Show and Prove

2

수리논술을 위한 수학 2 & 미적분

저자 소개

SaP 시리즈 저자

김기대 T

- 고려대학교 수학과
- 2015~ 기대모의고사 저자
- 2023~ 기대 N제 저자
- 2023~ Show and Prove 1편~4편 저자
- 現) 오르비, 이투스, 대치명인 수능수학 & 수리논술 강의

2편 자문

한도현 경희대학교 의예과 수리논술 장학생 (메디컬 논술 성적 상위 3등 이내)

2편 검토진

김기준	서울대학교 수학교육과
양수진	서울대학교 수리과학부 박사수료 前 용인외대부고 교사
유연주	이화여자대학교 수학과 졸업 꽁쌤의 수학 교실 운영
임준홍	대치 새움학원
박도형	경희대학교 치의예과 (논술전형 합격)
정소흔	이화여대학교 수학과 학부 고려대학교 수학교육과 석사
박지호	한양대, 성균관대 논술 최초합

기대T 2024학년도 교재 커리큘럼

<table>
<tr><th>교재명</th><th>3월</th><th>4월</th><th>5월</th><th>6월</th><th>7월</th><th>8월</th><th>9월</th><th>10월</th><th>11월</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Show and Prove
수리논술 실전개념서</td><td colspan="4">1편 (교재 난이도 下~中)</td><td colspan="4"></td><td rowspan="3">학교별
Final
수업</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">2편 (교재 난이도 中~中上)</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="5">3편 (교재 난이도 上)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">기대 N제
수능수학 문제집</td><td></td><td colspan="6">시즌1</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="4">시즌2 (미정)</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>기대모의고사
수능수학 모의고사</td><td colspan="3"></td><td colspan="3">시즌1</td><td colspan="3">시즌2 (미정)</td></tr>
<tr><td colspan="10">- 학습기간은 책을 편 시점부터 3주를 넘기지 않는 것이 좋습니다. (한 권 기준)
- 음영구간은 ‘출판시기와 권장학습시즌’을 의미합니다.</td></tr>
</table>

교재 사용법

1. 학습 전 사전공부 권장량

1편 수리논술을 위한 Basic logic & 수학 1
고1 수학 학습 + 수학1 학습 + 수학2 기본개념 1회독

2편 수리논술을 위한 수학 2 & 미적분
본 시리즈 1편 학습 + 1편 누적 + 수학2 학습 + 미적분 학습

3편 수리논술을 위한 Advanced 미적분 & Advanced Theme
본 시리즈 2편 학습 + 2편 누적

4편 수리논술을 위한 기하와 확통 *(현강전용 교재)*
고1 수학 학습 + 수학1 학습 + 미적분 학습 + (본인 필요에 따라 선택) 확통, 기하 과목이수
(오르비, 포만한, 수만휘에 후기 작성시 추첨을 통해 4편(선택기하+선택확통)을 8월에 보내드립니다.
show and prove 검색시 나오는 게시글 기준이며, 쪽지를 통해 당첨안내 드립니다.)

2. 예제와 실전논제 활용법

예제와 실전논제에 대한 해설 전부는 해설집에 수록돼있으나, 일부는 문제집에도 동시 수록돼있습니다.
해설이 없는 문제는 없으니, 항상 해설집을 옆에 두고 공부하시기 바랍니다.
(Chapter별로 나뉘어져있는 예제해설모음 뒤에 논제해설모음이 있습니다.)

또한 예제와 실전논제에 있는 별표는 다음과 같이 활용하면 됩니다.

<table>
<tr><th>별표</th><th>설명</th><th>고민 정도</th><th>고민 시간</th></tr>
<tr><td>★☆☆☆☆</td><td>직전에 배운 개념을 가볍게 확인하기 위한 쉬운 문제</td><td>매우 빠르게</td><td>3분~5분 이내</td></tr>
<tr><td>★★☆☆☆</td><td>빈출하는 주제, 평이한 난이도의 문제</td><td>적당히</td><td>10분~15분 이내</td></tr>
<tr><td>★★★☆☆</td><td>실전 문제로 나오는 수준의 난이도이며,
고민에 가치가 있는 고난도 문제 (Like 준킬러문제)</td><td rowspan="2">넉넉히</td><td>15분~20분 이내</td></tr>
<tr><td>★★★★☆</td><td>합격자도 승률이 반반 정도인 문제 (Like 수능킬러문제)</td><td>20분~25분 이내</td></tr>
<tr><td>★★★★★</td><td>못 풀고도 합격이 가능할 만큼, 도전과 배움에 의의를 둔
초고난도 문제. 적당한 고민 후 해설로 빠른 학습 권장</td><td>빠르게</td><td>15분~20분 이내</td></tr>
<tr><td colspan="4">꼭 고민시간을 지키지 않아도 됩니다. 풀릴 것 같다면 더 고민해도 됩니다.</td></tr>
</table>

