기하: 공간도형
무지성 N제

저자 갑종배당이자소득세

기하: 공간도형

무지성 N제

저자 갑종배당이자소득세

들어가기에 앞서...

예, 여러분 반갑습니다.
매우 건전하고 지적이며 교육적인 문제만을 추구하는 이성적인 문제싸개, 갑종배당이자소득세입니다.
15개정 기하의 공간도형으로 찾아뵙니다.

22년까지의 공간도형 기출문제의 실질적 구성은 적절히 단면화하거나 수선의 발을 내리고 각을 찾아 계산하는 것이 전부입니다. 많은 분이 공간지각능력에서 유불리를 찾으시지만, 공간도형 실력 향상에는 기초적인 논리가 우선입니다. 허나, 기출의 양이 적은 만큼 한 번도 보지 못한 발상이나 복잡한 평면도형의 상황이 겹쳐 여러분을 현혹할 수 있습니다.

이에 갑종배당이자소득세의 무지성 N제에서는 찾아볼 수 없던 발상으로 가능한 모든 약점을 두드릴 수 있으나, 그 본질은 결국 하나임을 일깨워 주는 51문항을 제공합니다. 몇몇은 익숙하실 거고, 대부분이 새로우실 겁니다. 혹시나 어려운 문제가 있으시다면, 다음 페이지의 스포일러와 여백을 이용해 다시 도전하는 것도 방법입니다. 단, 운 좋게 맞으면 '운' 칸에, 스포일러를 보고 맞았으면 '스포' 칸에, 결국 해설지를 보게 됐으면 '해설' 칸에 체크하고, 복습해주세요. 스포일러의 도움을 받아가면서 문제마다 어디에 수선의 발을 내릴지, 이면각의 정의와 정사영 중 무엇을 골라 각을 찾을지 차근차근 고민하다 보면 어느새 문제없이 전 문항을 정복하실 수 있으실 겁니다.

그럼, 2024 수학능력시험의 기하 선택자 여러분 모두, 응원합니다. 감사합니다.

-갑종배당이자소득세

무지성
N제
기하:공간도형

01

반지름의 길이가 2이고 중심이 O인 구 S에 대해
서로 평행하고 점 O와의 거리가 서로 같은 평면 α, β가
구 S와 만나서 생기는 원을 각각 O_1, O_2라 하자.
원 O_1 위의 점 A와 원 O_2 위의 점 B, C에 대하여
삼각형 ABC를 평면 α에 정사영한 도형은
빗변의 길이가 2인 직각이등변삼각형이다.
평면 α와 평면 ABC가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때,
$28\cos^2\theta$의 값을 구하시오. [3점]

CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 수선, 수선, 수선

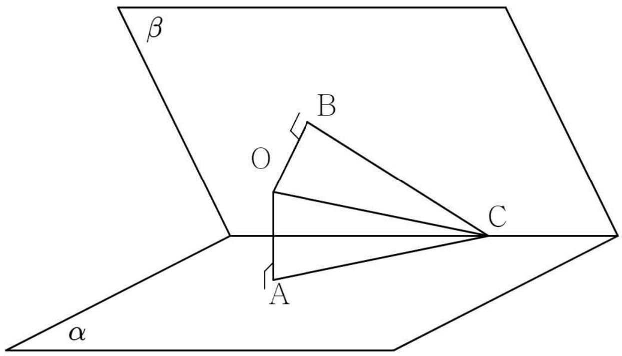
언제나 공간도형 문제의 핵심은 수선임을 잊지 말자. 특히 구의 중심을 지나고 내접하는 삼각형은 직각삼각형이기에, 구와 수선을 연결해서 생각하는 것이 좋다. α, β가 서로 평행하고, 점 O와 α, β의 거리가 같으므로 두 원은 서로 정사영했을 때 겹친다. 정사영한 삼각형이 직각삼각형이므로, 삼수선의 정리를 떠올려 보면 간단히 해결할 수 있다.

02

그림과 같이 점 O에서 각각 평면 α, β에 내린 수선의 발 A, B와 두 평면 α, β의 교선 위의 점 C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}} = 1$, $\overline{\mathrm{OC}} = \sqrt{13}$
(나) 삼각형 OAC를 평면 OBC에 정사영한 도형의 넓이는 $\dfrac{5\sqrt{3}}{8}$이다.

평면 α와 평면 β가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $20\cos\theta$의 값을 구하시오. [4점]



CHECK

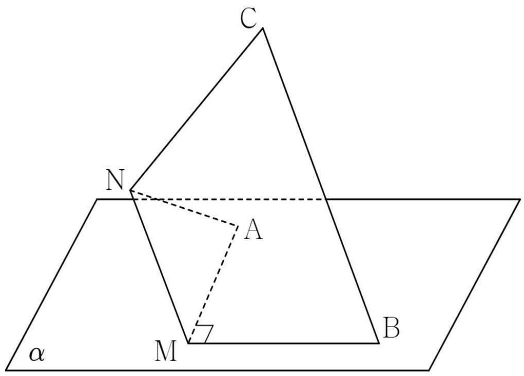
운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 이면각의 정의일까 정사영일까

이면각을 구할 때는 평면의 연장과 그 정의를 이용할지, 정사영한 도형의 넓이 비를 이용할지 고민해야 한다. 이 문제는 특히 그 둘을 적절히 섞어서 쓰는 쪽이 편하다. 우선 넓이 비가 정해졌으니, 평면 OAC와 OBC가 이루는 각을 바로 알 수 있을 것이다. 구하는 것은 α와 β가 이루는 각이므로, 이면각의 정의를 떠올려 교선에 수직인 두 직선을 찾으면 된다. 정황상 A와 B에서 교선에 내린 수선이 이루는 각을 찾으면 될 것이다. AB의 길이는 앞서 알아낸 각을 이용해 코사인법칙으로 충분히 구할 수 있을 것이다.

03

각각 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{CA}}$의 중점 M, N에 대하여 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC를 $\overline{\mathrm{MN}}$을 접는 선으로 하여 $\angle\mathrm{AMB}=90°$가 되도록 접은 뒤, $\overline{\mathrm{AM}}$, $\overline{\mathrm{MB}}$가 모두 평면 α에 닿도록 평면 α 위에 올려놓았다. 삼각형 AMN을 평면 α에 정사영한 도형의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. [4점]



CHECK

운 스포 해설

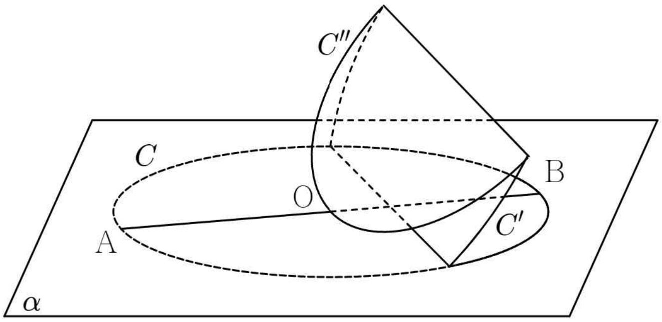
☐ ☐ ☐

SPOILER: 종이접기와 각, 그리고 수선의 발

우선 정삼각형에 집중해 보자. 삼수선의 정리에 의해 점 A에서 평면 MNCB에 내린 수선의 발이 M을 지나고 MB에 수직인 직선과 N을 지나고 NC에 수직인 직선의 교점이 될 것이다. 이 정보만으로 정사면체가 보인다면 더욱 좋을 듯.

04

그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 원 C가 평면 α 위에 놓여 있다. 원 C를 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발이 점 B가 되도록 접었을 때, 평면 α 위에 있지 않은 원 C의 접힌 부분을 C'라 하자. 도형 C'의 중심을 지나는 직선을 접는 선으로 하여 도형 C'을 접었을 때, 접힌 반원 C''이 점 O에서 평면 α와 접한다. 평면 C''과 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta = \dfrac{q+\sqrt{17}}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 정수이다.) [4점]



CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 공간도형의 기본: 단면화

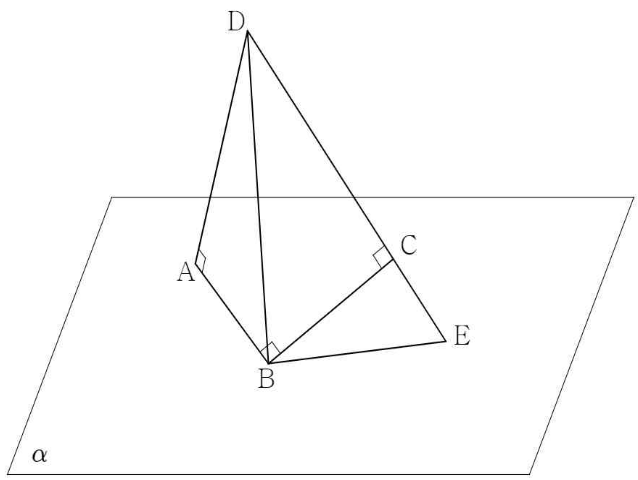
단면화 이외의 3차원적 아이디어는 없는 문제. 두려워하지 말고 옆에서 바라보면 이등변삼각형을 찾을 수 있을 것이다. 나머지는 닮음비뿐!

05

평면 α 위의 점 A, B, E와
평면 α 위에 있지 않은 점 C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB} = \overline{BC} = 2$, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$
(나) $\overline{AB} \perp \overline{AD}$, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$, $\overline{BD} \perp \overline{BE}$
(다) 점 C, D와 평면 α의 거리의 비는 $1:3$이다.

