) [정답] ⑤

[해설]

구의 지름의 길이가 2이고 $\overline{AB}=2$이므로

선분 AB는 구의 중심 $(-1, 0, 2)$를 지난다.

평면의 법선벡터가 직선 AB의 방향벡터이므로

직선 AB의 방정식은 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{-1}$인데, 이것이 점 $(0, a, b)$를 지난다.

따라서 $1=\dfrac{a}{3}=\dfrac{b-2}{-1}$

$a=3,\ b=1$

$\therefore\ a+b=4$

43) [정답] ④

[해설]

$\overline{AG}=\sqrt{3}$, $\overline{AB}=1$, $\overline{GB}=\sqrt{2}$이므로 $\triangle ABG$는 직각삼각형이다.

B에서 $\overline{AG}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{BH}$는 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$이고

$\overline{AH}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $b=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$이다.

$\therefore ab=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

44) [정답] ⑤

[해설]

$\overline{MQ}$가 최대가 되려면 점 B를 지나야 하므로

$(최댓값)=2\overline{MB}=2\sqrt{3^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{17}$

45) [정답] ④

[해설]

사각뿔 $A-BCDE$에서 밑면 BCDE는 한 변이 $\sqrt{2}t$인 정사각형이고 높이는 $4-t$이므로 부피 $f(t)$라 하면

$f(t) = \frac{1}{3} \cdot 2t^2(4-t)$ ($0 < t < 4$)

$f'(t) = -2t^2 + \frac{16}{3}t = 0$에서 $t = \frac{8}{3}$

에서 극대이자 최대를 갖는다.

46) [정답] ⑤

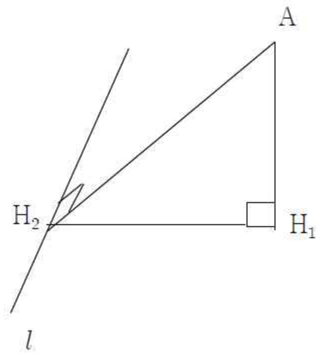
[해설]

ㄱ. 평면 α와 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 교선을 l이라 하자.

점 A에서 평면 α와 교선 l에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면

$\overline{AH_1} \le \overline{AH_2}$

즉, 점 A에서 평면 α에 이르는 거리는 평면 α와 세 점 A, B, C를 지나는 평면이 수직일 때 최대이다.



마찬가지로 두 점 B와 C에서 평면 α에 이르는 거리는 평면 α와 세 점 A, B, C를 지나는 평면이 수직일 때 최대이다.

따라서 평면 α 중에서 $d(\alpha)$가 최대가 되는 평면을 β라 하면 평면 β는 세 점 A, B, C를 지나는 평면과 수직일 때 최대이다. (참)

ㄴ. $\overline{BC} \le \overline{AC}$라 하자.

선분 BC의 중점을 M이라 하면 평면 α가 점 M을 지날 때 $d(\alpha)$는 최대이다.

즉, 평면 β는 선분 BC의 중점을 지난다.

마찬가지로 $\overline{AC} \le \overline{BC}$일 때에는 평면 β는 선분 AC의 중점을 지난다. (참)

ㄷ. $\overline{AC} = \sqrt{(2-2)^2 + (-1-3)^2 + (0-0)^2} = 4$

$\overline{BC} = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-1)^2 + (0-0)^2} = 2\sqrt{2}$

이때, $\overline{BC} \le \overline{AC}$이므로 $d(\beta)$는 점 B와 평면 β 사이의 거리와 같다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

47) [정답] ⑤

[해설]

원 C_1을 포함하는 평면이 평면 α와 이루는 각도를 θ_1, 원 C_2를 포함하는 평면이 평면 α와 이루는 각도를 θ_2라고 하면

$S = 3\pi\cos\theta_1 = \pi\cos\theta_2 = \pi\sin\theta_1$ ($\because \theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$)

$$\therefore \left(\frac{S}{3\pi}\right)^2 + \left(\frac{S}{\pi}\right)^2 = 1 \qquad \therefore S = \frac{3\sqrt{10}}{10}\pi$$