기대T 2024학년도 수리논술 수업 커리큘럼

수리논술 수업일		수업 Theme	수업명	교재
3월	8일 (수)	수리논술의 기본과 증명법 1	정규반 시즌1	시리즈 1편 +자체교재 +모의고사 응시 후 첨삭
	15일 (수)	증명법 2 & 도형		
	22일 (수)	삼각함수와 수열		
	29일 (수)	1편 마무리 (실전 논제)		
4월	5일 (수)	다항함수 성질 증명과 그 활용	정규반 시즌2	시리즈 2편 +자체교재 +모의고사 응시 후 첨삭
	12일 (수)	극한과 연속		
	19일 (수)	미분가능성 오개념 때려잡기		
	26일 (수)	Basic 미분 1 (평균값의 정리와 활용)		
5월	3일 (수)	휴강 (내신기간 or 이전 내용 복습)		
	10일 (수)	Basic 미분 2 (미분의 활용)		
	17일 (수)	Basic 적분 1 (수리논술용 적분 기본기)		
	24일 (수)	Basic 적분 2 + 2편 마무리 (실전 논제)		
오르비학원 기준 매주 수요일 (6월 전까지 고정) / 현장강의 or 온라인 라이브 수업 선택가능				
6월	1주차	휴강 (6/1 평가원 모의고사) : 확/기 기본개념 예습	정규반 시즌3	시리즈 4편 (현강용 교재) +모의고사 응시 후 첨삭
	2주차	Basic 확률과 통계 1		
	3주차	Advanced 확률과 통계 1		
	4주차	Basic 선택기하 1		
	5주차	Advanced 선택기하 1		
7월	1주차	Advanced 확률과 통계 2		
	2주차	휴강 (확통, 기하 복습해오기)		
	3주차	Advanced 미적분 1		시리즈 3편 +자체교재 +모의고사 응시 후 첨삭
	4주차	Advanced 미적분 2		
8월	1주차	Advanced 미적분 3		
	2주차	수리논술 전용 실전개념 1		
	3주차	수리논술 전용 실전개념 2		
	4주차	수리논술 전용 실전개념 3 + 3편 마무리 (실전논제)	Semi Final	
	5주차	세미 파이널 1 (대학별 성향파악1 + 전범위 모의)		
9월	1주차	휴강 (9/6 평가원 모의) + 수시원서 지원상담 진행		
	2주차	세미 파이널 2 (대학별 성향파악2 + 전범위 모의)		
	3주차	세미 파이널 3 (주요대학 최근 핵심문항 적용연습)		
	4주차 (종강)	세미 파이널 4 (주요대학 최근 핵심문항 적용연습)	학교별 Final	예상문제 모의고사 + 학교별 자료집
10월	1주~2주차	연세/시립/홍익 학교별 Final (추석연휴 포함 진행)		
~		수능 집중학습 후 수능 후 학교별 Final 준비		
11월	3~5주차	메디컬/한양/성균/중앙/인하 등등 수능후 학교별 Final		

- 오르비학원에서는 수리논술/수능수학 모두 온라인수업으로도 수강 가능합니다.

기대T 2024학년도 현장수업/온라인 라이브 수업 안내

	수리논술 정규반 및 학교별 Final	수능수학
3월	정규반 시즌1	실전개념 + 기출 기본4점 ~ 쉬운 준킬러 최근 기출에 최적화된 수능실전개념 확립
4월	정규반 시즌2	
5월		기출 준킬러 + N제 준킬러 수능 최적화에 필요한 다양한 문제접근법을 연마
6월	정규반 시즌3	
7월		기출+N제 준킬러&킬러 + 기출 Final 액기스 현수능 최대 주적 ‘낯섦’에 대처하는 최종단계
8월	Semi FInal	
9월		실전모의고사 Final 오직 고득점만을 위한 모든 도구들을 최종정리
10월	수능전 Final (연세, 시립, 홍익)	
11월	수능후 Final (대다수 학교)	
출강	오르비학원, 대치 명인학원	오르비학원, 이투스
	수리논술/수능수학 모두 오르비학원에서 온라인 수업도 진행합니다.	
아래 QR코드를 통해 자세한 커리큘럼 설명, 학교별 Final 계획을 확인할 수 있습니다.		
QR Code		