평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때,
$5\cos^2\theta$의 값을 구하시오. [4점]



CHECK

운 스포 해설

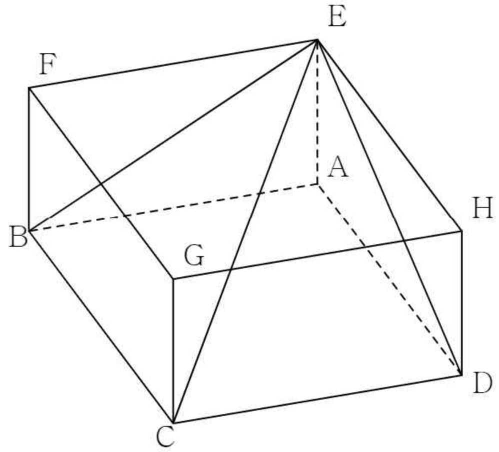
□ □ □

SPOILER: 수선의 발을 내려야 하는 위치

수선을 꼭 α에 내려야 할 필요는 없다. 두 직선에 동시에 수직인 직선은 두 직선에 각각 평행한 직선들을 포함하는 평면에 수직이다. 이를 이용해, 직선 AB에 평행한 직선과 직선 CD를 모두 포함하는 평면에 수선을 그어보자. 이후에도 양 직선에 수직인 직선을 발견한다면, 평면으로 연장해보자.

06

한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD를 한 밑면으로 하고 높이가 1인 직육면체 ABCD－EFGH가 있다.
평면 BCE와 평면 CDE가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $5\cos\theta$의 값을 구하시오. [3점]



CHECK

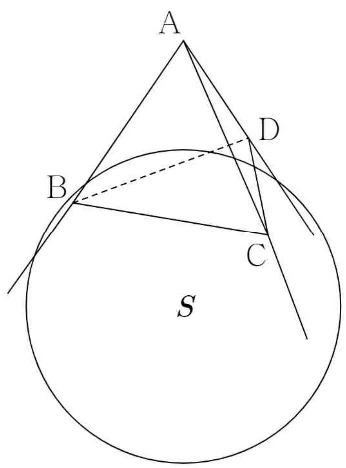
운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 이면각의 정의와 정사영, 선택의 문제

이면각을 구하려면 그 정의를 이용하거나, 원래 넓이와 정사영한 넓이의 비를 구해야 한다. 무엇을 고를지는 당신의 선택.

07

그림과 같이 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 구 S와 접하는 정사면체 ABCD에 대하여 직선 AB, 직선 AC, 직선 AD가 모두 구 S와 접한다. 정사면체 ABCD의 한 변의 길이가 $p\sqrt{6}-q\sqrt{2}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 자연수이다.) [3점]



CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 정사면체는 기본

정사면체는 수2에서의 삼차함수 같은 포지션이다. 기본적인 성질은 외워두자.

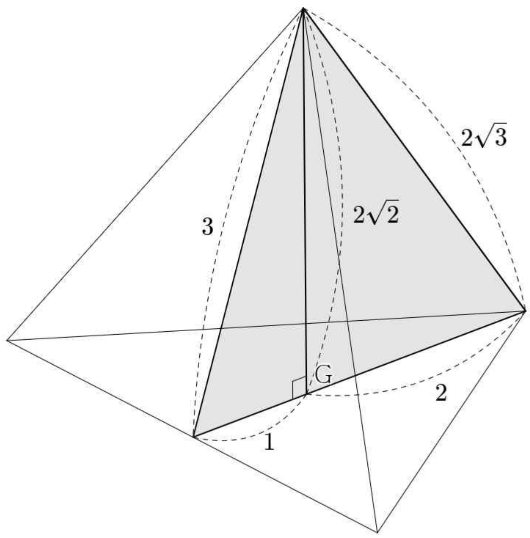
정사면체의 성질

(1) 한 꼭짓점에서 다른 면에 내린 수선의 발은 정삼각형의 무게중심이다.

(2) 각 면끼리 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta = \frac{1}{3}$이다.

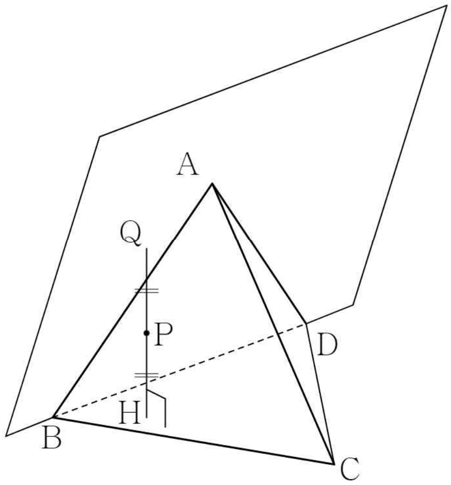
(3) 한 모서리와 면이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

(4) 정사면체의 한 변의 길이가 a일 때, 높이는 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$이다.



08

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사면체 ABCD에 대하여 평면 ABC 위의 한 점 P에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하자. 직선 PH와 평면 ABD의 교점을 Q라 할 때, $\overline{\mathrm{HP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$를 만족시키는 점 P의 자취의 길이를 k라 하자. $5k^2$의 값을 구하시오. [4점]



CHECK

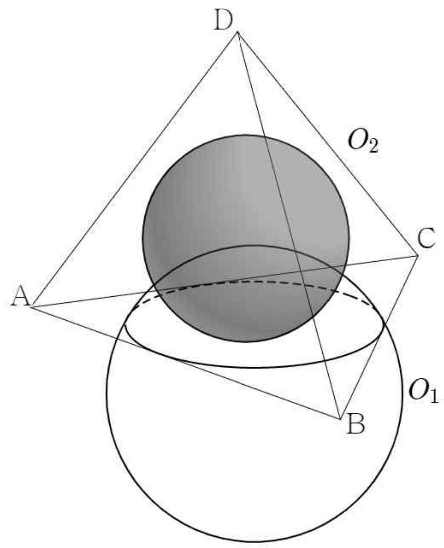
운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 속지 말고 단면화

공간에서의 자취 문제이지만 복잡한 상황은 아니다. 어차피 높이만 상관있으니 옆에서 봐도 아무 문제 없다.

09

정사면체 ABCD와 반지름의 길이가 3인 구 O_1에 대하여
평면 ABD, 평면 ACD, 평면 BCD가 각각
선분 AB, 선분 AC, 선분 BC에서 모두 구 O_1과 접한다.
구 O_1과 정사면체 ABCD에 내접하는 구 O_2가 만나서 생기는
원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



CHECK

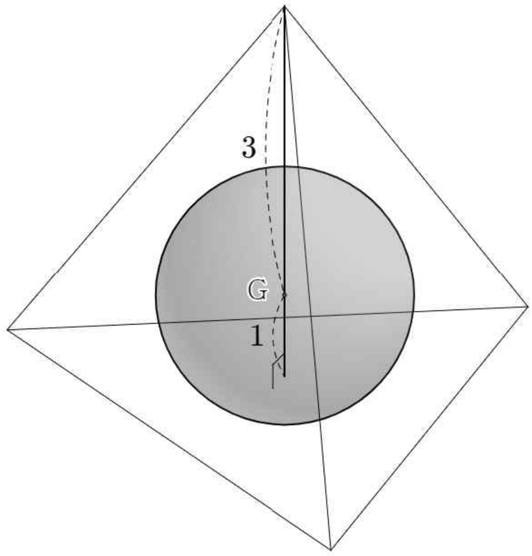
운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 정사면체의 성질

최근(23년) 수능에도 나온 적 있으니, 추가적인 성질도 가능한 알아 두자.

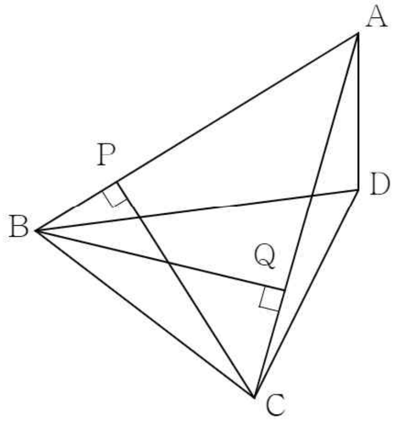
정사면체의 무게중심/접하는 구

(1) 높이의 $3:1$ 내분 지점이 무게중심이며, 내접/외접구의 중심이다.
(2) 내접구와 외접구의 반지름의 길이 비는 $2:3$이다.



10

좌표공간의 점 A와 정삼각형 BCD에 대하여
$\overline{AB}=\overline{BC}=5$이고, 직선 AD가 평면 BCD에 수직이다.
정삼각형 BCD의 무게중심을 G라 하고,
점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 P,
점 B에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 Q라 하자.
이때, 평면 PGC와 평면 QGB가 이루는 예각의 크기 θ에 대하여
$\cos\theta=\frac{3}{5}$이다. $\overline{AD}^2$의 값을 구하시오. [4점]



CHECK

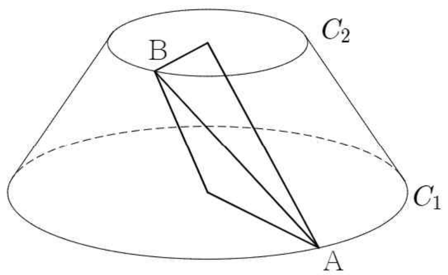
운	스포	해설
☐	☐	☐

SPOILER: 삼수선의 정리의 자유로운 활용

우선 필요한 것은 직선의 연장이다. 평면에 수직인 직선을 확인한 후, 삼수선의 정리를 이용해 수직인 평면을 찾아보자.