48) [정답] ①

[해설]

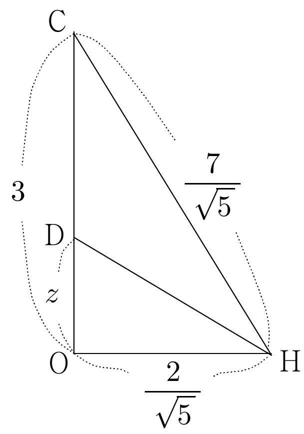
평면 β가 z축과 만나는 점을 D(0, 0, z)라 하자. 점 C와 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선 정리에 의하여 선분 OH는 선분 AB에 수직이다.

$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OH} \cdot \overline{AB}$ 이므로

$\overline{OH} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore \ \overline{HC} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}} \cdots (1)$

삼각형 OHC의 단면을 나타내면 다음 그림과 같다.



선분 HD가 선분 HO와 선분 HC의 사이 각을 이등분하므로 $\angle OHD = \angle DHC = \theta$라 하자. 정사영의 원리에 의해 선분 HC와 선분 HD를 xy평면으로 정사영한 길이는 서로 같으므로

$\overline{HC} \cdot \cos 2\theta = \overline{HD} \cdot \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdots (2)$

식 (1)로부터

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{2}{7}$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$ $(\because\ 0<\theta<90^\circ)$

식 (2)에 대입하면

$\overline{\mathrm{HD}}=\dfrac{2\sqrt{14}}{3\sqrt{5}}$

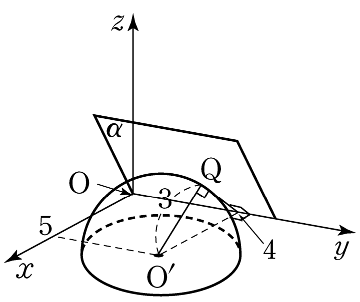
직각삼각형 OHD 에서 $\overline{\mathrm{HD}}^2=z^2+\overline{\mathrm{HO}}^2$ 이므로

$z^2=\overline{\mathrm{HD}}^2-\overline{\mathrm{HO}}^2=\dfrac{56}{45}-\dfrac{4}{5}=\dfrac{20}{45}=\dfrac{4}{9}$

$\therefore\ z=\dfrac{2}{3}$ $(\because\ z>0)$

49) [정답] 24

[해설]



반구의 중심을O′이라 하고,O′에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 H(0, 4, 0)이므로

$\overline{\mathrm{O'H}}=5$ .... ㉠

이 때, y축을 포함하는 평면 α와 반구의 접점을 Q라 하면

$\overline{\mathrm{O'Q}}=3$ .... ㉡

또한,$\overline{\mathrm{O'Q}}\perp\alpha$,$\overline{\mathrm{O'H}}\perp\overline{\mathrm{OH}}$이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{OH}}\perp\overline{\mathrm{QH}}$이다.

$\therefore\overline{\mathrm{QH}}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ .... ㉢

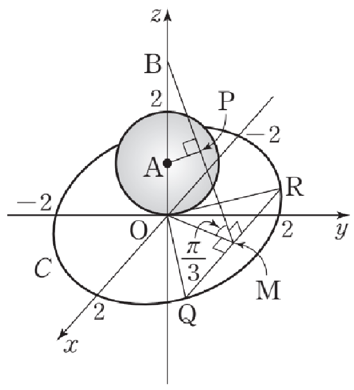
㉠, ㉡, ㉢에서 α와 xy평면이 이루는 각이

$\theta=\angle\mathrm{QHO'}$이므로 $\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{O'H}}}=\dfrac{4}{5}$ $\therefore\ 30\cos\theta=24$

50) [정답] ④

[해설]

구 S의 중심 (0, 0, 1)을 A라 하고, 구 S와 점 P에서 접하고 두 점 Q, R를 포함하는 평면이 z축과 만나는 점을 B라 하자.
이등변삼각형 OQR에서 선분 QR의 중점을 M이라 하면
$\overline{\mathrm{BO}}\perp$(xy평면), $\overline{\mathrm{OM}}\perp\overline{\mathrm{QR}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{BM}}\perp\overline{\mathrm{QR}}$