기대T 2024학년도 수리논술 수업 및 교재 상세안내

수업명 (교재)	수업안내 및 교재설명
정규반 시즌1 (1편)	- 수리논술에 빈출되면서 수능과 괴리감이 적은 주제들 위주로 정리하는 수업과 교재 - 수리논술 준비기간 3개월 이하 메디컬 지원자 / 제대로 다시 시작해보고픈 이공계 지원자 수강추천
정규반 시즌2 (2편)	- 수리논술에서 60% 이상의 비중을 차지하는 수리논술용 미적분을 집중적으로 해석하는 수업과 교재 - 수리논술에도 존재하는 행동영역 연습으로 고난도 미적분 문제의 체감난이도를 낮춰주는 수업 - ‘이걸 내가 어떻게 생각해?’ 라는 생각을 부술 수 있는 납득가능하고 감탄할만한 문제접근법 제시
정규반 시즌3 (3편)	- 상위권 대학의 수리논술 합격 당락을 가르는 고난도 주제들을 총정리하는 수업과 교재 - 다음 학교의 논술 합격을 진심으로 원하거나, 다음 학교 중 원서 세 곳 이상 지원예정인 학생에게 추천 *(메디컬, 연세, 한양, 시립, 서강, 중앙, 경희, 이화, 숙명, 세종, 서울과기대, 인하)* - (강의 한정) 선택확통, 선택기하 중 수리논술에 나올만한 부분만 집중적으로 공략하는 강의
Semi Final	- 본인에게 유리한 출제 스타일인 학교를 탐색하여 지원부터 이기고 들어갈 수 있도록 태어난 새로운 수업 - 주요대학 최신기출 (작년 기출+올해 모의) 중 주요문항 선별을 통해 학교별 출제성향 파악 - 정규반에서 배운 개념을 최신 기출에 적용연습 해볼 수 있는 일석이조 수업
학교별 Final	- 정규반과 세미파이널에서 배운 지식을 학교별 스타일에 맞도록 빚어내는 수업 - 학교별 빈출주제 예상문제 모의고사 응시 및 고승률 문제접근 Tip을 배울 수 있는 기출선별자료집 제공
첨삭	- 수업형태 (현강, 온라인) 상관없이 모든 학생들의 첨삭이 진행됩니다. - 1차 서면첨삭 후 강사의 2차 대면첨삭 (온라인은 대면첨삭영상 제공)으로, 완벽한 첨삭 시스템 제공

목차

학습전략

CHAPTER.1

수많은 다항함수 성질 중 수리논술에 주로 쓰이는 성질들을 위주로 정리합니다.
수능에선 결과만 알고 사용해도 별 이상 없더라도, 논술에선 결과를 이끌어내는 과정 자체가 하나의 문제로 출제되기 때문에
책에 있는 모든 내용을 이해하며 넘어가봅시다.

CHAPTER.2

극한~미분 단원에 이어지는 수능형 오개념을 고친 후, 수능에서 많이 구경 못해본 낯선 정리인 최대최소 정리와 사잇값 정리의 다양한 활용법에 대해 익히도록 합시다.

CHAPTER.3

미분가능성과 관련된 오개념을 고치고, 미분의 활용 뿐만 아니라 수리논술을 출제하는 대부분 학교들의 최애 소재인 '평균값의 정리'의 다양한 활용법에 대해 익히도록 합시다.

CHAPTER.4

수리논술에 필수적인 적분 테크닉에 대해 배웁니다. 3편에서 학습할 고난도 적분문제풀이를 위해서 필요한 기본기에 해당하므로, 교재의 가이드에 잘 따라 학습하길 권장합니다.

CHAPTER.5

본 교재에서 배운 개념들을 활용해서 최근 3개년 사이의 주요문항을 풀어보는 Chapter입니다.

Show
and
Prove

1-2

Chapter 1. 다항함수

이차함수의 성질과 증명

이차함수는 수리논술에서 ‘포물선’ 이라는 이름으로도 등장하는데, 다음처럼 생각하면 된다.

대칭축이 y축과 평행한 포물선=이차함수문제, 대칭축이 x축과 평행한 포물선=선택기하문제

1. 선대칭성 : 대칭축

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 대칭축은 $x=-\dfrac{b}{2a}$임이 알려져있다.

이것과 근과 계수의 관계를 콜라보하면, 더 이상 근의 공식을 외우지 않아도 된다.

예를 들어 $x^2-4x-7=0$이라는 이차방정식의 두 근 $t_1,\ t_2$ (단, $t_1<t_2$) 를 구하는 상황을 생각해보자.

이 이차함수의 대칭축은 $x=-\dfrac{-4}{2\times 1}=2$이고, 이는 $t_1,\ t_2$의 산술평균이 2임을 의미하므로 $t_1=2-t,\ t_2=2+t\ (t>0)$ 로 둘 수 있다. 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 -7 이므로 $(2-t)(2+t)=-7,\ t=\sqrt{11}$ 임을 알 수 있다.

따라서 두 근은 $2\pm\sqrt{11}$ 이다.

TIP

기대T가 항상 강조하는 ‘유연한 사고’는 대단한 것이 아니다. 하나의 시각이 아닌 여러 시각에서 수학을 바라보려는 노력을 하면 된다. 이 노력을 본인의 힘으로 해내기 힘들다면, 이 교재에서 떠먹여주는 내용을 스펀지처럼 충분히 흡수하려는 노력을 하는 것으로도 충분하니 ‘이해’를 게을리하지 말자.[7)]

2. 점대칭성 : 최고차항 계수 절댓값이 서로 같은 두 이차함수는 똑같은 이차함수

이차식을 조작해보면 $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+c-\dfrac{b^2}{4a}$이고,

이 이차함수의 그래프를 $\left(\dfrac{b}{2a},\ -c+\dfrac{b^2}{4a}\right)$ 만큼 평행이동시키면 그래프의 방정식은 $y=ax^2$이 된다.