11

그림과 같이 중심이 O_1이고 반지름의 길이가 4인
원 C_1을 밑면으로 하고 높이가 6인 원뿔이 있다.
이 원뿔을 평면 C_1과 평행한 평면으로 잘랐을 때의 단면을
C_2라 할 때, 원 C_2의 중심은 O_2이고 반지름의 길이는 2이다.
원 C_1 위의 점 A와 원 C_2 위의 점 B에 대하여
직선 AO_1과 직선 BO_2가 이루는 예각의 크기가 $60°$이다.
평면 $\mathrm{O}_1\mathrm{AB}$와 평면 $\mathrm{O}_2\mathrm{AB}$가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때,
$4\sin\theta$의 값을 구하시오. [4점]



CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 수선 찾기와 방법의 선택

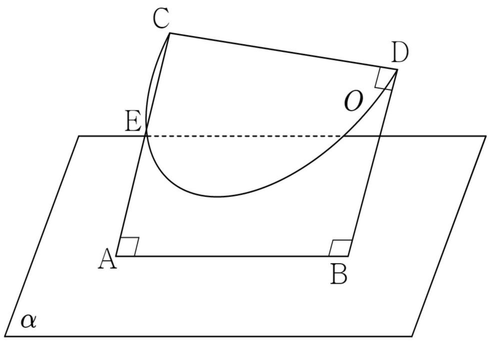
기본에 항상 충실하자. 필요한 곳에 수선을 그어 수직을 찾고, 수선의 발의 위치를 찾을지 이중으로 정사영해서 구할지는 본인의 선택!

12

평면 α 위의 점 A, B와 평면 α 위에 있지 않은 점 C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BD}} \perp \overline{\mathrm{CD}}$
(나) $\overline{\mathrm{AC}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$
(다) $\overline{\mathrm{BD}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BD}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$

직선 BD와 평면 α가 이루는 예각의 크기가 60°일 때, 선분 CD를 지름으로 하고 선분 AC 위의 한 점 E를 지나는 반원을 O라 하자. 반원 O를 평면 α에 정사영한 도형의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 단면화와 삼수선의 정리, 그리고 각

우선 단면화한 뒤, 삼수선의 정리를 이용해 직각을 찾아야 한다. 정보가 모두 나왔다면, 반원이 평면 ACD 위의 세 점을 지나므로 결국 구해야 하는 것은 평면 ACD와 평면 α가 이루는 예각의 크기이다. 이후에는 닮음으로 수선을 찾을지 이중으로 정사영해서 구할지 선택의 시간.

13

반지름의 길이가 2이고 중심이 O인 구 S에 대하여
서로 평행하고 점 O와의 거리가 모두 1인 평면 α, β가
구 S와 만나서 생기는 원을 각각 O_1, O_2라 하자.
원 O_1 위의 점 A와 원 O_2 위의 점 B에 대해
삼각형 OAB를 평면 α에 정사영한 도형의 넓이가 최대일 때,
평면 OAB와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자.
$5\cos^2\theta$의 값을 구하시오. [3점]

CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 최대/최소는 고정값부터, 계산 없이

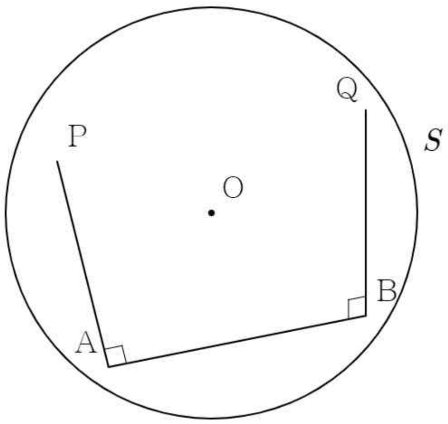
정사영한 도형의 최댓값이다. 변하는 원래 도형에 변하는 각을 곱한 식을 통해서 구하는 건 이상한 짓 같아 보인다. 비교적 간단한 정사영한 도형의 특징을 이용해 최댓값을 구해보자. 두 원의 반지름의 길이가 같으니 두 변의 길이가 고정된 이등변삼각형임을 바로 알 수 있을 것이다. 여기서 길이가 같은 변 중 하나를 고정해보자. 밑변처럼 생각해보는 것이다. 밑변이 고정이니, 높이가 최대일 때 최댓값을 가진다. 자연스레 나머지 한 변이 높이가 될 때 최대가 될 것이고, 이 경우일 때 이루는 각을 구하면 된다.

14

반지름의 길이가 5이고 중심이 O인 구 S 위의 점 A, B, P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AP}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AB}} \perp \overline{\mathrm{BQ}}$
(나) $\overline{\mathrm{AB}} = 6$, $\overline{\mathrm{BQ}} = 4\sqrt{3}$

삼각형 APQ를 직선 AB에 수직인 평면에 정사영한 도형의 넓이가 최대일 때, 선분 AP의 중점 M에 대하여 평면 APB와 평면 MBQ가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자.
$\tan\theta$의 값을 구하시오. [4점]



CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 13번을 떠올리며 차근차근

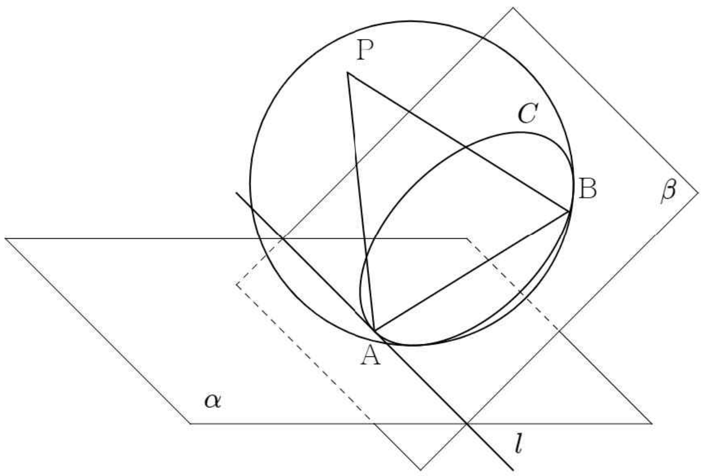
생김새에 현혹되지 말고, 고정값을 찾은 뒤, 계산 없이 찾아보자. 키는 도형이 구 내에서 변화한다는 것. 구의 단면이 무엇인지 떠올려 보자.

15

그림과 같이 이루는 예각의 크기가 60° 인 두 평면 α, β의 교선을 l이라 하자. 직선 l 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B에 대하여 직선 AB와 직선 l이 이루는 예각의 크기가 60° 이다. 반지름의 길이가 4이고 점 B를 지나는 구 S가 점 A에서 평면 α와 접한다. 평면 β와의 거리가 4인 구 S 위의 점 P에 대하여 평면 ABP와 평면 β가 이루는 예각의 크기가 최소일 때, 평면 ABP와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자.

이때, $\cos^2\theta = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



CHECK

운	스포	해설
□	□	□

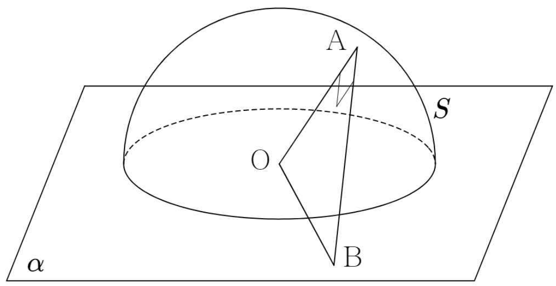
SPOILER: 언제나의 최대/최소인데 이제 계산을 좀 곁들인

파이팅.

역시 키는 구. 중학도형에도 유의하자. 마무리는 어떻게 봐도 이중 정사영.

16

그림과 같이 평면 α 위의 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 반구 S가 평면 α 위에 놓여 있다. 반구 S 위의 점 A에서 그은 접선이 평면 α와 만나는 점을 B라 할 때, 직선 OA와 평면 α가 이루는 예각의 크기가 $45°$이고, 삼각형 OAB를 평면 α에 정사영한 도형의 넓이가 1이다. 직선 AB와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $3\cos^2\theta$의 값을 구하시오. [3점]



CHECK

운 스포 해설

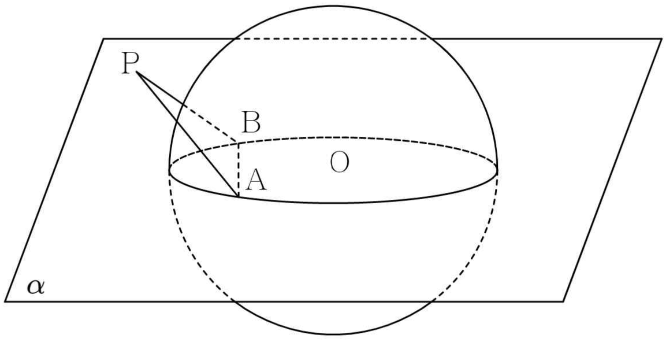
□ □ □

SPOILER: 수직인 평면에 유의하자

구는 기본적으로 원의 연장선이다. 접선이 있다면 접선을 포함하고 구에 수직인 평면을 떠올리는 것도 좋다.

17

평면 α 위의 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 구 S가 있다. 평면 α와 구 S 위의 점 A, B에서 각각 접하는 직선이 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 만난다. 삼각형 ABP의 외접원의 넓이와 구 S를 평면 ABP로 자른 단면의 넓이가 모두 8π일 때, 삼각형 ABP를 평면 α에 정사영한 도형의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. [4점]



CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 구는 원의 연장선

앞서 말했듯이, 구는 기본적으로 원의 연장선이다. 즉, 특징도 비슷하다는 것. 접선이 있다면, 당연히 수직이다. 외접원 조건으로 삼각형의 개형을 찾아냈다면, 마무리는 단면화 후 닮음으로!