이때 xy평면과 평면 BQR의
교선은 직선 QR이고
$\overline{\mathrm{OM}}\perp\overline{\mathrm{QR}}$, $\overline{\mathrm{BM}}\perp\overline{\mathrm{QR}}$이므로
xy평면과 평면 BQR가
이루는 예각의 크기는

$\angle\mathrm{OMB}=\dfrac{\pi}{3}$

직각삼각형 BAP에서

$\angle\mathrm{ABP}=\dfrac{\pi}{6}$이고 선분 AP의

길이는 구 S의 반지름의 길이인 1이므로 $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$,

즉 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AB}}}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}=2$

이때 $\overline{\mathrm{OA}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}=1+2=3$

따라서 직각삼각형 BOM에서

$\tan\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OM}}}$, 즉 $\sqrt{3}=\dfrac{3}{\overline{\mathrm{OM}}}$이므로

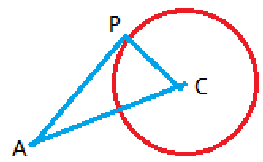
$\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{3}$

따라서 이등변삼각형 OQR에서

$\overline{\mathrm{QR}}=2\overline{\mathrm{QM}}=2\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OM}}^2}=2\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=2$

51) [정답] 9

[해설]



삼각형 APC는 빗변이 $\overline{\mathrm{AC}}$인
직각삼각형이므로

원의 지름은 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{41}$이다.

이것의 xy평면으로의 정사영의
길이는 A′(0, 0, 0), C′(3, 4, 0)

에서 $\overline{\mathrm{A'C'}}=5$,

따라서 최대 넓이는 장축의 길이가 $\sqrt{41}$,

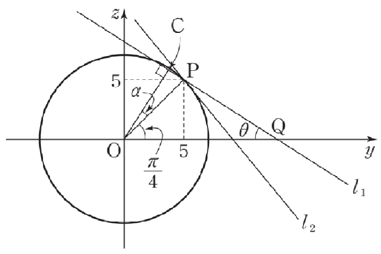
단축의 길이가 5인 타원이므로

$S=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{\sqrt{41}}{2}\pi=\dfrac{5}{4}\sqrt{41}\pi$, $\therefore p+q=9$

52) [정답] 9

[해설]

원 C의 중심을 C라 하자.
조건 (나)에서 원 C의 반지름의 길이가 1이므로 원 C를



포함하는 평면과 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 정사영의 넓이는 $\pi\cos\theta$

㉠의 값이 최대가 되려면 θ의 값이 최소가 되어야 한다. 그러기 위해서는 원 C의 중심 C의 z좌표가 최대가 되어야 하므로 원 C를 포함하는 평면은 yz평면과 수직이어야 한다. 점 P(0, 5, 5)가 yz평면 위의 점이므로 그림과 같이 구의 yz평면에 의한 단면에서 주어진 구는 $y^2+z^2=50$인 원으로 나타내어지고 원 C를 포함하는 평면은 직선 l_1 또는 l_2로 나타내어지는데 θ의 값이 최소이어야 하므로 l_1로 한정된다.

직선 CP가 xy평면과 만나는 점을 Q라 하면 $\angle\mathrm{OCQ}=\frac{\pi}{2}$이고,

점 P의 y좌표와 z좌표가 같으므로 $\angle\mathrm{POQ}=\frac{\pi}{4}$이다.

$\angle\mathrm{COP}=\alpha$라 하면 직각삼각형 OCQ에서

$\theta+\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{4}-\alpha$

또 직각삼각형 OCP에서

$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{CP}}^2}=\sqrt{50-1}=7$이므로

$\cos\alpha=\frac{7}{\sqrt{50}}=\frac{7}{5\sqrt{2}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{5\sqrt{2}}$

$$\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{7}{5\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

그러므로 구하는 정사영의 넓이의 최댓값은

$\pi\cos\theta=\pi\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\pi$

따라서 $p=5$, $q=4$이므로 $p+q=5+4=9$