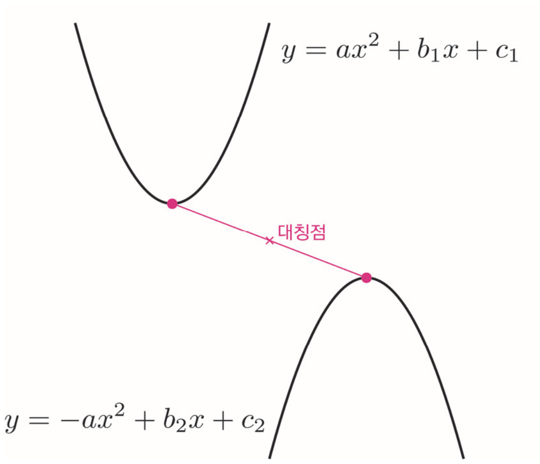
즉, b나 c값에 관계없이 적절한 평행이동을 통해 최고차항의 계수가 a인 이차함수들은 $y=ax^2$ 그래프로 모두 겹치게 할 수 있다는 뜻이다.

위와 마찬가지 방법으로 최고차항의 계수가 $-a$인 이차함수도 $y=-ax^2$ 그래프로 겹칠 수 있을 것이고, 이를 x축대칭 시키면 $y=ax^2$ 그래프를 만들 수 있음을 관찰할 수 있다. 이를 통해 다음 Tip을 알 수 있다.

7) 집필하다보면 가끔 이렇게 잔소리가 나온다. 이해 바람 :)

TIP

최고차항의 계수의 절댓값이 같고 부호만 다른 두 이차함수는 점대칭 관계에 있다.
이때, 대칭점은 두 이차함수의 꼭짓점을 이은 선분의 중점이다.



예제 3 ★★★☆☆ 2021 서울시립대학교

[3-1] 미분가능한 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P와 $f(x)$ 밖의 점 Q를 이은 선분 $\overline{PQ}$가 다음을 만족시킬 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P에서의 접선과 직선 PQ가 수직임을 보이시오.

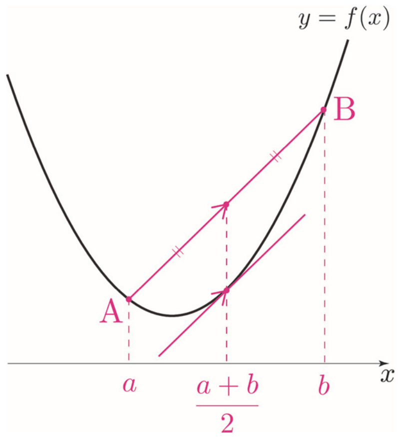
곡선 $y = f(x)$ 위의 모든 점 X에 대하여 $\overline{PQ} \le \overline{XQ}$이다.

[3-2] 곡선 $y = x^2$ 위의 점을 점 P, 곡선 $y = -(x-6)^2$ 위의 점을 점 Q라고 할 때 $\overline{PQ}$의 최솟값을 구하시오.

연습지

3. 구간의 평균변화율과 중점에서의 순간변화율

임의의 이차함수 그래프 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$, $\mathrm{B}(b, f(b))$를 지나는 직선 AB의 기울기와 같은 기울기를 가지는 이차함수 그래프의 접선의 접점의 x좌표는 항상 $\frac{a+b}{2}$이다.



증명

이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$에 대해 $(a \neq 0)$ 의 그래프 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{P}(p, f(p)), \mathrm{Q}(q, f(q))$

직선 PQ의 평균변화율은 $\frac{f(p) - f(q)}{p-q} = \frac{ap^2 + bp + c - aq^2 - bq - c}{p-q}$

$$= \frac{a(p^2 - q^2) + b(p-q)}{p-q} = a(p+q) + b$$

한편, $f'\left(\frac{p+q}{2}\right) = 2a\left(\frac{p+q}{2}\right) + b = a(p+q) + b$이므로

이차함수 그래프 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(a, f(a))\mathrm{B}(b, f(b))$를 지나는 직선 AB의 기울기와 같은 기울기를 가지는 접선의 접점의 x좌표는 $x = \frac{a+b}{2}$이다.

수능대비 사설모의고사에서 나오면 '오버한다'고 평가되는 개념이지만, 논술에선 아무 일 없이 출제되고 있다.
다음 예제를 보자.

예제 4 ★★★☆☆ 고려대 기출

제시문

(가)

두 함수 f와 g는 정의역과 공역이 모두 양의 실수 전체의 집합인 연속함수이다.
함수 f는 정의역의 모든 점에서 양의 미분계수를 갖는다. 그림 1과 같이 임의의 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $F(t,\ f(t))$에서의 접선과 x축이 이루는 예각의 크기는, 원점과 점 $G(t,\ g(t))$를 잇는 선분과 y축이 이루는 예각의 크기와 같다.