18

좌표공간의 세 점 $\mathrm{A}(a, 3, b)$, $\mathrm{B}(0, 3, 2b)$, $\mathrm{C}(a, 0, 3b)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=2$이고, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$이다. 평면 OAC와 평면 OBC가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.
(단, 점 O는 원점이고, a, b는 양수이다.) [3점]

① $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\dfrac{3}{5}$ ③ $\dfrac{\sqrt{13}}{5}$ ④ $\dfrac{4}{5}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 좌표공간에 익숙해지자

좌표공간으로 표현되어 있지만, 본질적으로 달라지는 건 없다. 대칭 등을 이용해서 그림을 그리는 과제가 추가되었을 뿐.

19

그림과 같이 구 $x^2+y^2+(z-\frac{3}{2})^2=9$ 위에 있고

한 평면 위에 있는 네 점 A, $\mathrm{B}(0, 0, -\frac{3}{2})$, P, Q가

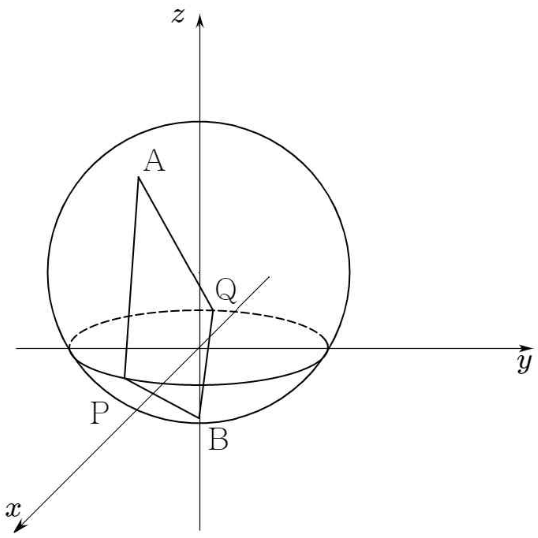
다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 P, Q는 xy평면 위에 있다.
(나) $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{6}$, $\overline{\mathrm{AP}}=5$, $\overline{\mathrm{AQ}}=3$

구 $x^2+y^2+(z-\frac{3}{2})^2=9$를 평면 APQ로 자른 단면을

xy평면에 정사영한 도형의 넓이를 $\frac{q}{p}\pi$라 하자.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



CHECK

운	스포	해설
□	□	□

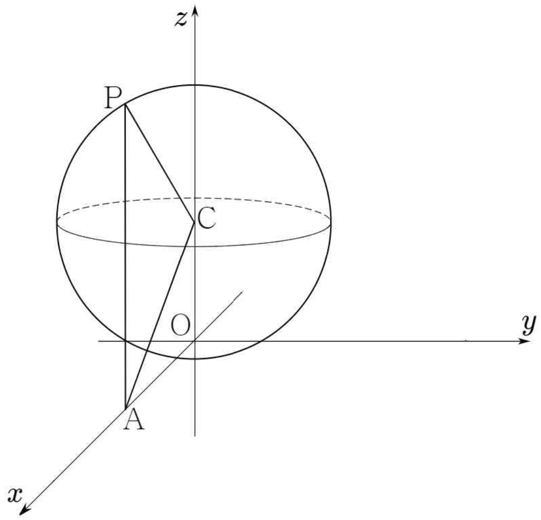
SPOILER: 공통과목의 중요성

고정된 길이를 파악한다면 작년(23수능)에 본 듯한 문제로 변한다. 수1의 삼각함수의 활용 단원에 나올 법한 도형의 상황이 나와도 이상할 것 없다. 애초에 공통과목 자체가 매우 중요하니;;

20

좌표공간의 점 $\mathrm{A}(2,0,0)$, $\mathrm{C}(0,0,\sqrt{3})$과 구 $x^2+y^2+(z-\sqrt{3})^2=4$ 위에 있고 xy평면과의 거리가 $2\sqrt{3}$인 점 P에 대하여 평면 ACP와 xy평면이 이루는 예각의 크기가 최소가 되도록 하는 점 P를 X라 하자.

선분 AX의 길이를 a라 할 때, a^2의 값을 구하시오. [4점]



CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 좌표공간에서의 최대/최소

라고 해 봤자 다를 게 없다. 좌표가 주어졌다고 해서 꼭 식을 쓸 필요는 없다. 이 문제에서의 핵심은 그저 대칭성 확인과 연장.

21

원 C를 밑면으로 하고 반지름의 길이가 2인 반구 S가 평면 α 위에 놓여 있다. 원 C의 중심 O와 $\overline{\mathrm{AB}}=4$를 만족하는 원 C 위의 점 A, B에 대하여 선분 AO의 중점을 M, 선분 OB의 중점을 N라 하자. 반구 S 위의 점 P, Q에서 각각 평면 α에 내린 수선의 발 P′, Q′가
$\overline{\mathrm{P'M}}+\overline{\mathrm{P'N}}=\overline{\mathrm{Q'M}}+\overline{\mathrm{Q'N}}=4$를 만족시킬 때,
평면 PAB와 평면 QAB가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자.
$4\sin^2\theta$의 값을 구하시오. [4점]

CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 발상 연습

원을 정사영하면 타원이 된다. 정말 그거밖에 없는 문제.

22

반지름의 길이가 모두 $\frac{\sqrt{5}}{2}$이고 평면 α 위에 놓여 있는
네 원기둥 O_1, O_2, O_3, O_4가 서로 외접한다.
네 원기둥 O_1, O_2, O_3, O_4의 평면 α와 만나지 않는
밑면의 중심을 각각 A, B, C, D라 할 때, $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{21}$이고,
사각형 ABDC를 평면 α에 정사영한 도형은 정사각형이다.
점 A, B, C, D와 평면 α 사이의 거리를 각각
1, a, b, 9라 할 때, 1, a, b는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
사면체 ABCD의 부피를 V라 할 때, $9V^2$의 값을 구하시오. [4점]

CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 거리 비 찾기

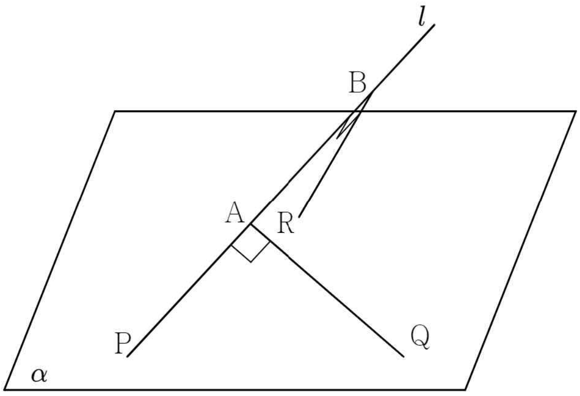
높이가 등차수열임에 주목하자. 높이가 등차수열이면, 단면화했을 때 교선까지의 거리 또한 등차수열일 것이다. 평면 α에 정사영한 도형이 정사각형이라고 했고, 한 변의 길이를 아니, 정확한 거리를 알 수 있을 것이다.

23

그림과 같이 직선 l이 점 P에서 평면 α와 만난다.
직선 l 위의 점 A, B와 평면 α 위의 점 Q, R이
다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BR}}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AQ}}\perp\overline{\mathrm{BR}}$
(나) $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}$

삼각형 AQR을 평면 α에 정사영한 도형의 넓이를 S라 하자.
$4S$의 값을 구하시오. [4점]



CHECK

운 스포 해설

☐ ☐ ☐

SPOILER: 단면화의 방향은 자유롭게

선분 AQ와 BR의 길이가 같고, 서로 수직임에 주목하자. 이 두 조건을 동시에 써먹으려면 직선 l에 평행한 방향으로 단면화하는 게 적절할 듯하다.

24

좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+(z-3)^2=1$와

점 $\mathrm{A}\left(0, \frac{15}{4}, 0\right)$, $\mathrm{B}(5, 0, 0)$가 있다. 구 S 위의 점 P에 대하여

삼각형 PAB를 xy평면에 정사영한 도형의 넓이가 최대일 때,

평면 PAB와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자.

$10\cos\theta$의 값을 구하시오. [3점]

CHECK

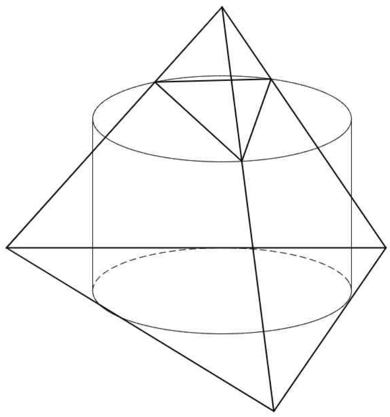
운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 단순한 최대/최소는

최대한 기하적으로 해결해 보자.

25

한 변의 길이가 $4\sqrt{3}$인 정사면체 ABCD에 대하여 한 밑면이 삼각형 BCD와 내접하고, 다른 밑면이 직선 AB, AC, AD와 모두 접하는 원기둥 O와 정사면체 ABCD가 만나는 면을 S라 하자. S를 평면 BCD에 정사영한 도형의 넓이가 $p\pi - q\sqrt{3}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 자연수이다.) [3점]



CHECK

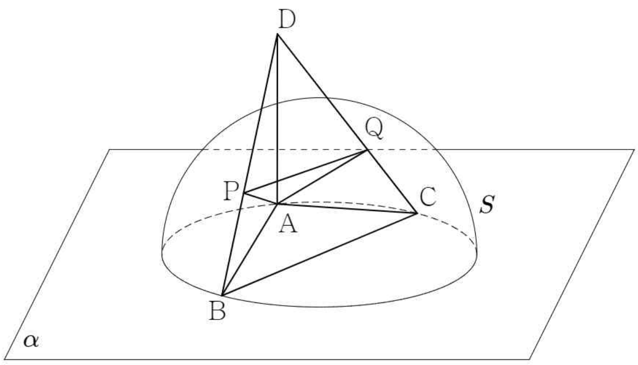
운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 이상한 도형을 정사영할 때는 정사영한 도형부터

뭔가 이상해 보이지만, 정사영한 방향으로 단면화해 보자. 나머지는 자잘한 계산.

26

반지름의 길이가 $\sqrt{7}$인 원 C를 밑면으로 하는 반구 S가 평면 α 위에 놓여 있다. $\angle \mathrm{BAC}=90^\circ$을 만족하는 원 C 위의 점 A, B, C와 반구 S 위의 점 P, Q에 대하여 직선 BP와 직선 CQ의 교점을 D라 할 때, $\overline{\mathrm{BD}}=4$, $\overline{\mathrm{CD}}=6$이고, 직선 AD가 평면 α와 수직이다. 평면 BCD와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$이다. 평면 BCD와 평면 APQ가 이루는 예각의 크기를 k라 할 때, $\tan^2 k$의 값을 구하시오. [4점]



CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 삼수선을 이용해서 수선의 발 찾기

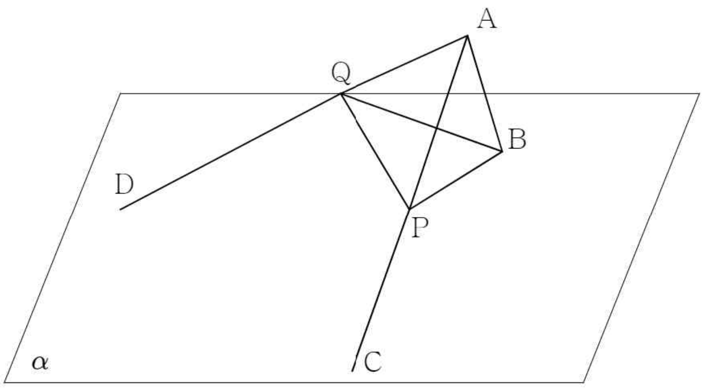
각도를 구하려면 우선 수선의 발의 위치를 알아야 한다. 수선이 겹치는 지점을 확인해 보자.

27

평면 α 위의 점 B, C, D와 평면 α 위에 있지 않은 점 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AC}}=4$, $\overline{\mathrm{AD}}=6$
(나) $\overline{\mathrm{AC}}$를 이등분하는 점을 P, $\overline{\mathrm{AD}}$를 $1:2$로 내분하는 점을 Q라 할 때, 삼각형 BPQ는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

이때, 삼각형 BPQ를 평면 α에 정사영한 도형의 넓이가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 시야의 확장

사면체 ABPQ가 정사면체인 것부터 발견하고 가자. 이후에는 주어진 점을 원래의 조건대로 외분점으로 볼지, 큰 도형의 내분점으로 볼지의 관점 차이가 체감 난이도를 결정짓는다.

28

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC와
평면 ABC 위에 있지 않은 점 P가 있다.
평면 ABC와 평면 PAB, PBC, PCA가 이루는 예각의 크기를 각각
θ_1, θ_2, θ_3라 할 때, 각 θ_1, θ_2, θ_3가
$\tan\theta_1 : \tan\theta_2 : \tan\theta_3 = 6 : 3 : 2$를 만족시킨다.
점 P에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 할 때,
점 H와 직선 AB 사이의 거리를 k라 하자.
이때, 가능한 모든 k값의 합은 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

CHECK

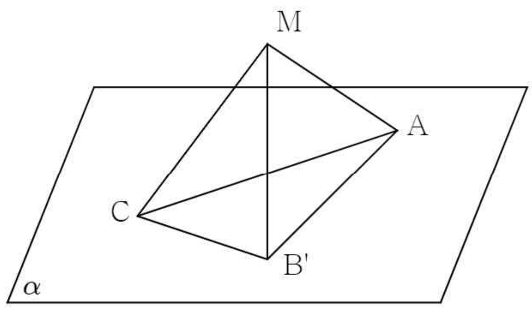
운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 차근차근

탄젠트는 밑변과 높이의 비니, 높이가 같은 상황에서 탄젠트의 비는 밑변의 역수비를 나타낸다. 나머지는 H의 위치에 따라 차근차근 구하는 것뿐.

29

평면 α 위의 점 A, C와 평면 α 위에 있지 않은 점 B에 대하여 직선 BC가 평면 α와 수직이고, 평면 ABC가 평면 α와 수직이다. 선분 AB의 중점 M에 대하여 선분 MC를 접는 선으로 하여 점 B가 평면 α 위에 있도록 삼각형 ABC를 접었다.
이동한 점 B를 B′라 할 때, 평면 AMB′와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\tan\theta$의 값을 구하시오. [4점]



CHECK

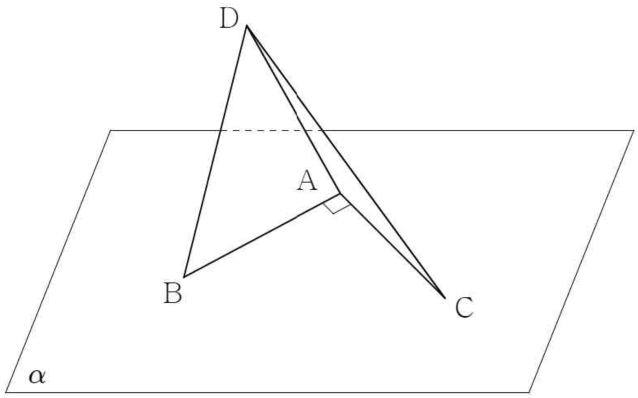
운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 같은 거리나 수직을 본다면 구를 떠올려보자

직각삼각형의 중심을 지나게 접은 것이므로, M에서 이르는 거리가 모두 같다. 당연히 구를 생각하지 않을 수 없겠고, 자연스레 수직을 찾을 수 있을 것이다.

30

평면 α 위의 점 A, B, C와 평면 α 위에 있지 않은 점 D에 대하여 두 평면 ABD, ACD가 이루는 각의 크기가 60°이고, 두 삼각형 ABD, ACD를 각각 평면 α에 정사영한 도형의 넓이가 서로 같다. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{AD}}=2$이고, 직선 AB와 직선 AC가 서로 수직일 때, 삼각형 ABD의 넓이를 S라 하자. S^2의 값을 구하시오. [4점]



CHECK

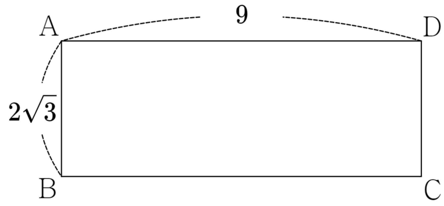
운	스포	해설
□	□	□

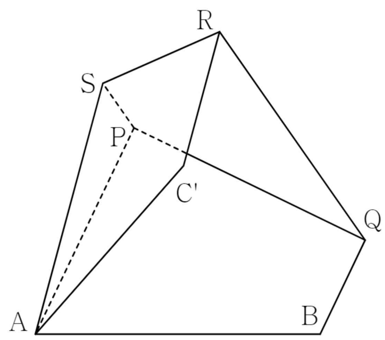
SPOILER: 정사영한 도형부터, 넓이 같다

두 삼각형은 밑변을 공유하고 있다. 넓이가 같으려면 당연히 높이도 같을 것이다.

31

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{AD}}=9$인 직사각형 ABCD에서
선분 PQ를 접는 선으로 하여 사각형 PQCD를 접어 올리고,
선분 RS를 접는 선으로 하여 사각형 ACRS를 접어 내렸을 때,
두 꼭짓점 A와 D가 만난다. 삼각형 APS가
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AS}}$이고 $\overline{\mathrm{PS}}=1$인 이등변삼각형이고,
두 평면 ABP와 PQR이 이루는 예각의 크기가 60°이다.
직사각형 ABCD를 접은 후의 점 C를 점 C′라 할 때,
두 평면 ABC′와 PQR이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자.
$\sin^2\theta=\dfrac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]





CHECK

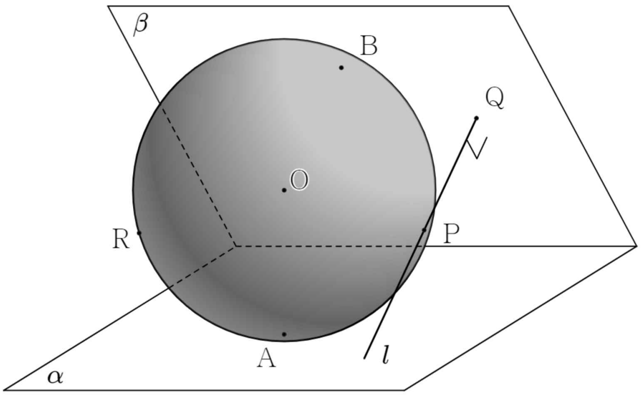
운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 종이접기에서의 이면각의 이용

종이접기는 보통 접었을 때보다 펼쳤을 때가 더욱 중요하다. 각의 크기가 주어졌다면, 전개도에서 거리의 비율로써 이용해 보자. 마무리는 접히는 양쪽 선분의 비율을 이용해서!