(나)

$a<b<c$ 인 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 a와 b의 평균을 d, b와 c의 평균을 e라 하자.
그림 2와 같이 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위의 세 점 $A\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$, $B\left(b,\ \frac{1}{2}b^2\right)$, $C\left(c,\ \frac{1}{2}c^2\right)$에 대하여 두 직선 AB와 BC가 이루는 예각의 크기를 α라 하고, 직선 $y=1$ 위의 두 점 $D(d,\ 1)$, $E(e,\ 1)$에 대하여 두 직선 OD와 OE가 이루는 예각의 크기를 β라 하자.

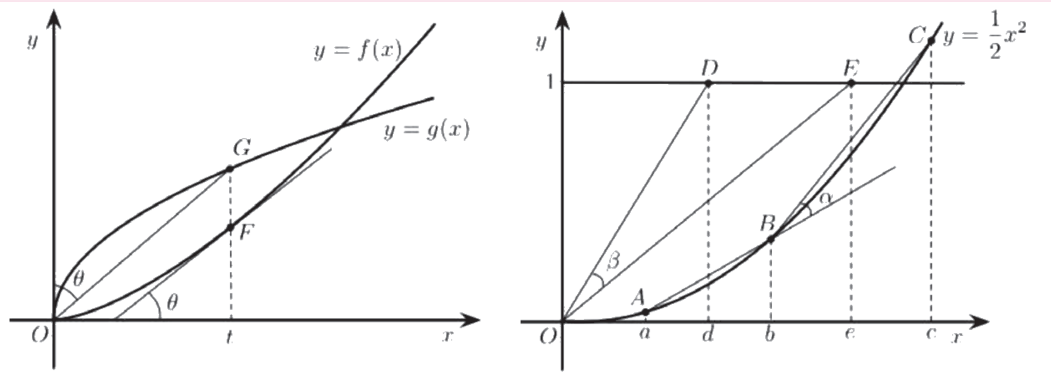


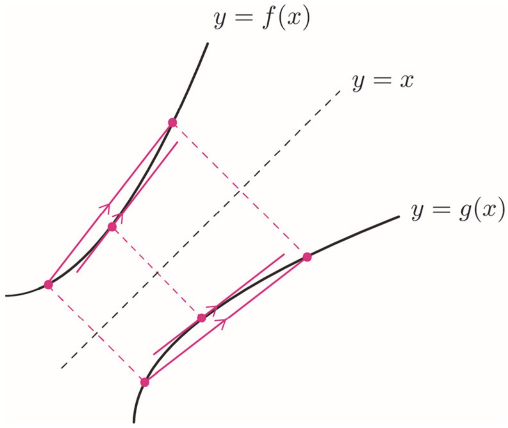
그림 1　　　　그림 2

위의 제시문 (가)와 (나)를 읽고 다음 질문에 답하시오.

[4-1] 제시문 (가)에서의 두 함수 f와 g 사이의 관계식을 구하고, 함수 g가 상수함수 $g(x)=1$일 때의 함수 f를 구하시오.

[4-2] 논제 [4-1]의 결과를 이용하여 제시문 (나)의 α와 β사이의 관계를 도출하시오.

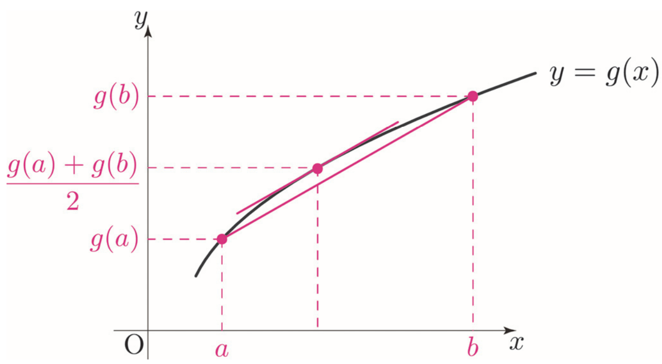
$g(x)=\sqrt{ax+b}+c$ 꼴의 무리함수의 그래프는 이차함수의 그래프와 $y=x$ 대칭관계에 있고, 앞서 설명한 평행의 성질 역시 유지된다.



따라서 앞서 증명한 성질을 무리함수에 적용하면 다음과 같다.

TIP

임의의 무리함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{C}(a, g(a))$, $\mathrm{D}(b, g(b))$를 지나는 직선 CD의 기울기와 같은 접선의 기울기를 가지는 접점의 y좌표는 항상 $\dfrac{g(a)+g(b)}{2}$이다.



Show and Prove

2–1

극한

함수의 극한과 수열의 극한이 각각 수학2와 미적분에 나뉘어져 있지만, 수열도 결국에는 함수[12)]이므로 본 수리논술 책에서는 두 극한을 한 번에 다루도록 하겠다.

또한 정답만 내면 장땡인 수능수학에서 제일 많은 오개념을 갖고 오는 Part이기 때문에, 당분간은 극한과 미분에 대한 오개념과의 전쟁을 준비해야한다.

우선 함수의 극한 기초문제를 풀어보자.

예제 1 ★☆☆☆☆

함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오.