32

그림과 같이 중심이 O이고 반지름이 2인 구 S가 이루는 각의 크기가 60°인 두 평면 α, β와 동시에 접한다. 평면 β에 수직인 직선 l이 점 P에서 구 S와 접한다. 직선 l이 평면 β와 만나는 점을 Q라 하고, 구 S가 평면 α와 만나는 점을 A, 구 S가 평면 β와 만나는 점을 B라 할 때, 구 S 위의 점 R에 대하여 삼각형 OAR을 평면 OPQ에 정사영한 도형의 넓이가 최댓값을 가질 때의 점 R을 X라 하자. 평면 OAX와 평면 OPQ가 이루는 예각의 크기 θ에 대하여 $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$일 때, 점 Q와 평면 α 사이의 거리가 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



CHECK

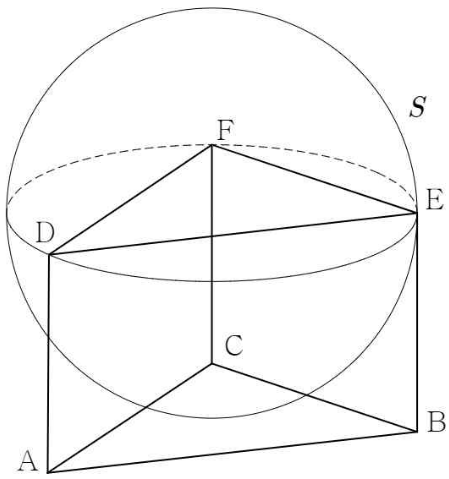
운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 결국은 삼수선의 정리의 이용

우선 해석해야 하는 건 최댓값. 점 B의 위치를 알고, 반지름의 길이가 2이므로, 평면 OPQ가 직선 OB를 축으로 얼마나 회전해 있는지를 확인해야 한다. 결국은 A에서 내린 수선의 발과 직선 OB의 각을 삼수선의 정리를 통해 알아내는 문제.

33

그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 삼각형 ABC를 밑면으로 하고 $\overline{AD}=4$인 삼각기둥 ABC$-$DEF가 있다. 삼각형 DEF가 반지름의 길이가 4이고 평면 ABC와 접하는 구 S에 내접한다. 선분 BE 위의 점 P와 선분 CF 위의 점 Q에 대하여 직선 AP, PQ, QA가 구 S와 모두 접한다. 평면 APQ와 평면 ABC가 이루는 각을 θ라 할 때, $\dfrac{1}{\tan\theta}$의 값을 구하시오. [4점]



CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 구의 단면은 모두 원이다

각각 한 평면 위의 직선이므로, 그 평면 위에서 접하는 거다. 구의 단면은 모두 원이니, 각각 해당하는 평면에서는 직선이 원에 접하는 상황.

34

좌표공간에서 x축과 접하고 중심이 y축 위에 있으며 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 구 S와 x축 위의 점 A를 지나는 직선 l이 점 P, Q에서 만난다.
직선 l을 xy평면에 정사영한 직선을 m이라 할 때, 직선 m은 구 S와 점 R, S에서 만난다. 이때, 점 R이 선분 AS를 이등분하고, 점 Q에서 xy평면에 내린 수선의 발이 선분 RS를 이등분한다. $\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$일 때, 평면 OAP와 zx평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

CHECK

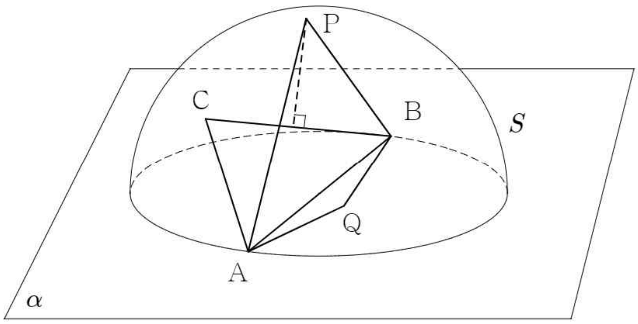
운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 단면화와 중학도형

우선 중점 조건으로 최대한 계산을 없앤 뒤, 닮음을 이용하자.

35

원 C를 밑면으로 하고 반지름의 길이가 2인 반구 S가 평면 α 위에 놓여 있다. 원 C 위의 점 A, B에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=4$이고, 반구 S 위의 점 C, P에 대하여 $\overline{\mathrm{BC}}=2$이고, 점 P에서 평면 ABC에 내린 수선의 발이 선분 BC를 이등분한다. 반구 S 위의 점 Q에 대하여 평면 BPC와 평면 AQB가 이루는 예각의 크기가 60°이다. 평면 APB와 평면 AQB가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



CHECK

운 스포 해설

□ □ □

SPOILER: 수직인 평면

수직인 평면이 쏟아지는 문제. 이용해 보도록 하자.

36

한 변의 길이가 6인 정사면체 ABCD 위의 점 P가
$\angle \mathrm{APD}=90^{\circ}$를 만족시킬 때,
점 P가 이루는 자취의 넓이는 $p\pi+q\sqrt{3}$이다.
$p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 자연수이다.) [4점]

CHECK

운 스포 해설

□ □ □

SPOILER: 수직인 자취를 보면 구를

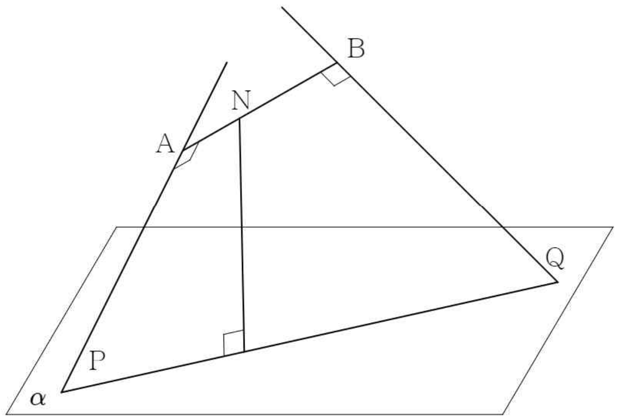
수1에서 수직 조건/각 고정 조건을 보면 원을 떠올리면 편한 문제가 많다. 여기도 같다. 구는 원의 연장선이니..

37

평면 α 위의 점 P, Q와 평면 α 위에 있지 않은 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{PA} \perp \overline{AB}$, $\overline{AB} \perp \overline{BQ}$, $\overline{AB} \parallel \alpha$
(나) 직선 PA, BQ가 평면 α와 이루는 예각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 할 때, $\tan\theta_1 + \tan\theta_2 = 3$이다.
(다) 직선 AB와 직선 PQ가 이루는 예각의 크기는 $45°$이다.

$2\overline{AN} = \overline{NB} = 4$를 만족하는 선분 AB 위의 점 N에서 평면 α에 내린 수선의 발이 직선 PQ 위에 있다.
삼각형 APQ를 평면 BPQ에 정사영한 도형의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. [4점]



CHECK

운	스포	해설
□	□	□

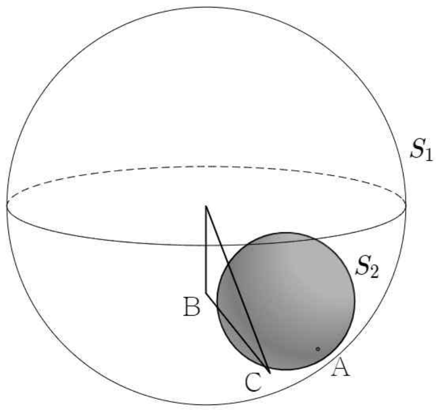
SPOILER: 기울기 비를 보자

탄젠트는 기울기다. 기울기의 비 또한 점 N의 위치로 알 수 있으니 각각의 기울기를 구할 수 있을 것이다.

38

그림과 같이 중심이 O_1인 구 S_1에 중심이 O_2이고 반지름의 길이가 1인 구 S_2가 점 A에서 내접한다. 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$의 중점 M이 구 S_2 위에 있고, 구 S_1 위의 점 B, C에 대하여 점 M에서 평면 ABC에 내린 수선의 발이 선분 BC 위에 있다. 선분 BC가 구 S_2에 접할 때, 평면 O_1BC가 구 S_2에 접한다. 이때, 평면 O_1AB와 평면 O_1AC가 이루는 예각의 크기 θ에 대하여 $\cos^2\theta = \dfrac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



CHECK

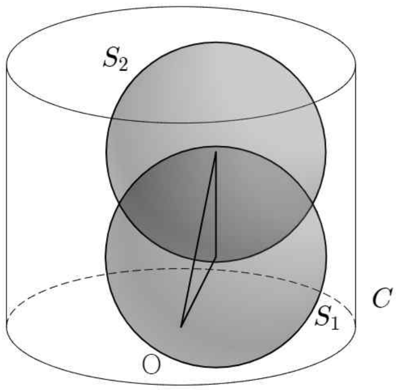
운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 단면화로 찾은 뒤에

평면 ABC를 집중적으로 보자. 구가 BC에 접한다는 사실을 잊지 않고, 등분조건과 수선의 발을 잘 이용하면 선분 BC의 위치와 길이를 알 수 있다. 마무리는 코사인법칙도 좋고, 평면좌표화한 뒤 내적을 이용해도 좋고.

39

그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원 C를 한 밑면으로 하고 높이가 3인 원기둥 P가 있다. 중심이 O_1이고 반지름의 길이가 1인 구 S_1과 중심이 O_2이고 반지름의 길이가 1인 구 S_2에 대하여 두 구 S_1, S_2가 서로 외접한다. 또한, 구 S_1는 원 C와 원기둥 P의 옆면에 모두 접하고, 구 S_2는 원기둥 P의 밑면 중 원 C가 아닌 면과 원기둥 P의 옆면에 모두 접한다.
원 C의 중심을 O라 할 때, 평면 $\mathrm{OO_1O_2}$와 평면 C가 이루는 예각의 크기 θ에 대하여 $\cos^2\theta = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 세 변의 길이를 알 때

정사영한 도형의 넓이는 단면화해서 어렵지 않게 구할 수 있을 것이다. 원래 삼각형의 넓이도 세 변의 길이를 아니, 코사인법칙으로 각을 구하면 알 수 있다. 물론 연장해서 교선을 찾아도 좋고.