연습지

해설 1

"분모가 0 으로 가니까 분자도 0 으로 가고, 뭐야 그냥 $f(2) = 0$ 이네 ㅋㅋ"

라고 생각한다면, 완벽히 틀린 풀이이다.
'분모가 0 으로 가니까 분자도 0 으로 가서' 알 수 있는 사실은 $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$ 이라는 사실 뿐이다.
$f(x)$ 의 $x = 2$ 에서의 '연속성'이 보장되지 않았기 때문에 $f(2)$ 의 값은 알 수 없다.

따라서 $f(2)$ 의 값을 알 수 없다. 가 정답이다.
(만약 $f(x)$ 의 $x = 2$ 에서의 연속성이 보장된 상태였다면 $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 0$ 이 되어 $f(2) = 0$ 이다.)

12) 정의역이 자연수 전체의 집합이고, 치역이 실수 전체의 집합인 함수

| 극한의 이해

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$는 두 의미를 내포한다.

– x는 a로 한없이 다가간다. 이 때, x는 a가 아니다.

그래서 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$로 풀 수 있는 근거[13]가 된다.

– $f(x)$는 b로 한없이 다가간다. 이 때, 그 값이 b일 수도 있고 b가 아닐 수도 있다.

수능수학 합성함수 극한문제 3점 문항을 풀 수 있는 수준이라면 충분히 이해하고 있을테니 넘어가겠다.

1. 극한값 구하기 1 : 기본형태 (수열, 함수 공용)

수능-내신에서 많이 쓰이는 제일 기본적인 문제형태이다.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 등을 구하라고 할 때, a_n과 $f(x)$의 식을 직접 구하여 극한 안에 넣고 단순 계산.

예제 2 ★★☆☆☆

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 5$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 2$ 일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$의 값에 대해 논하시오.

연습지

13) 극한 내부의 분모, 분자의 $(x-1)$이 0이 아니기 때문에 나눌 수 있는 근거

해설 2

$a_n - 4 = b_n$이라 두면[14] $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2 \Leftrightarrow b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$ 에서 수열 $\{b_n\}$은 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

(cf. 1편에서 학습했던 테크닉인데, 이것이 낯설다면 반드시 1편→ 2편→3편 순으로 학습하기 바란다.)

따라서 $b_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_n = 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로 $\lim_{n \to \infty} a_n = 4$ 이다.

| 수열의 수렴성

이전 문제를 풀 때 $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$라 하고 $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 2$, $\alpha = 4$로 구한 학생들이 대다수일 것이다.

하지만 이렇게 풀면 수리논술에서는 0점이다.

이 풀이는 '수열이 수렴한다.'는 조건이 있을 때에만 가능한 풀이임을 명심하자.

맨날 이렇게 풀었어도 수능에서 한번도 문제가 생기지 않았던 이유는, 수능은 정답이 항상 존재하는 시험이라서 극한값이 반드시 존재할 수 밖에 없는 환경이었기 때문이다.

2. 극한값 구하기 2 : 샌드위치 정리 (수열, 함수 공용)

$f(x) < h(x) < g(x)$ 관계를 만족시키는 세 연속함수 f, g, h와 임의의 실수 a에 대하여 다음이 성립한다.

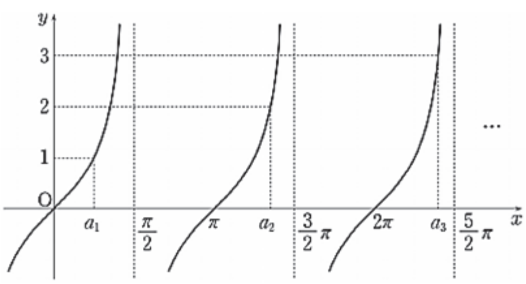
$$\lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} h(x) \le \lim_{x \to a} g(x)$$

워낙 통용되는 정리이기 때문에 샌드위치 정리라고 답안에 작성해도 무방하나,
걱정이 되는 친구들은 교과서에 실려있는 이름인 '극한의 대소관계'라 해주면 된다.

a_n, $f(x)$의 범위를 구하고 샌드위치정리 적용하여 정답을 구하는게 일반적 풀이.

예제 3 ★☆☆☆☆ 2014 수능 18번

자연수 n에 대하여 직선 $y = n$과 함수 $y = \tan x$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 작은 수 부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n}$의 값을 구하시오.



14) 1편 수열 편에서 배운 Idea를 활용했다.

3. 극한값 구하기 3 : 수렴 부등식 활용 (수열 전용)

모든 자연수 n에 대하여

$$|a_{n+1}-L|<c\times|a_n-L|$$

을 만족시키는 상수 $0\le c<1$ 가 존재할 때 $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하는 방식이다.

$n=1,\ 2,\ \cdots$를 대입하면

$$|a_2-L|<c\times|a_1-L|$$
$$|a_3-L|<c\times|a_2-L|$$
$$\cdots$$
$$|a_n-L|<c\times|a_{n-1}-L|$$

이고, 모든 양변을 곱한 후 식 정리를 해주면 $|a_n-L|<c^{n-1}\times|a_1-L|$ 이다.