40

yz평면과 수직이 아닌 이등변삼각형 ABC에 대하여 삼각형 ABC를 xy평면에 정사영한 도형은 한 변이 x축과 평행하고 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다. 삼각형 ABC를 zx평면에 정사영한 도형의 넓이는 삼각형 ABC를 xy평면에 정사영한 도형의 넓이와 같다. 삼각형 ABC의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오.

CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 대칭의 활용과 이등변

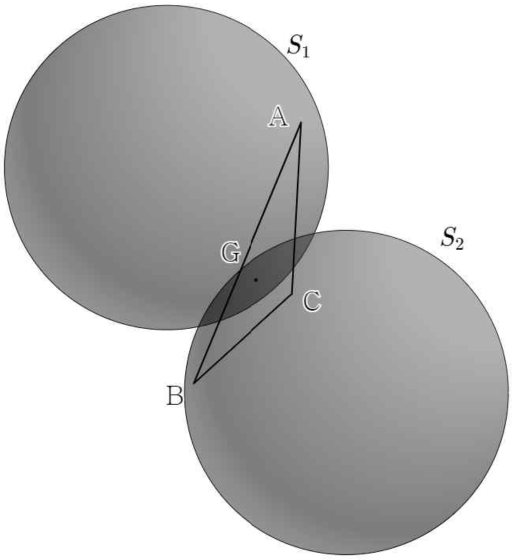
한 평면을 구하려면 한 점을 지나는 두 직선을 찾으면 된다. 그 중 하나는 대칭을 이용해서, 하나는 이등변삼각형을 어떻게 정사영했을 때 정삼각형이 되는지 확인함으로써 알아낼 수 있다.

41

점 G에서 외접하는 두 구 S_1, S_2와 구 S_1 위의 점 A, 구 S_2 위의 점 B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 AC는 구 S_2에 접한다.
(나) 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

구 S_1의 중심을 O_1, 구 S_2의 중심을 O_2라 할 때, 평면 $\mathrm{O}_2\mathrm{AB}$와 평면 ABC가 이루는 예각의 크기를 θ_1, 평면 $\mathrm{O}_2\mathrm{AC}$와 평면 ABC가 이루는 예각의 크기를 θ_2라 하자. $\cos^2\theta_1 : \cos^2\theta_2 = 4 : 5$일 때, 직선 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$와 평면 ABC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\tan\theta$의 값을 구하시오. [4점]



CHECK

운 스포 해설

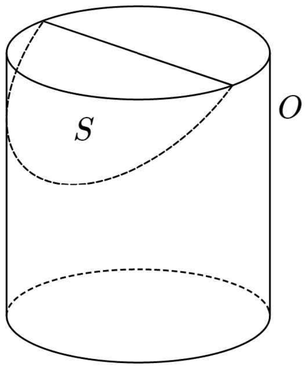
☐ ☐ ☐

SPOILER: 무게중심의 특성

무게중심의 특성을 이용해 중선을 기준으로 점과 점을 연결하다 보면 어느샌가 풀려 있는 문제.

42

그림과 같이 반지름이 2인 원기둥 O의 한 밑면의 중심을 지나는 평면으로 원기둥 O를 잘랐을 때, 두 도형 중 작은 쪽을 S라 하자.
도형 S를 yz평면에 정사영한 도형이 삼각형이고,
도형 S를 zx평면에 정사영한 도형이 넓이가 $2\sqrt{2}\pi$인 타원일 때,
도형 S를 xy평면에 정사영한 도형의 넓이는 $a\pi$이다.
a^2의 값을 구하시오. [4점]



CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 여러 방향으로 정사영

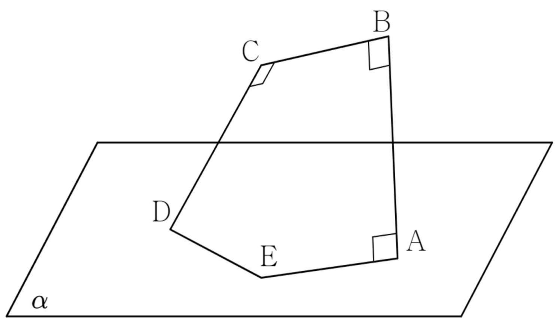
여러 방향에서의 정사영으로 도형의 방향과 정확한 모양을 특정할 수 있다. 주어진 개형을 통해 하나하나 끼워 맞춰 나가다 보면 된다.

43

평면 α 위의 점 A, D, E와 평면 α 위에 있지 않은 점 B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{EA}}=2$
(나) $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{EAB}=90^\circ$, $\angle\mathrm{DEA}=120^\circ$
(다) 평면 EAB와 평면 α가 이루는 예각의 크기는 60°이다.

점 B에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 평면 HBC와 선분 DE는 서로 평행하다. 사면체 ACDE의 부피가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{3}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



CHECK

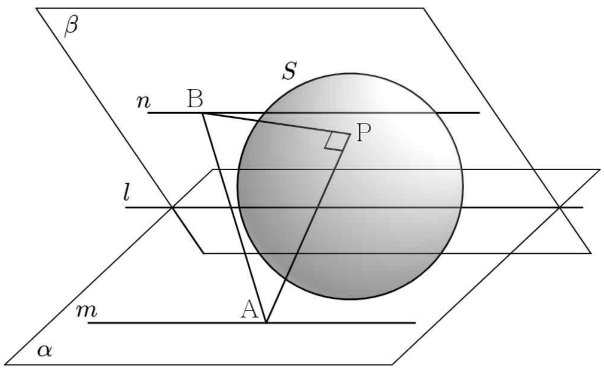
운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 더블 수직은 평면과 같이

6번의 스포일러에서 귀띔했듯이, 두 직선에 동시에 수직인 직선을 보면 평면으로 연장해서 생각하는 것도 필요하다.

44

그림과 같이 이루는 각의 크기가 60°인 두 평면 α, β에 대하여 두 평면 α, β의 교선 l과 평면 α 위의 직선 m, 평면 β 위의 직선 n이 서로 평행하다. 직선 m 위의 점 A, 직선 n 위의 점 B와 직선 l 사이의 거리가 각각 4, 3이다. 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이고 두 평면 α, β와 동시에 접하는 구 S에 대하여 구 S 위에 있고 $\overline{\mathrm{AP}} \perp \overline{\mathrm{PB}}$를 만족하는 점 P의 자취를 C라 하자. C를 평면 β에 정사영한 도형의 넓이가 최대일 때, $\overline{\mathrm{AB}}$를 평면 β에 정사영한 도형의 길이를 구하시오. [4점]



CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 수직 자취는 원, 평면에 수직인 직선은?

누누이 강조하는 얘기지만, 직각 고정 자취는 원을 떠올리면 된다. 이후 두 구가 만나서 생기는 평면은 두 구의 중심을 연결한 직선에 수직이라는 점에 착안해 풀어나가면 조금 더 쉽다.

45

평면 α 위의 점 A와 평면 α 위에 있지 않은 점 B, C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{CD}} \parallel \alpha$, $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{DC}}$, $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{BD}}$
(나) 삼각형 ABC와 삼각형 ABD를 평면 α에 정사영한 도형은 모두 이등변삼각형이다. (단, $\overline{\mathrm{AC}} \neq \overline{\mathrm{AD}}$)
(다) 평면 ABD, BCD와 α가 이루는 각도를 각각 a, b라 할 때, $\sin a : \sin b = 1 : \sqrt{3}$이다.

삼각형 ABC와 삼각형 BCD의 넓이가 서로 같을 때, 평면 ABD와 평면 BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $30\cos\theta$의 값을 구하시오. [4점]

CHECK

운	스포	해설
□	□	□

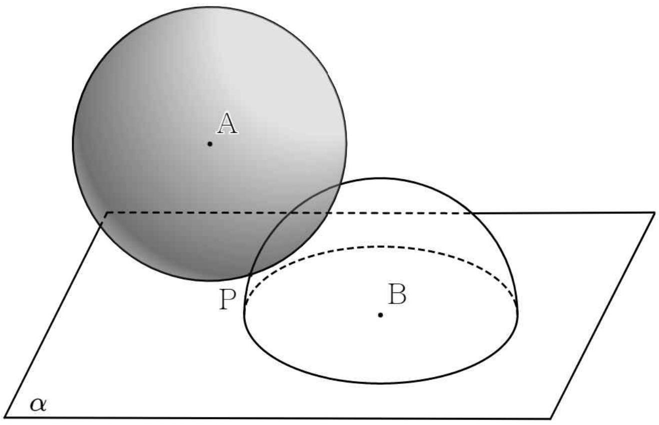
SPOILER: 공간도형 추론하기

주어진 조건에 부합하는 경우를 따져가면서 풀어나가는, 공통 22번과 비슷한 느낌의 문제다. 역시 조건을 해석하고, 차근차근 조립해 나가면 된다. 어떻게 해야 이등변삼각형을 정사영했을 때 다시 이등변삼각형이 될지 생각해보자.

46

반지름의 길이가 2이고 중심이 A인 구 C가 평면 α와 접한다. 반지름의 길이가 2이고 평면 α 위에 놓인 반구 C'의 중심을 B라 하고, 구 C와 반구 C'를 동시에 지나는 점을 P라 하자. 삼각형 APB를 평면 α에 정사영한 도형의 넓이가 최대일 때, 평면 APB와 평면 α가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $\cos^2\theta = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



CHECK

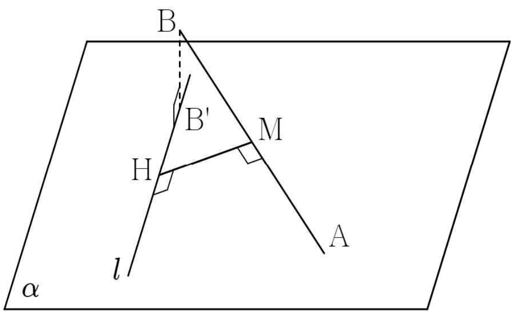
운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 고정된 길이를 중심으로

돌아온 최대/최소 문제다. 역시 고정된 길이를 중심으로 여러 제한 조건을 따져가며 최대인 경우를 기하적으로 찾아내면 된다. 제한 조건이 심각하게 복잡해지지 않는 이상 식을 쓸 필요가 없다.

47

평면 α 위의 점 A와 평면 α 위에 있지 않은 점 B에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=4$이다. 점 A를 지나지 않는 평면 α 위의 직선 l에 대하여 점 B에서 평면 α에 내린 수선의 발 B$'$이 직선 l 위에 있다. 선분 AB의 중점 M에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}} \perp \overline{\mathrm{MH}}$이다. 삼각형 AMH를 평면 α에 정사영한 도형의 넓이가 최대일 때, $\overline{\mathrm{BB'}}$의 값을 구하시오. [4점]



CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 복잡하면 식을 쓸지 변형할지 고민해보자

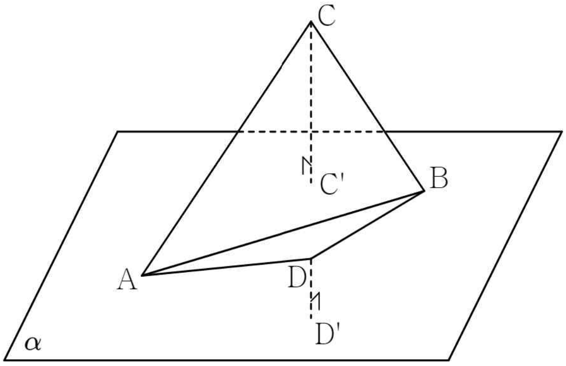
제한 조건이 복잡해지면 어쩔 수 없이 식을 쓸 수밖에 없다. 그래도 그 전에 같은 규칙성을 가지면서 최대한 단순해지는 쪽으로 변형할 수 있는지 확인해보자. 고정된 것을 중심으로 변형하는 것은 기본!

48

평면 α 위의 점 A, B와 평면 α 위에 있지 않은 점 C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AB}}=2$
(나) $\angle \mathrm{ACB}=60^\circ$, $\angle \mathrm{ADB}=120^\circ$
(다) 두 평면 ABC, ABD가 이루는 예각의 크기는 60°이다.

점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 C′,
점 D에서 평면 α에 내린 수선의 발을 D′라 하자.
사각형 AC′BD′의 넓이의 최댓값을 S라 할 때,
$3S^2$의 값을 구하시오. [4점]



CHECK

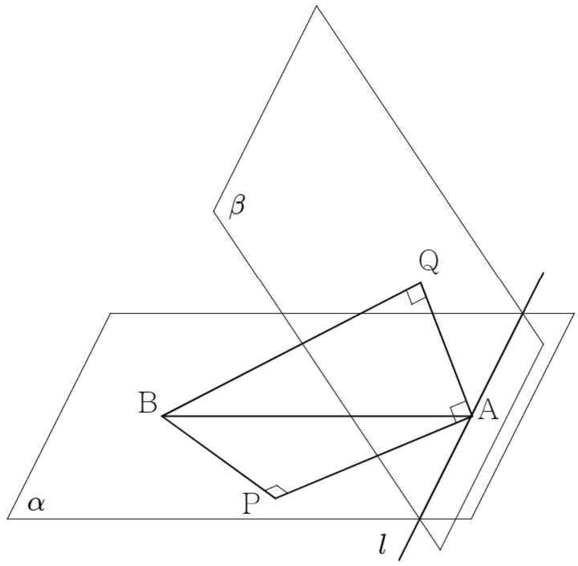
운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 경우를 잘 따지고 나서 단면화

옆에서 바라보자. 경우에 따라 복잡하게 나뉘지만, 최대가 되는 대략적인 경우는 생각보다 찾기 쉽다. 계산할 이유가 없다.

49

그림과 같이 이루는 예각의 크기가 $60°$ 인 두 평면 α, β의 교선을 l라 하자. 직선 l 위의 점 A와 평면 α 위의 점 B에 대하여 $\overline{AB}=4$이고, 직선 AB가 직선 l과 서로 수직이다. 평면 α 위의 점 P와 평면 β 위의 점 Q가 $\angle APB=\angle AQP=\angle PAQ=90°$를 만족시킬 때, 삼각형 APQ를 평면 α에 정사영한 도형의 넓이의 최댓값을 구하시오. [4점]



CHECK

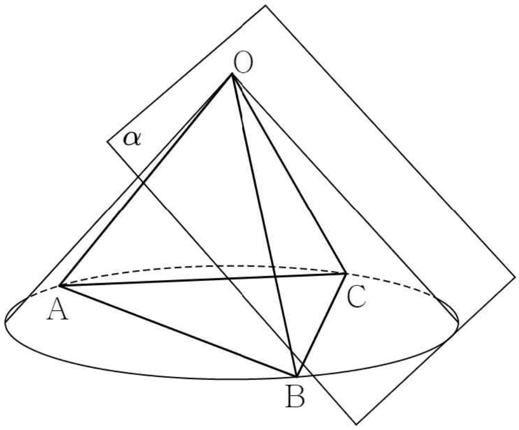
운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 복잡하면 식을 쓸지 변형할지 고민해보자 2

수직 조건이 나오면 구가 나오는 건 이제 기본! 제한 조건이 복잡해지면 어쩔 수 없이 식을 쓸 수밖에 없다. 그래도 그 전에 같은 규칙성을 가지면서 최대한 단순해지는 쪽으로 변형할 수 있는지 확인해보자.

50

그림과 같이 꼭짓점이 O인 원뿔 S에 내접하고
한 변의 길이가 2인 정사면체 OABC가 있다.
원뿔 S의 옆면에 접하는 평면 α에 대하여
정사면체 OABC를 평면 α에 정사영한 도형이 삼각형이다.
정사면체 OABC를 평면 α에 정사영한 도형의 넓이가 최소이고,
정사면체 OABC의 세 꼭짓점이 B, C, A의 순서대로
평면 α와 가까울 때, 평면 ABC와 평면 α의 교선과
직선 AB가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자.
$20\cos\theta$의 값을 구하시오. [4점]



CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 입체도형의 정사영

입체도형을 정사영할 때는 해당하는 면을 기준으로 관찰한다. 허나 조건에서 정사영한 도형이 삼각형이라고 했으니, 해당하는 면은 하나밖에 없겠다. 거기에 최소인 경우를 묻고 있으니..

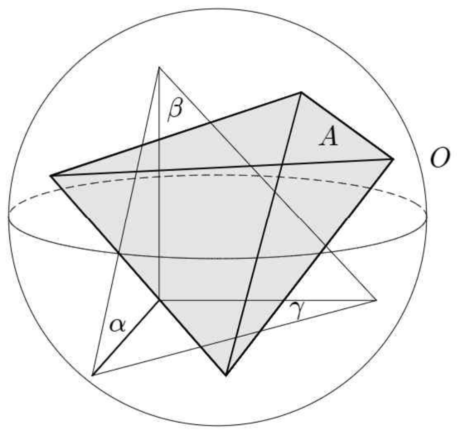
51

그림과 같이 한 면이 넓이가 $\frac{14\sqrt{3}}{3}$인 정삼각형이고,

나머지 세 면이 모두 직각삼각형인 사면체 A가 구 O에 내접한다.
A의 정삼각형이 아닌 세 면을 각각 α, β, γ라 할 때,
네 꼭짓점이 모두 O 위에 있는 사면체 V가
다음 조건을 만족시킨다.

(가) V를 평면 α에 정사영한 도형은 한 변이 평면 γ와 수직인 정삼각형이다.
(나) V를 평면 β에 정사영한 도형은 직사각형이다.

V의 부피가 최대일 때, V를 평면 γ에 정사영한 도형의 넓이를 S라 하자. $3S^2$의 값을 구하시오. [4점]



CHECK

운	스포	해설
□	□	□

SPOILER: 부피를 구하기 어렵다면 편한 모양대로 자르자

제한 조건이 심각하게 까다롭다. 어느 것 하나 자유롭게 움직이는 게 없어서, 어쩔 수 없이 식을 써야 해 보인다. 사면체의 부피를 구하기 어렵다면, 2개로 나누어 보자. 밑면과 높이를 자유롭게 설정하는 것이다.

1	4	2	10	3	1	4	3
5	4	6	4	7	6	8	65
9	41	10	5	11	3	12	71
13	3	14	2	15	175	16	2
17	72	18	④	19	35	20	19
21	3	22	25	23	9	24	8
25	7	26	14	27	26	28	17
29	1	30	12	31	49	32	5
33	8	34	109	35	11	36	17
37	108	38	130	39	34	40	7
41	1	42	18	43	8	44	1
45	10	46	8	47	2	48	13
49	2	50	5	51	144		

무지성(無遲成)

지연, 즉 재수 없이 이루어지리라는 의지