양변에 $\lim_{n\to\infty}$ 을 취하면 $\lim_{n\to\infty}c^{n-1}=0$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}|a_n-L|\le 0$ 에서

$\lim_{n\to\infty}(a_n-L)=0$, $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ 임을 알 수 있다.

예제 4 ★★★☆☆ 유명예제

$a_1=4$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{4}{a_n}\right)$이 만족할 때, 다음 물음에 답하시오.

[4-1] 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>2$임을 보여라.

[4-2] $a_{n+1}-2<\dfrac{1}{2}(a_n-2)$임을 보여라.

[4-3] $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오.

연습지

4. 극한값 구하기 4 : 다변수극한 (함수 전용)

지금까진 변수가 하나뿐인 극한을 풀라고 요구했다면, 이번 Theme 에서는 두 개 이상의 변수가 다른 변수로 깔끔하게 정리되지 않는 상황의 문제에 대해 다뤄보겠다.

가령 해당 문제의 예를 들면 다음과 같다.

예제 5 ★★★☆☆ 2015 고려대

제시문

$s<t$ 인 두 실수 s, t에 대하여 두 점 $A(s, s^2)$과 $B(t, t^2)$은 곡선 $y=x^2$위를 움직인다.

제시문에서 두 점 A와 B가 $\overline{AB}=1$을 만족하며 움직일 때, 선분 AB 와 곡선 $y=x^2$으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $F(s)$라 하자. 극한값 $\lim_{s \to \infty} s^3 F(s)$를 구하여라.

연습지

TIP

문제는 s에 대한 극한인데, 극한을 보내야하는 식엔 s 뿐만아니라 t까지 등장한다.
이럴 경우,

① 위 문제처럼 s가 무한으로 갈 때 t는 어디로 갈지 관찰하여 극한을 동시에 먹여주거나
② 두 문자를 적당한 꼴로 엮어서, 그 꼴이 어디로 다가가는지 관찰하는 방식이 필요하다.

이 문제는 ②에 해당하는 문제이다.

해설 5

$\overline{AB}^2 = (t-s)^2 + (t^2-s^2)^2 = 1$

$\therefore (t-s)^2\{1+(t+s)^2\} = 1$

$\therefore (t-s)^2 = \dfrac{1}{1+(t+s)^2}$

또한 직선 AB의 방정식은

$y = (t+s)(x-s)+s^2 = (t+s)x - st$ 이므로

$F(s) = \displaystyle\int_s^t -(x-s)(x-t)dx = \frac{1}{6}(t-s)^3$ 15)

$$\therefore \lim_{s\to\infty} s^3F(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{s^3(t-s)^3}{6}$$
$$= \frac{1}{6}\lim_{s\to\infty}\{s^2(t-s)^2\}^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{1}{6}\lim_{s\to\infty}\left\{\frac{s^2}{1+(t+s)^2}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

한편, $s\to\infty$ 일 때 $0<s<t$이므로 $0<s^2<t^2$ $\therefore t^2-s^2>0$

$\overline{AB}^2 = (t-s)^2+(t^2-s^2)^2 = 1$에서 $(t^2-s^2)^2>0$이므로 $(t-s)^2<1$

$\therefore t-s<1$ $\therefore s<t<s+1$

양변을 s로 나누면 $1<\dfrac{t}{s}<1+\dfrac{1}{s}$ 이고, $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\left(1+\frac{1}{s}\right)=1$이므로 샌드위치 정리에 의하여

$\displaystyle\lim_{s\to\infty}\frac{t}{s}=1$ 이다. 따라서 구하는 극한값은

$$\lim_{s\to\infty}s^3F(s) = \frac{1}{6}\lim_{s\to\infty}\left\{\frac{s^2}{1+(t+s)^2}\right\}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}\lim_{s\to\infty}\left\{\frac{1}{\frac{1}{s^2}+\left(\frac{t}{s}+1\right)^2}\right\}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{48}$$

15) 문제에서 해당 적분이 차지하는 볼륨이 작기 때문에, 계산을 생략 후 바로 써도 괜찮다.

예제 6 ★★★☆☆ 2011 연세대 일부

두 예각 θ, α에 대하여 $\tan\alpha = k\times tan\theta$를 만족시킨다. (단, k는 양수이다.)

$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ 의 값을 구하시오.

연습지

이번 문제는 한 문자가 다른 문자로 표현되는 경우이다. 잘 정리한 후 대입하여 극한을 구하는 일반적인 과정을 따라주면 된다.

예제 7 ★★★☆☆ 2016 서강대

함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 미분가능하고 $f'(x)$가 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다.
(단, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)\neq -1$ 이고, $f(1)=1$, $f'(1)=\alpha$ 이다.)
임의의 실수 s에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(\mathrm{s}, \mathrm{f}(\mathrm{s}))$에서의 접선에 수직이면서 점 P를 지나는 직선이 $y=x$와 만나는 점을 (t, t)라고 하자. 이때 극한값 $\lim_{s\to 1}\dfrac{t-1}{s-1}$을 α에 관한 식으로 나타내시오.

연습지

4. 평균값의 정리 실전활용 Tip.4 : 형태가 약간 뒤틀린 평균값정리 눈에 익혀두기

| 적분의 평균값 정리 ver.1

$f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, $\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=f(c)$를 만족시키는 c $(a<c<b)$가 적어도 하나 존재한다.

증명

$f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 하면 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ 이므로

$\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=f(c) \Leftrightarrow \dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}=f(c)$ 이다. 따라서 함수 $F(x)$에 대한 평균값의 정리를 증명하면 되는데,

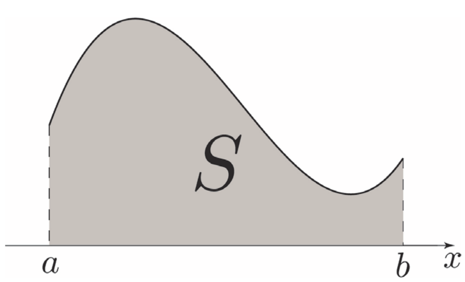
앞서 롤의 정리를 이용하여 증명했었다.

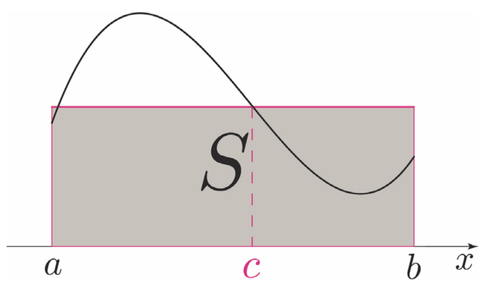
굳이 적분의 평균값 정리 ver.1을 기존의 평균값의 정리와 구분하여 사용하진 말자.
적분 기호만 쓰였을 뿐, 함수 $F(x)$에 대한 평균값의 정리 모양과 다를 바가 없기 때문이다.

| 적분의 평균값 정리의 그래프적 의미 (참고)

위의 식을 정리하면 $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$ 이다. 좌변은 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이를 의미하고,

우변은 $b-a$와 $f(c)$를 각각 가로길이, 세로길이로 하는 직사각형 넓이를 의미한다.





예제 18 ★★☆☆☆ 2018 서울과기대 기출

자연수 n에 대하여 0이 아닌 실수 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$이 $\dfrac{a_0}{1}+\dfrac{a_1}{3}+\dfrac{a_2}{5}+\cdots+\dfrac{a_n}{2n+1}=0$을 만족시킨다.

이때, 방정식 $a_0+a_1x^2+a_2x^4+\cdots+a_nx^{2n}=0$의 실근의 개수가 2 이상임을 보이시오.

| 적분의 평균값 정리 ver.2

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $g(x)>0$일 때,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\times\int_a^b g(x)dx$$

를 만족시키는 c $(a<c<b)$가 적어도 하나 존재한다.

증명

최대최소정리에 의하여 함수 $f(x)$는 최솟값 $m=f(c_1)$과 최댓값 $M=f(c_2)$을 갖는다.34)
따라서 $m\le f(x)\le M$ 이고, 양변에 $g(x)$를 곱한 후 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 정적분을 하면

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

이고, 양변을 $\int_a^b g(x)dx$로 나누면 $f(c_1)=m\le\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le M=f(c_2)$ 임을 알 수 있다.

사잇값 정리에 의하여 $\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=f(c)$인 c가 c_1, c_2 사이에 존재하므로, 이를 정리하면

$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\times\int_a^b g(x)dx$ 인 c $(a<c<b)$ 가 적어도 하나 존재함을 알 수 있다.

TIP

증명과정을 아래처럼 간단히 정리해두면 좋다.

최대최소정리 → $g(x)$ 곱하기 → 정적분 → 적분값 나누기 → 사잇값 정리

또한 $g(x)=1$일 때, ver.2의 식은

$\int_a^b f(x)dx = f(c)\times\int_a^b 1dx = f(c)\times(b-a) \Leftrightarrow \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=f(c)$로, ver.1이 나온다.

34) 원래는 롤의 정리 증명 때처럼, $f(x)$가 상수함수인 케이스도 나눠서 증명해주는 것이 일반적인 증명이나, 이 증명이 부족하진 않다.

예제 19 ★★☆☆☆

사잇값 정리를 이용하여

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx = \sin c \int_0^{\pi} e^x\, dx$$

를 만족하는 실수 c가 구간 $(0, \pi)$에 존재함을 보이시오.

연습지

예제 20 ★★☆☆☆

[20-1] 평균값의 정리를 이용하여

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx = \pi e^c \sin c$$

를 만족하는 실수 c가 구간 $(0, \pi)$에 존재함을 보이시오.

[20-2] $\int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx = \pi e^c \sin c$을 만족하고 구간 $(0, \pi)$에 존재하는 모든 실수 c의 합을 구하시오.

연습지